ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ и ИНТЕГРАЛЬНОЕ

ИЗЧИСЛЕНІЕ,

Собранное на Французскомъ языкѣ г. Кузенемъ, Парижскаго Института членомъ, и приумноженное при преложеніи на Россійской С. Гурьевымъ, Академіи Наукъ Академикомъ, Училища корабельной Архитектуры Профессоромъ и Академіи Россійской членомъ.

КНИГА ПЕРВАЯ;

Содержащая въ себѣ введеніе въ сіе изчисленіе.

Печатано съ дозволенія Санктпетербургской цензуры.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ

ри Императорской Академіи На, –

1801 года.

ВСЕПРЕСВѢТЛѢЙШЕМУ, ДЕРЖАВНѢЙШЕМУ,

ВЕЛИКОМУ ГОСУДАРЮ ИМПЕРАТОРУ

АЛЕКСАНДРУ ПАВЛОВИЧУ,

САМОДЕРЖЦУ ВСЕРОССІЙСКОМУ,

и прочая и прочая и прочая,

ГОСУДАРЮ ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕМУ.

ВСЕМИЛОСТИВѢЙШІЙ ГОСУДАРЬ!

Сочиненіе, которое пресвѣтлымъ ВАШЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА Именемъ украсить и къ священнымъ стопамъ ВАШИМЪ положить осмѣливаюсь, есть плодъ глубочайшихъ размышленій, въ продолженіе многихъ вѣковъ величайшими умами на маѳематическое познаніе употребленныхъ, плодъ Кузенемъ въ одинъ составъ собранный и мною при преложеніи его на нашъ языкъ еще приумноженный. Основательно утверждать можно, что нѣтъ ни единаго по сей части знаній человѣческихъ сочиненія, которое бы въ одномъ составѣ заключало столько различныхъ ѳеорій съ приложеніемъ оныхъ къ Физикѣ, какъ сіе: всѣ главнѣйшія открытія Архимеда и Аполлонія, Декарта и Валлиса, Нютона и Лейбница, Ейлера и Д'Аламберта, Лагранжа и Лапласа въ ономъ помѣщены, не столько по порядку сихъ эпохъ маѳематики, какъ паче по порядку связующему истинны неразрывною цѣпью.

Переводъ сего сочиненія, съ присовокупленіемъ различныхъ примѣчаній, въ началѣ 1800 года я имѣлъ щастіе представить въ рукописи ВАШЕМУ ИМПЕРАТОРСКОМУ ВЕЛИЧЕСТВУ. Снисходительнѣйшее

онаго принятіе и потомъ лестнѣйтая и сугубая награда отъ прещедраго Россійскаго Престола Наслѣдника, за трудъ мой пенсіономъ и своеручнымъ рескриптомъ ВАШЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА ниспосланная, породили во мнѣ новыя силы и ревность къ вящшему и полезнѣйшему сего сочиненія разпространенію еще знатными присовокупленіями, которыя и въ теченіе самаго тисненія вносить я не упускалъ. Преданную такимъ образомъ тисненію, въ изявленіе предъ лицемъ свѣта глубочайшей моей благодарности и въ разширеніе всеобщей пользы, сію первую часть онаго благоволите, ВСЕМИЛОСТИВѢЙШІЙ ГОСУДАРЬ, удостоить нынѣ МОНАРШИМЪ ВАШИМЪ воззрѣніемъ и тѣмъ ободрить меня къ неослабному всего труда продолженію и окончанію.

ВСЕМИЛОСТИВѢЙШІЙ ГОСУДАРЬ!

ВАШЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА

вѣрноподданнѣйшій

Семенъ Гурьевъ.

Упоминаемый въ семъ приношенїи Высочайшїй рескриптъ здѣсь прилагается, какъ памятникъ особеннаго МОНАРШАГО къ наукамъ благоволенїя, и какъ предзнаменованїе прочнаго и надежнаго оныхъ въ отечествѣ нашемъ разпространенія.

Семенъ Емельяновичъ. Трудъ вашъ въ переводѣ творенїя Кузеня о дифференцїальномъ и интегральномъ изчисленїи съ дополненїемъ вашихъ примѣчаній, на пользу отечества своего подъятый, приемлю съ признательностїю, и въ знакъ моей благодарности определяю вамъ навсегда пенсїонъ по 500 ру. въ годъ, пребывая къ вамъ доброжелательнымъ.

Подлинный писанъ и подписанъ собственною ЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА рукою тако:

АЛЕКСАНДРЪ.

С. Петербургъ
Февраля 10 дня 1800 года.
Господину Академику Гурьеву.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ СЛОВО.

Начала Дифференціальнаго и Интегральнаго Изчисленія изложенныя по способу, каковый принятъ въ большей части сочиненій, оныя въ себѣ заключающихъ, не имѣютъ той ясности, которая есть основаніе несомнительной истинны. Въ самомъ дѣлѣ, какимъ образомъ можно имѣть ясное и точное понятіе о количествѣ безконечно маломъ? И Аналитика, которая за предметъ имѣетъ изчисленіе содержаній сихъ количествъ, можетъ ли быть почитаема составляющею частію наукъ точныхъ?

Таковыя разсужденія были г. Ролле и другихъ Геометровъ, отвергавшихъ сіи Изчисленія при ихъ рожденіи. Иные же, какъ то Ніювентитъ, принимали безконечно малыя количества токмо перваго порядка, не представивъ себѣ, что естьли въ кругѣ можно вообразить хорду безконечно малую перваго порядка, то соотвѣтствующій отрѣзокъ или синусъ версусъ будетъ безконечно малое количество втораго, и что естьли хорда будетъ безконечно малое количество втораго порядка, то отрѣзокъ будетъ безконечно малое количество четвертаго, и такъ далѣе, потому что діаметръ, которой конеченъ, содержится къ хордѣ, какъ хорда къ соотвѣтствующему отрѣзку. Многіе изъ тѣхъ самыхъ, которые сначала были ревностнѣйшіе защитники безконечныхъ количествъ, пораженные трудностями, имъ противуположенными, не почитали потомъ своихъ дифференціаловъ за количества безконечно малыя, но токмо за несравненно меньшія противу тѣхъ, коихъ онѣ суть дифференціалы, что совершенно опровергало точность Способа.

Между тѣмъ Нютонъ издалъ въ свѣтъ свои *Математическія Начала естественной Философіи*, гдѣ всѣ сіи трудности разрѣшены. Но сіе удивительное твореніе въ тогдашнее время не могло быть многими Геометрами понимаемо. Тѣ же, коимъ оно было вразумительно, какъ то Лейбницъ, Яковъ и Іоаннъ Бернулли, Тейлоръ, Котесъ и Марки Л'опиталь, занималися паче приращеніемъ Дифференціальнаго и Интегральнаго Изчисленія, нежели какъ изъясненіемъ вступленія въ оное.

Что Лейбницъ съ своими учениками называетъ *безконечно малою разностію* или *дифференціаломъ*, то Ньютонъ именуетъ *флюксіономъ*. Онъ математическія количества разсматриваетъ, какъ произведенныя чрезъ движеніе, и ищетъ содержаніе перемѣнныхъ скоростей, съ которыми оныя количества описываются; и сіи то скорости называетъ *флюксіонами* количествъ. Таковыя начала не противорѣчатъ строгости математической; мы скажемъ однакожъ, что въ Алгебру и Геометрію ввести движеніе, значитъ ввести понятіе совершенно чуждое, и которое при томъ не довольно просто. Правда спустя послѣ того больше пятидесяти лѣтъ при случаѣ нѣкоторыхъ сочиненій, появившихся противу новыхъ Изчисленій, одинъ изъ величайшихъ Аглинскихъ Геометровъ Маклоренъ сочинилъ книгу [a Treatiſe of Fluxions], въ которой предположилъ себѣ главнымъ предметомъ показать, что *прямой и обратной Способъ Флюксіоновъ* есть столь же строгъ, какъ и Способъ древнихъ. Но доказательства сего писателя основаны такъ же на движеніи, и истинная *метафизика* Дифференціальнаго и Интегральнаго Изчисленія, которая столь удобно выводится изъ способа древнихъ Геометровъ, извѣстнаго подъ именемъ *Способа Предѣловъ*, была совсѣмъ не извѣстна, когда Д'Аламбертъ обнародовалъ ее въ IVй книгѣ Энциклопедіи. Я приступлю къ настоящему слову съ изложенія сея метафизики, и буду стараться употребить всю ясность, каковой она подлежать можетъ.

Математическія Науки имѣютъ единственнымъ предметомъ сравненіе величинъ, для достиженія къ познанію содержаній, между ими имѣющихся. Въ каждомъ родѣ величинъ берется одна за единицу, и сія совершенно произвольная единица служитъ мѣрою при опредѣленіи содержаній ея рода величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, я не иное что могу сказать о разстояніи, на примѣръ, двухъ предметовъ, какъ что оное больше или меньше, нежели другое, и навѣрное между имъ и его по произволенію взятою единицею, которая можетъ быть сажень, естьли хочешь, имѣется тоже геометрическое содержаніе, что и между нѣкоторымъ отвлеченнымъ числомъ и его отвлеченною единицею (*). И

(*) Всѣ величины, которыя съ единицею соизмѣримы, имѣютъ къ ней содержаніе, но всѣ тѣ, которыя съ единицею несоизмѣримы, не имѣютъ къ ней *содержанія*; и какъ числа собственно называемыя суть самыя сіи содержанія величинъ къ единицѣ, то сказанное авторомъ не далѣе простирается какъ токмо до величинъ

въ семъ то смыслѣ надлежитъ разумѣть многія сокращенныя выраженія, которыя употребляютъ Геометры и которыя могутъ вовлечь въ погрѣшность. Они говорятъ напримѣръ, что прямоугольникъ есть произведеніе основанія умноженнаго на высоту его; но не возможно умножить линію на линію, понеже одинъ изъ множителей умноженія необходимо долженствуетъ быть число отвлеченное. И такъ что можетъ означать сіе предложеніе? Оно означаетъ, что между упомянутымъ прямоугольникомъ и единицею поверьхности, коея каждое изъ двухъ размѣреній равно линейной единицѣ, есть тоже геометрическое содержаніе, что и между отвлеченнымъ числомъ, произшедшимъ отъ умноженія числа линейныхъ единицъ основанія на число линейныхъ единицъ высоты, и отвлеченною единицею. Другое изъ таковыхъ выраженій весьма часто встрѣчается въ прикладной Маѳематикѣ, аименно: скорость пропорціональна пространству раздѣленному на время. Можно ли сравнивать величины разнаго рода, и не извѣстно ли, что во всякомъ дѣленіи одно изъ двухъ, или дѣлитель или частное, необходимо должно быть число отвлеченное? Но естьли сіе выраженіе означаетъ, что скорость пропорціональна частному произшедшему отъ дѣленія двухъ отвлеченныхъ чиселъ, изъ коихъ одно есть содержаніе пространства къ единицѣ пространства, а другое содержаніе времени къ единицѣ времени, тогда совсѣмъ не будетъ затрудненія. (*) На конецъ не найдется такъ же ни-

---

съ единицею соизмѣримыхъ. Но поелику несоизмѣримыхъ съ единицею величинъ, какъ и соизмѣримыхъ, безчисленное множество, то раждается вопросъ, какъ пособить толикому во опредѣленіи величинъ чрезъ числа недостатку? Одно средство, вмѣсто чиселъ употребить линіи, которыя бы къ ихъ единицѣ, по произволенію взятой, такъ содержалися (по опредѣленію пропорціи мною данному въ первой книгѣ маѳематическихъ трудовъ моихъ), какъ содержатся всякаго другаго рода величины къ своей единицѣ; линіи взятыя такимъ образомъ замѣнятъ намъ сего другаго рода величины, какъ видимъ въ Механикѣ, гдѣ линіи замѣняютъ всякаго рода силы, означая притомъ и направленіе ихъ напряженія. Въ слѣдующемъ примѣчаніи, которое я приложить имѣю, мы увидимъ еще, что такъ же поверьхности и тѣла могутъ изображаться чрезъ линіи.

(*) Для изъясненія сихъ выраженій, нѣтъ ни малѣйшей надобности прибѣгать къ числамъ, кои, какъ то мы въ предъидущемъ примѣчаніи показали, недостаточны ко изъявленію всѣхъ одного какого нибудь рода величинъ, а довлѣетъ токмо

какого затрудненія, видя въ одномъ уравненіи величины разнаго рода, потому что дѣйствительно сравниваются не сіи величины, но содержанія каждой изъ нихъ къ своей по произволенію взятой единицѣ.

дать надлежащія опредѣленія умноженію и дѣленію. Въ самомъ дѣлѣ, естьли послѣдуя Декарту и Нютону, мы дадимъ симъ дѣйствіямъ слѣдующія опредѣленія:

Умножить величину на другую, значитъ найти третію, къ которой бы множимая величина такъ содержалася, какъ единица къ множащей.

Раздѣлить величину на другую, значитъ найти третію, къ которой бы дѣлимая величина такъ содержалася, какъ дѣлящая къ единицѣ.

Тогда въ умноженіи линіи на линію и раздѣленія пространства на время ничего ни страннаго ни невозможнаго не выдетъ: въ первомъ случаѣ произведеніе будетъ линія равная четвертой пропорціональной единицы, высоты и основанія прямоугольника, а въ другомъ частное будетъ пространство въ единицу времени перейденное, что въ самомъ дѣлѣ и есть то, что въ Механикѣ подъ скоростію разумѣется.

Но скажутъ, какимъ же образомъ въ первомъ случаѣ оная четвертая пропорціональная составляющая произведеніе основанія на высоту прямоугольника можетъ изображать площадь онаго? На сей конецъ надлежитъ замѣтить слѣдующее предложеніе, когда четыре линіи находятся въ пропорціи, то прямоугольникъ сдѣланный изъ крайнихъ равенъ прямоугольнику сдѣланному изъ среднихъ линій, которое съ помощію Евклида удобно всякой доказать можетъ, и изъ котораго слѣдуетъ, что всякой прямоугольникъ равенъ другому, у котораго высота единица, а основаніе упомянутое произведеніе; и какъ прямоугольники имѣющіе одну высоту содержатся какъ основанія, то слѣдуетъ еще, что всѣ прямоугольники содержатся какъ оныя произведенія основаній на высоту ихъ; и каждый къ квадрату изъ линейной единицы приемлемому за единицу поверьхностей, какъ каждое изъ сихъ произведеній къ линейной единицѣ; и такъ вмѣсто самыхъ прямоугольниковъ довольно токмо сихъ произведеній. И для того то произведеніе основанія на высоту прямоугольника называется площадью онаго.

Въ прочемъ, когда явственно, что въ прямоугольникѣ, у котораго высота единица, а основаніе оное произведеніе, упомянутыхъ квадратовъ такое же количество содержаться будетъ, какое количество линейныхъ единицъ содержится въ произведеніи, то сіе произведеніе, относительно къ своей единицѣ, изображать будетъ количество квадратовъ въ томъ прямоугольникѣ, и слѣдственно такъ же и въ данномъ, содержащихся. И вотъ другая причина, для которой оное произведеніе, хотя не иное что какъ линія, площадью прямоугольника называется.

Одно изъ сихъ содержаній, коего числитель единица, не дѣлается менѣе или болѣе, какъ потому, что знаменатель увеличивается или уменьшается. Естьли оной увеличивается, то содержаніе непрестанно приближается къ нулю, никогда не сдѣлавшись онымъ; откуда слѣдуетъ, что понятіе, которое о нулѣ мы составляемъ, есть понятіе о предѣлѣ, къ коему уменшающіяся содержанія могутъ приближаться непрестанно, никогда съ нимъ не сливаясь; равнымъ образомъ и въ приращеніи, какому подлежитъ сіе содержаніе, мы не иное что усматриваемъ, какъ что оное непрестанно приближается къ безконечности, никогда ея не достигая. И такъ о безконечности мы не имѣетъ инаго точнаго понятія, кромѣ какъ что она есть предѣлъ, къ которому увеличивающіяся содержанія всегда болѣе и болѣе приближаются, никогда его не достигая (*).

Тоже должно разумѣть и о толщинѣ параллелепипеда. И не только линію на линію умножать, но и линію въ линію, какъ въ степень, возвышать можно. Все зависитъ отъ опредѣленія или понятія, каковое дано будетъ симъ дѣйствіямъ. Собственно умноженіе не иное что значитъ, какъ кратное величины взятіе, и сначала то токмо подъ симъ словомъ и разумѣли; но когда знанія стали возрастать, то смыслъ сего слова разпространили и къ частному величины взятію; такъ вмѣсто того, что бы сказать, что числа, напримѣръ 20ти, требуется взять четвертую часть, начали говорить что число 20 требуется умножить на $\frac{1}{4}$; потомъ смыслъ того же слова еще далѣ распространили, а именно стали разумѣть подъ онымъ кратное и купно частное величины взятіе; такъ вмѣсто того, чтобы сказать, что числа 20ти требуется взять трикратную величину, и оной трикратной четвертую часть, стали говорить, что число 20 требуется умножить на $\frac{3}{4}$. Наконецъ чтобы всѣ сіи и другіе возможные случаи привести подъ общій смыслъ, дали за недостаткомъ собственнаго слова умноженію предначертанное выше нами знаменованіе. И точно тоже самое должно быть съ возвышеніемъ величинъ въ степени. Нютонъ какъ извлеченіе корней, такъ и возвышеніе соединенное съ извлеченіемъ обратилъ уже въ единое возвышеніе, теперь остается токмо всѣ сіи случаи привести подъ общій смыслъ, подобно какъ учинено въ умноженіи, и сіе то я надѣюсь сдѣлать въ особливомъ сочиненіи, которое должно будетъ нѣкоторымъ образомъ перемѣнить видъ алгебры.

(*) Здѣсь кромѣ противорѣчія, я ничего точнаго не вижу; ибо чрезъ предѣлъ дается опредѣленность величинѣ, а безконечностію всякая опредѣленность отрицается.

Величины, которыя непрестанно убывают или возрастают, не всѣ стремятся приближиться к нулю или безконечности; многія имѣют предѣлами другія величины. Круг, например, есть предѣл вписанных и описанных многоугольников. При увеличивании числа сторон сих многоугольников, они станут приближаться к кругу всегда болѣе и болѣе, и могут разниться от него столь мало, как захочешь, но по строгости никогда с ним не сольются.

Из сего другаго понятия о предѣлѣ удобно заключить можно: 1) что двѣ величины, которыя суть предѣлы одной величины, будут необходимо равны между собою; ибо, естьли бы была нѣкая между ими разность, то бы третья не могла приближиться к одной из двух болѣе нежели сія разность; что противно положенію; 2) что естьли двѣ величины, которыя непрестанно растут или убывают, сохранят между собою одно непремѣнное содержание, то оное содержаніе будет так же содержание и предѣлов тѣх двух величин. На сих то двух столь простых предложеніях основан Способ Предѣлов; оныя суть начала всей *трансцендентной Геометріи*; начала которыя наипаче долженствовало бы употреблять в сочиненіях, первыя основанія в себѣ заключающих, гдѣ столь нужно, чтобы не вводить неопредѣленных и несовершенных понятий, дабы изгнать сей род доказательств, в котором предполагается, будто можно вообразить себѣ безконечность, как дѣйствительно существующую.

Я примѣчу при сем случаѣ, что в способѣ предлагать какую бы то ни было часть Математических Наук, есть два весьма между собою разнствующіе предмета, кои принимать в разсужденіе надлежит: главныя начала Способа, которыя бы не могли перемѣниться, и Способ самой, которой бы был всеобщий и простѣйший. Утверждали нѣкоторые, что Способ приведенный в простоту, терял свою строгость, как будто бы точность состояла в утомлении читателя путем излучистым и запутанным. Способ, коему слѣдовали древніе Геометры, толико затруднителен, что предложенія, которыя искуснѣйшіе Геометры едва могли разумѣть в их сочиненіях, доказываются теперь с наивеличайшею удобностію. Неуже ли не довольное число повстрѣчаться может естественных трудностей, которыя преодолѣть должно, в толико пространном пути, каков есть Математика, чтобы вводить еще новыя безполезныя? Единое намѣреніе, кое предполагать себѣ должно, есть то, чтобы достигнуть к несомнительной истинѣ как возможно прямѣе, и она основана единственно на ясности начал.

Однакож надлежит при сем не забывать, что бы не переносить начал Науки, коя не столь проста, в другую, коя простѣе; как

напримѣръ не употреблять началъ Механики въ Геометріи. Но можно прилагать Алгебру къ Геометріи, и каждую изъ сихъ наукъ къ Механикѣ. И къ сему самому приложенію Алгебры къ Геометріи, учиненному Декартомъ, должно относить епоху перемѣны возведшей въ краткое время Маѳематику на сію степень совершенства, въ которомъ нынѣ ее видимъ.

Алгебра доставила намъ средство изображать величины, коихъ другія извѣстныя подъ именемъ трансцендентныхъ суть предѣлы, всеобщимъ образомъ, и находить чрезъ то другіе предѣлы первыхъ величинъ, которыя будутъ трансцендентныя. Чтобы показать употребленіе, каковое сіе правило имѣть можетъ, простѣйшимъ примѣромъ, мы замѣтимъ, что, поелику кругъ есть предѣлъ вписанныхъ многоугольниковъ, площадь его должна найтися, естьли сыщется сперва площадь всякаго правильнаго вписаннаго многоугольника. Въ самомъ дѣлѣ, сія послѣдняя выражается чрезъ произведеніе трехъ множителей, кои суть: содержаніе периметра многоугольника къ радіусу, половина радіуса и избытокъ радіуса предъ стрѣлою; но чѣмъ стрѣла болѣе убываетъ, тѣмъ содержаніе периметра многоугольника къ радіусу болѣе приближается къ содержанію окружности круга къ радіусу, и посему такъ же тѣмъ болѣе и упомянутое выраженіе приближается къ произведенію окружности на половину радіуса; слѣдовательно сіе произведеніе, которое есть предѣлъ выраженія, изъявляющаго всякой правильной вписанной многоугольникъ, по первому началу равно площади круга. Вотъ теперь ѳеорема, которой доказательство основано на второмъ началѣ.

Естьли вообразимъ, что кругъ и еллипсисъ имѣютъ общую ось, которую я положу большею осью еллипсиса, то всякой многоугольникъ вписанной въ кругѣ будетъ содержаться къ соотвѣтствующему многоугольнику вписанному въ еллипсисѣ, какъ большая ось къ меньшей оси еллипсиса; но чѣмъ болѣе число сторонъ сихъ многоугольниковъ увеличится, тѣмъ они болѣе, одинъ къ кругу, а другой къ еллипсису, приближатся, сохраняя всегда между собою тоже содержаніе; слѣдвательно по второму началу сіе непремѣнное содержаніе должно быть содержаніемъ и ихъ предѣловъ, сирѣчь круга и еллипсиса.

Вся трансцендентная Геометрія не въ иномъ чемъ состоитъ, какъ въ подобномъ употребленіи началъ нами изъясненныхъ. Такъ естьли требуется найти касательныя всѣхъ родовъ кривыхъ линій, ихъ самыя большія или меньшія абсциссы и ординаты, точки перегиба и возврата, развертающіяся кривыя линіи, точки кратныя и проч.; то чрезъ строенія весьма простыя можно показать, что сіи вопросы мо-

тутъ приведены быть къ сысканію посредствомъ уравненія кривой линіи предѣла содержанію между разностію двухъ смѣжныхъ абсциссъ и разностію соотвѣтствующихъ ординатъ. Сіи разности суть то, что *разностію абсциссы* и *разностію ординаты* называются; вообще *разность* перемѣннаго количества есть количество, на которое сіе перемѣнное когда либо прибавится или убавится. И такъ вопросъ, въ которой обращаются предъидущіе, долженъ изобразиться слѣдующимъ образомъ: Найти предѣлы содержаній между разностями перемѣнныхъ количествъ, коихъ содержаніе дано. Обратный сему вопросъ, въ которомъ требуется, чтобы поступить отъ предѣловъ содержаній между разностями перемѣнныхъ количествъ къ содержанію самыхъ сихъ количествъ, простирается до квадратуры кривыхъ линій, опредѣленія длины ихъ, центровъ тяжести, до тѣлъ происходящихъ отъ ихъ обращенія, поверьхностей оныхъ, центровъ тяжести, какъ сихъ тѣлъ такъ и ихъ поверьхностей, и проч.; такимъ образомъ, что естьли точныя опредѣленія всѣхъ сихъ предметовъ не возможны, то обратный вопросъ даетъ средство достаточно приближиться къ онымъ, какъ токмо въ самомъ употребленіи желать возможно. Дифференціальное и Интегральное Изчисленіе или прямой и обратной Способъ Флюксіоновъ не иное что за предметъ имѣютъ, какъ разрѣшеніе сихъ двухъ вопросовъ.

Нютонъ нашелъ сіи Изчисленія въ 1669 году. Однакожъ онѣ начали обращать на себя вниманіе Геометровъ не прежде какъ 1687 года. Лейбницъ и два брата Яковъ и Іоаннъ Бернулліи долженствуютъ быть почитаемы первыми, которые ихъ прославили многочисленнымъ употребленіемъ. въ 1690 году Яковъ Бернулліи употребилъ сіи Изчисленія при разрѣшеніи вопроса о кривой *изохронической линіи*, которой за нѣсколько до того лѣтъ предложенъ былъ Лейбницемъ, и потомъ самъ предложилъ другой вопросъ о *цѣпной линіи*, которой былъ разрѣшенъ его братомъ. Сей въ 1697 году обнародовалъ первой опытъ *изчисленія количествъ неопредѣленно-степенныхъ*, и въ томъ же самомъ году разрѣшивъ вопросъ о *брахистохронѣ*, или о линіи найскорѣйшаго ската, предложилъ его Геометрамъ. По прошествіи даннаго на разрѣшеніе сего вопроса времени показалося токмо четыре рѣшенія, коихъ творцы были Нютонъ, Лейбницъ, Яковъ Бернулліи и Марки Л'опиталь. (*) Сей послѣдній за годъ прежде издалъ на свѣтъ свою *Аналитику безконечно малыхъ количествъ*, гдѣ главныя приложенія Дифференціальнаго Изчисленія изложены весьма порядочно и ясно.

(*) Нютоново рѣшеніе было безъ имени; но Іоаннъ Бернулліи узналъ виновника онаго: tanquam, сказалъ онъ, ex ungue leonem.

Потомъ Геометры занималися многими другими вопросами, изъ коихъ мы здѣсь приведемъ токмо знатнѣйшіе. Таковъ есть вопросъ о *траекторіяхъ прямоугольныхъ*, коего общее рѣшеніе зависитъ отъ преизящной Лейбницевой ѳеоремы брать дифференціалъ подъ знакомъ. Таковы суть два другіе вопроса, къ роду брахистохрона относящіеся, а именно вопросъ о *изопериметрахъ*, которой Яковъ Бернуллій предложилъ публично брату своему, присоединяя къ вызову на рѣшеніе онаго обѣщаніе нѣкоторой суммы денегъ, и другой о *тѣлѣ наименьшаго сопротивленія*, котораго рѣшеніе безъ аналитики далъ Нютонъ, въ сочиненіи *Началъ*, напечатанномъ въ первой разъ 1687 года. Таковъ еще вопросъ о *кривыхъ тавтохроническихъ линіяхъ*. Исторія различныхъ рѣшеній данныхъ симъ вопросамъ съ того времени, о которомъ говоримъ, до временъ нашихъ, была бы весьма способна къ показанію попеременныхъ успѣховъ Аналитики.

Сей родъ единоборства между Геометрами ободрялъ ихъ усовершить орудіе побѣды, и съ тѣхъ поръ Интегральное Изчисленіе получило довольно важныя приращенія. Такъ въ 1702 году Іоаннъ Бернуллій показалъ намъ способъ брать интегралы соизмѣримыхъ дробей, и около того же почти времени съ успѣхомъ трудился надъ отдѣленіемъ перемѣнныхъ количествъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ содержащихся. Потомъ въ 1704 году появилось сочиненіе Нютоново о *квадратурѣ кривыхъ линій*; оное заключаетъ въ себѣ весьма изящные способы относить интегралы, поколику возможно, къ площадямъ коническихъ сѣченій, которую ѳеорію Котезъ привелъ въ большую простоту, показуя что сіи интегралы всегда можно привести къ логариѳмамъ и дугамъ круга. Котезъ умеръ очень молодъ, когда его книга подъ заглавіемъ, Harmonia menſurarum, въ 1722 году Робертомъ Смитомъ была издана. Сіе сочиненіе отъ Геометровъ, въ твердой части Европы обрѣтавшихся, было лучше принято нежели какъ сочиненіе Тейлора подъ заглавіемъ, Methodus incrementorum, которое вышло на свѣтъ за семь лѣтъ прежде. Сей ученый во многихъ письмахъ и книгахъ обиженъ несправедливо, чему по нещастію исторія Наукъ и Письменъ представляетъ слишкомъ многіе примѣры.

Чѣмъ болѣе великіе умы углублялися въ ѳеоріяхъ, о коихъ мы предъ симъ говорили, тѣмъ болѣе чувствовали надобность усовершить ѳеорію рядовъ, коя получила бытіе свое за многіе годы прежде эпохи открытія новыхъ Изчисленій. *Ариѳметика безконечныхъ количествъ* Валлисова, которая вышла на свѣтъ 1655 года, заключаетъ въ себѣ весьма изящныя статьи, къ сему предмету относящіяся, изъ коихъ мно-

тія въ скорѣ послѣ были усовершены Милордомъ Брункеромъ, чрезъ открытіе *дробей непрерывныхъ* прославившимся, такъ же Меркаторомъ и Яковомъ Григори. Въ то время какъ сіи новыя изобрѣтенія наиболѣе гремѣли, то есть въ 1669 году, Нютонъ изготовилъ всѣ нужныя матеріалы, которые послѣ употребилъ въ дѣло въ сочиненіи подъ заглавіемъ, Methodus fluxionum & ſerierum infinitarum, оконченномъ въ 1671 году. Сіе сочиненіе издано уже послѣ его смерти; не удовольствія, кои сей великій мужъ терпѣлъ долгое время при изданіи многочисленныхъ своихъ открытій, не позволили ему согласиться на прозьбы многихъ ученыхъ Геометровъ убѣждавшихъ его издать оное въ свѣтъ. Онъ въ 1711 году извлекъ изъ него свое сочиненіе Analyſis per aequationes numero terminorum infinitas, которое обнародовалъ съ тремя другими латинскими сочиненіями подъ заглавіемъ, De quadratura curvarum, Enumeratio linearum tertii ordinis, и Methodus differentialis, изъ коихъ первыя два изданы вторично. Цѣлое сочиненіе не прежде вышло чрезъ Кольсона, какъ въ 1736 году, которой при томъ издалъ оное не подлинникомъ, но переводомъ на Аглинскомъ языкѣ. Съ сего то переводу сдѣланъ былъ Бюффономъ въ 1740 году Французской переводъ, къ которому онъ присовокупилъ преизрядное историческое предисловіе.

Тѣже изъ матеріаловъ нами упомянутыхъ, кои наиболѣе относятся къ ѳеоріи рядовъ, суть: *формула, извѣстная подъ именемъ бинома Нютоновой, аналитической параллелограммъ, обратный способъ рядовъ, и способъ разрѣшать по приближенію числительныя уравненія.* Лейбницъ и Яковъ Бернуллій почти въ тоже время обогатили оную ѳеорію многими важными открытіями. Того же рода открытіе, предостойное примѣчанія, находится въ сочиненіи Тейлора, а именно его ѳеорема развлагать функціи въ безконечные ряды посредствомъ Дифференціальнаго Изчисленія. Моавръ сдѣлалъ употребленіе дифференціальному Нютонову Способу или Изчисленію конечныхъ разностей при сысканіи общаго члена такъ названныхъ имъ *рядовъ возвращающихся.* Онъ приложилъ такъ же сіе самое Изчисленіе къ ѳеоріи вѣроятностей, которой послѣ распространилъ предѣлы.

Приращенія науки зависятъ отъ скоротечнаго порожденія людей одаренныхъ творческимъ разумомъ, къ успѣшному оной усовершенію потребнымъ. Маѳематика пользуется симъ рѣдкимъ преимуществомъ назадъ тому болѣе столѣтія. За Декартомъ, Гугенсомъ. Робервалемъ, Ферматомъ, и другими въ скорѣ слѣдовали Нютонъ, Лейбницъ, Яковъ

и Іоаннъ Бернуллїи, и другїе бывшїе свидѣтелями порожденїю Геометровъ, сїи послѣднїя времена прославившихъ. Ихъ я здѣсь потщусь изчислить, не преходя однакожъ границъ, кои сему слову предписать я долженъ.

Ѳеорїя *условныхъ уравненїй*, которой первый опытъ издалъ Николай Бернуллїй въ сочиненїи своемъ о *траекторїяхъ прямоугольныхъ*, всего болѣе занимала Геометровъ, о коихъ мы говорить имѣемъ. Ейлеръ открывъ многїя изящныя ѳеоремы, относящїяся къ сей ѳеорїи, употребилъ оныя при сысканїи интеграловъ дифференцїальныхъ уравненїй, умножая ихъ на приличествующїе множители. Тогда не знали еще другихъ средствъ къ достиженїю сихъ интеграловъ, кромѣ отдѣленїя перемѣнныхъ количествъ; въ разсужденїи чего Іоаннъ и Николай Бернуллїи, Германъ, Графъ Рикати и самъ Ейлеръ учинили преизящныя изслѣдованїя. Сочиненїе Ейлерово, о которомъ настоитъ рѣчь, появилось въ 1740 году, въ книгѣ заключающей въ себѣ труды С. Петербургской Академїи Наукъ въ продолженїе 1734 и 1735 годовъ; за четыре года прежде того онъ издалъ свою Механику, въ которой учинилъ многїе приклады одной изъ своихъ ѳеоремъ, а именно той, которая относится къ взятїю интеграловъ однородныхъ функцїй. Фонтенъ во Францїи совершалъ тотъ же путь съ равнымъ успѣхомъ. Книга Академїи Наукъ на 1734 годъ заключаетъ въ себѣ его изящной способъ разрѣшать вопросъ о таутохроническихъ линїяхъ, которой способъ доказываетъ, что тогда уже онъ былъ на пути ко всѣмъ симъ открытїямъ. Однакожъ не прежде, какъ въ 1739 году, онъ представилъ Академїи ѳеоремы, о коихъ предъ симъ мы говорили, съ приложенїями объемлющими общую ѳеорїю дифференцїальныхъ уравненїй. Въ слѣдующїй годъ Клеро о томъ же предметѣ издалъ свое сочиненїе, которое ничего новаго въ себѣ не заключаетъ; но употребленїе, которое онъ почти въ тоже время сдѣлалъ условнымъ уравненїямъ въ ѳеорїи тѣлъ жидкихъ, и многїя другїя открытїя, которыя заключаетъ въ себѣ сочиненїе его о *фигурѣ земли*, изданное 1743 года, знаменуютъ человѣка творческимъ разумомъ одареннаго, которой послѣ толь важныя учинилъ услуги физической Астрономїи.

Ѳеорїя жидкихъ тѣлъ уже прїобрѣла весьма великїе успѣхи, когда была въ рукахъ Данїила Бернуллїя, котораго Гидродинамика показалась въ 1738 году. Сїе превосходное творенїе въ разсужденїи части маѳематической, есть сверьхъ того образецъ искуства носить себя въ

опытной физикѣ. Можно сказать тоже самое о многихъ другихъ сочиненіяхъ сего славнаго мужа, изъ коихъ многія обогатили собраніе сочиненій, отъ Академіи Наукъ награжденіемъ увѣнченныхъ.

Да позволено мнѣ будетъ здѣсь замѣтить, что величайшіе Физики каждаго вѣка, коимъ мы обязаны важнѣйшими въ разсужденіи пользы открытіями, были купно и глубочайшіе Геометры. Древніе писатели съ удивленіемъ говорятъ о изобрѣтеніяхъ Архимеда, которой три года защищалъ Сиракузы противу воинства Римскаго. Но зачемъ искать во временахъ отдаленныхъ доказательствъ истиннѣ, которой достаточныя и настоящія свидѣтельства имѣемъ предъ глазами? Не Галилею ли обязаны мы за большія зрительныя трубы и за первую мысль о маятникахъ? Не Гугенсъ ли учинилъ оными толикія услуги Часовому искуству? Торичелли, Декартъ и Пасхаль научили насъ строенію барометровъ. Нютонъ, коего славные надъ свѣтомъ опыты извѣстны всякому, есть изобрѣтатель телескоповъ, на отраженіи свѣта основанныхъ. Ейлеръ далъ намъ ахроматическія трубы. Я могъ бы привести здѣсь многіе другіе примѣры, есть ли бы не боялся сдѣлать съ лишкомъ длиннаго отступленія. Упражненіе въ трансцендентной математикѣ приуготовляетъ умъ къ глубокимъ размышленіямъ, придаетъ ему обширность и точность, и приучаетъ его слѣдовать за истинною не заблуждаясь въ самыхъ излучистыхъ лабиринѳахъ.

Подобныя безъ сомнѣнія размышленія побудили правительство требовать сего предварительнаго упражненія отъ молодыхъ людей, желающихъ вступить въ военные Инженеры и Піонеры, Артиллеристы и Навигаторы, законъ съ которымъ совершенно сообразуются въ училищахъ къ тому назначенныхъ. Изъ оныхъ вышло весьма великое число искусныхъ людей, которые примѣняя познанія свои къ Художествамъ, въ коихъ имѣютъ непрестанную надобность, могутъ много способствовать къ скорымъ успѣхамъ оныхъ. Но скажутъ, неужели полезныя Художества, для пріобрѣтенія успѣховъ, ожидали чтобы ими занимались люди Ученые? Нѣтъ безъ сомнѣнія, миліоны людей, въ продолженіе многихъ вѣковъ, истощевая почти всѣ возможныя соображенія, могутъ достигнуть наконецъ къ такому, отъ котораго зависитъ совершенство Художествъ; но слѣдуетъ ли изъ того, чтобы не было чрезвычайно полезно избавить Художниковъ отъ сихъ безполезныхъ опытовъ, предписавъ имъ вѣрныя правила, каковую услугу приведенные нами теперь Ученые мужи показали Художествамъ, коими они имѣли случай заниматься?

Ейлеръ открылъ путь, по коему шелъ исполинскими шагами. Въ 1744 году онъ издалъ сочиненіе свое о *изопериметрахъ*, заключающее въ себѣ общій способъ разрѣшать всѣ вопросы сего рода: уравненія, къ коимъ онъ доходитъ, суть тѣже самыя, что и уравненія, которыя долженствуютъ имѣть мѣсто и быть тожественны, дабы дифференціалъ какого нибудь порядка былъ точный; чрезъ сіе замѣчаніе онъ обогатилъ Интегральное Исчисленіе новою теоремою. Разныя сочиненія Ейлеровы показываютъ, что надъ наукою исчисленія онъ учинилъ глубокія размышленія; что было подтверждено *Введеніемъ въ Аналитику безконечныхъ количествъ*, и *Основаніями Дифференціальнаго Исчисленія*. Сіи превосходныя два творенія, изъ коихъ одно издалося въ 1748 году, а другое въ 1755, съ *Исчисленіемъ Интегральнымъ* изданнымъ въ 1768 году, составляютъ совершеннѣйшій курсъ ученія, каковый токмо мы имѣемъ въ семъ родѣ.

Условныя уравненія бываютъ между частными дифференціалами. Сіе я изъясню. Естьли вообразимъ себѣ функцію многихъ перемѣнныхъ величинъ и положимъ, что взятъ изъ нея дифференціалъ въ разсужденіи одной только перемѣнной величины, то получимъ понятіе о томъ, что *частнымъ дифференціаломъ* называется. Уравненіе же между частными дифференціалами есть уравненіе между многими перемѣнными величинами, функціею сихъ перемѣнныхъ и частными дифференціалами сея функціи. Множитель способный сдѣлать предложенный дифференціалъ пріемлющимъ интегралъ заключенъ въ подобномъ уравненіи, и взятіе интеграла всякаго дифференціальнаго уравненія зависитъ отъ сысканія величины, которая бы удовлетворяла условному уравненію; столь важнаго вопроса мы не умѣемъ еще рѣшить, какъ токмо въ нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ.

Большая часть физическихъ вопросовъ ведутъ къ уравненіямъ между частными дифференціалами; но естьли бы Геометры тутъ ограничилися токмо удовлетвореніемъ симъ уравненіямъ, то не разрѣшилибы вопроса. Напримѣръ, выраженіе силы ускорительной, потребное для *таутохронизма*, заключается въ уравненіи между частными дифференціалами; и удобно бы удовлетворить можно было сему уравненію во многихъ особенныхъ положеніяхъ о сопротивленіи среды; но сіе удовлетвореніе не было бы еще то, каковое требуется; надобно найти выраженіе силы, которое бы могло приличествовать ко всѣмъ возможнымъ положеніямъ; что непосредственно требуетъ, чтобы сіе выраже-

ніе заключало въ себѣ нѣкую произвольную функцію, въ которую бы скорость и перейденное пространство войти могли. И такъ вотъ новой родъ взятія интеграла, гдѣ произвольныя величины не суть постоянныя, но суть функціи перемѣнныхъ величинъ. Ейлеръ открылъ оное въ 1734 году, а Д'Аламбертъ въ 1747 году учинилъ ему изящнѣйшее приложеніе въ своихъ *Изслѣдованіяхъ о сотрясеніи струнъ*, и въ своихъ *Размышленіяхъ объ общей причинѣ вѣтровъ*. Но не прежде, какъ спустя 5 лѣтъ, по изданіи имъ своего *Опыта о новой ѳеоріи сопротивленія тѣлъ жидкихъ*, Геометры увидѣли, что рѣшенія, кои они до того почитали общими, въ самомъ дѣлѣ не были таковы, и Науки Физико-Маѳематическія совершенно перемѣнили видъ свой.

Тогда сіи новыя ѳеоріи устремили наипаче вниманіе Ейлера. Онъ сдѣлалъ примѣчаніе, которое открыло весьма обширное поле желающимъ прилагать Изчисленіе къ Наукамъ Физическимъ, а именно: ничто недолжно ограничивать всеобщности произвольныхъ функцій, кои входятъ въ полные интегралы уравненій между частными дифференціалами; онѣ должны заключать въ себѣ функціи неправильныя и прерывныя. Такъ напримѣръ въ вопросѣ о сотрясающихся струнахъ, начальная кривая линія можетъ быть не подвержена закону непрерывности, можетъ быть собраніе различныхъ кривыхъ линій. Геометры нечувствовали сначала всей справедливости Ейлерова примѣчанія; оно причинило сомнѣнія, кои настоящимъ образомъ были объявлены токмо учеными изслѣдованіями Лагранжа о *свойствѣ и распространеніи звона*. Сіи изслѣдованія находятся въ Туринскихъ Запискахъ, коихъ первая книга показалася въ 1759 году, и кои заключаютъ въ себѣ многія другія открытія, которыми сей Геометръ приобрѣлъ себѣ великую славу, усугубленную потомъ сочиненіями, въ 1764, 1766, 1772, 1774 и 1780 году отъ Академіи Наукъ награжденіемъ увѣнчанными и многими другими.

Въ приложеніи Интегральнаго Изчисленія къ уравненіямъ между частными дифференціалами есть дѣло весьма важное, чтобы опредѣлить произвольныя функціи по даннымъ условіямъ. Въ книгѣ Академіи Наукъ на 1771 годъ и въ VII Томѣ сочиненій чужестранныхъ Ученыхъ находятся изящныя сочиненія, въ коихъ доказывается, что сей родъ вопросовъ всегда можно сдѣлать зависящимъ отъ взятія интеграла уравненій между конечными разностями. Сія новая вѣтвь Интегральнаго Изчисленія достойна большаго усовершенствованія, по причинѣ употребленія ея въ ѳеоріи рядовъ и случайностей; и что Лапласъ, одинъ

изъ Геометровъ. коимъ мы обязаны за упомянутое открытіе, учинилъ съ великимъ успѣхомъ.

Чрезъ сей опытъ, сколь въ прочемъ ни несовершенный, можно судить, сколь подробная исторія успѣховъ Маѳематики отъ начала сего столѣтія достопримѣчательна, особливо естьли написана будетъ столь же искусною рукою, какъ и та, которой мы обязаны за исторію прошедшихъ вѣковъ (*). Тутъ увидѣли бы мы всѣ новыя ѳеоріи возникшія въ безсмертномъ твореніи *Маѳематическихъ Началъ Естественной Философіи*, пріобрѣтавтія въ продолженіе почти пятидесяти лѣтъ токмо нечувствительные успѣхи, и растущія потомъ съ скоротечностію, которая бы удивила, естьли бы щастливѣйшій случай не произвелъ въ одно время многихъ сихъ рѣдкихъ мужей, которые присоединяя къ наивеличайшей глубокомысленности неутомимую ревность, не могли быть остановлены никакими величайшими препонами.

Система міра есть одна изъ сихъ ѳеорій, которая по важности своей наипаче заслуживала ихъ занимать собою. Когда Академія въ 1740 году предложила съ присовокупленіемъ награжденія причину прилива и отлива морскаго, она получила три превосходныя сочиненія Маклорена, Даніила Бернуллія и Ейлера, которыя единогласно доказали, что сіе явленіе зависитъ отъ взаимнаго дѣйствія солнца, земли и луны. Въ скорѣ потомъ вопросъ о опредѣленіи взаимнаго дѣйствія однѣхъ планетъ на другія былъ разсматриваемъ; вопрошалося найти кривую линію, которую три тѣла, коихъ положенія, составы и скорости извѣстны, описать долженствуютъ отъ взаимнаго ихъ притяженія, коего законъ предположенъ быть въ прямомъ содержаніи составовъ и обратномъ квадратовъ разстояній. Клеро, Д'Аламбертъ и Ейлеръ предложивъ себѣ сей вопросъ, извѣстный подъ именемъ *вопроса трехъ тѣлъ*, достигли въ 1747 году всѣ трое къ одинаковымъ заключеніямъ. И такъ ѳеоріи планетъ и луны (сего издревлѣ толь непокорнаго, такъ сказать, свѣтила) были усовершены, и нынѣ онѣ не болѣе, какъ весьма на малое количество, отступаютъ отъ того пути, которой сіи Геометры и ихъ

(*) Подъ сею искусною рукою разумѣется здѣсь рука г. Монтукла, о маѳематической исторіи котораго можно получить понятіе изъ Академическихъ извѣстій, гдѣ находится переводъ почти всего перваго тома, исключая тѣхъ мѣстъ, которыя требуютъ фигуръ.

преемники Лагранжъ и Лапласъ имъ преднachерtaли. Но слава, которую Д'Аламбертъ ни съ Ейлеромъ ни съ Клеро не разделяетъ, есть та, что онъ первой разрешилъ вопросъ о *возвратномъ движенiи равноденствiй*; изъ сихъ его изследованiй выходитъ, что притяженiе есть паки причина сего чуднаго въ оси земной движенiя, и съ техъ поръ оное почитается какъ одинъ изъ законовъ естества. Сiи Геометры потщились потомъ приложить различныя свои решенiя вопроса трехъ телъ къ теорiи спутниковъ и кометъ, къ вопросамъ, которые после были разсматриваемы Лагранжемъ и Лапласомъ еще съ большимъ успехомъ. Способы изчисленiя гораздо въ большую всеобщность приведенные въ нихъ породили предчувствiе о *трудностяхъ*, кои весьма нужно было разрешить, дабы не оставить никакого сомненiя въ изъясненiи явленiй. И теперь то можно сказать, что вся система мiра приведена въ вопросы чистой Аналитики, и что, естьли следствiя теорiи всеобщаго тяготенiя представляютъ небесныя движенiя съ тою же точностiю, какъ будто бы онe даны были наиисправнейшими наблюденiями, мы обязаны за то успехамъ, Интегральнымъ Изчисленiемъ и вообще Аналитикою въ сiи последнiя времена прiобретеннымъ.

ПРЕДЪУВѢДОМЛЕНІЕ

Отъ издателя сего сочиненія на Россійскомъ языкѣ.

Присовокупленія, имъ къ сей первой книгѣ сдѣланныя, суть тројакія: однѣ, заключенныя въ прямыя скобки, какъ [], и находящіяся въ текстѣ самомъ, суть или промежуточныя разсужденія, авторомъ за краткостію выпущенныя, или самоближайшія слѣдствія, изъ заключеній его извлеченныя; другія, напечатанныя маленькими буквами въ видѣ примѣчаній и составляющія половину, естьли не больше, всея книги, суть или поясненія и дальнѣйшія слѣдствія, или поправленія и совсѣмъ новыя приращенія предлагаемыхъ авторомъ ѳеорій; и наконецъ третьи, послѣдующія за сею книгою подъ заглавіемъ *прибавленій* къ оной, суть или предварительныя для нѣкоторыхъ статей познанія или пополненія къ совершенству сочиненія служащія, которыя издатель по причинѣ разныхъ должностей, имъ по службѣ отправляемыхъ, не имѣлъ довольнаго времени, дабы помѣстить въ самой книгѣ.

Отъ присовокупленій напечатанныхъ въ видѣ примѣчаній маленькими буквами, какъ и отъ тѣхъ, кои послѣдуютъ за сею книгою подъ заглавіемъ прибавленій къ оной, произошли сверьхъ авторовыхъ другіе чертежи; почему, для отличія однихъ отъ другихъ, нумера чертежей авторовыхъ, принадлежащихъ къ тексту, означены Римскими знаками, а чертежей издателевыхъ, принадлежащихъ къ примѣчаніямъ и прибавленіямъ, Арабскими. Между тѣмъ сей разпорядокъ не препятствовалъ издателю употреблять и въ примѣчаніяхъ чертежи къ тексту принадлежащіе,

когда надобность не требовала дѣлать новыхъ; и потому для читателя не должно казаться страннымъ, когда въ примѣчанiяхъ найдетъ ссылки на сiи послѣднiе къ тексту принадлежащiе чертежи.

Издатель желая доставить упражняющимся возможное удобство или для вящшаго приумноженiя сего сочиненiя, или для дѣланiя на него еще какихъ либо примѣчанiй, употребилъ старанiе напечатать каждую статью такъ, что бы къ ней, безъ помѣшательства другой статьѣ, можно было прибавить по изволенiю бѣлой бумаги; что въ прочемъ не болѣе, какъ листа на два, увеличило книгу.

Росписаніе предметовъ содержащихся въ семъ введеніи въ Дифференціальное и Интегральное Изчисленіе.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Приложеніе Алгебры къ Геометріи.

ГЛАВА II.

О способѣ неопредѣленныхъ предстоящихъ.

ГЛАВА III.

О способѣ разностей.

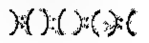
ГЛАВА IV.

О способѣ древнихъ Геометровъ, извѣстномъ подъ имянемъ Способа Предѣловъ.

ВЪ примѣчанiи, кЪ сему члену относящемся, показано какЪ проводить касательную кЪ циклоидѣ прямо, безЪ посредства предложенной для сего авторомЪ леммы; потомЪ изЪяснено происхожденiе оной кривой по способу Ейлерову, и оттуда произведено уравненiе ея; наконецЪ то же самое сдѣлано вЪ разсужденiи эпициклоиды и гипоциклоиды.

ВЪ примѣчанiи, кЪ сему члену относящемся, сказано сначала о уравненiи логариѳмической спирали вЪ конечныхЪ величинахЪ; что авторомЪ, нашедшимЪ вЪ семЪ членѣ дифференцiальное для оной кривой уравненiе, отнесено было кЪ 217му члену; потомЪ предложено о опредѣленiи касательныхЪ, какЪ и асимптотЪ, вЪ тѣхЪ кривыхЪ линiяхЪ, коихЪ свойство можетЪ изобразиться чрезЪ уравненiе между радiусомЪ векторомЪ и угломЪ онымЪ сЪ непремѣнною линiею составляемымЪ; наконецЪ приложено сiе кЪ аналитическому выводу того правила для проведенiя кЪ обыкновенной эпициклоидѣ касательной, кЪ которому достигЪ ДекартЪ синтетически.

По изЪясненiи вЪ примѣчанiи, кЪ 152 члену относящемся, частности сего другаго вопроса о касательныхЪ, сдѣлано вЪ последующихЪ примѣчанiяхЪ употребленiе при опредѣленiи касательныхЪ, какЪ и асимптотЪ, вЪ упомянутыхЪ кривыхЪ предЪидущему способу, изЪясненному вЪ примѣчанiи, кЪ 151 му члену относящемся, сЪ распространенiемЪ спирали Архимедовой кЪ спиралямЪ гиперболической, параболической и логариѳмической, такЪ же квадратрицы Диностратовой кЪ квадратрицѣ Чиргаузеновой.



мспростѣйшемъ видѣ; и потому, что бы съ лишкомъ не увеличить сего росписанія, предоставляется самому читателю замѣтить 12ть статей, оное составляющихъ.

Приложеніе обратнаго способа предѣловъ къ Геометріи:

Во второмъ примѣчаніи, къ 183му члену относящемся, изложена формула служащая къ опредѣленію площади тѣхъ кривыхъ линій, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки; потомъ въ примѣчаніи, къ 184му члену относящемся, предложено, въ поясненіе изложеннаго путь авторомъ, о площади коническихъ сѣченій съ заключеніемъ, что всѣ тѣ интегралы, которые къ квадратурѣ оныхъ кривыхъ линій приведены быть могутъ, всегда опредѣляются или точно или чрезъ логариѳмы и дуги круга, и присовокупленіемъ о квадратурѣ логариѳмики, обыкновенной циклоиды и эпициклоиды, такъ же о квадратурѣ конхоиды и циссоиды двумя образами, и о квадратурѣ трехъ спиралей.

Въ примѣчаніи, къ 185му члену относящемся, изложена формула служащая къ опредѣленію длины тѣхъ кривыхъ линій, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки; потомъ въ примѣчаніи, къ 186му члену относящемся, предложено о длинѣ коническихъ сѣченій, съ изъясненіемъ тѣхъ случаевъ, въ коихъ сумма или разность двухъ дугъ сихъ кривыхъ линій есть длина прямою измѣряемая, и присовокупленіемъ о длинѣ логариѳмики и обыкновенной эпициклоиды, показующемъ двумя образами, что сія послѣдняя взятая за кривую развертающуюся даетъ для кривой развертанія эпициклоиду же подобную первой, но превратное въ разсужденіи ея положеніе имѣющую, и сверьхъ того о длинѣ трехъ спиралей.

Въ первомъ примѣчаніи, къ сему члену относящемся, изложена формула служащая къ опредѣленію поверьхности тѣхъ тѣлъ, кои происходятъ отъ обращенія кривыхъ линій имѣющихъ ординаты изъ одной точки выходящія; потомъ въ другомъ предложено, въ пополненіе изложеннаго авторомъ, о измѣреніи поверьхностей еллипсоида и иперболоида, съ присовокупленіемъ, въ поясненіе упомяну-

той формулы, о поверхности параболоида произведеннаго параболою отнесенною къ фокусу.

О измѣреніи толщинъ тѣлъ вращенія. - членъ 188.

Въ первомъ примѣчаніи, къ сему члену относящемся, изложена формула служащая къ опредѣленію толщины тѣхъ тѣлъ, кои происходятъ отъ обращенія кривыхъ линій имѣющихъ ординаты изъ одной точки выходящія; потомъ въ другомъ предложено, въ поясненіе сей формулы, о толщинѣ параболоида произведеннаго параболою отнесенною къ фокусу.

ГЛАВА V.

Употребленіе способа предѣловъ при доказательствѣ началъ Механики.

О центрѣ тяжести. - - - —— 189—193.

Въ примѣчаніи, къ 191му члену относящемся, предложено, какъ слѣдствіе, доказательство Гульдинову правилу о сысканіи поверхностей и толщинъ тѣлъ вращенія чрезъ посредство центра тяжести; потомъ въ другомъ, къ тому же члену относящемся, изложены формулы для опредѣленія центра тяжести въ тѣхъ кривыхъ линіяхъ и тѣлахъ, отъ нихъ происходящихъ, у коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки; наконецъ въ примѣчаніи, къ 193му члену относящемся, предложено простѣйшее средство находить интегралъ изображающій моментъ дуги параболы въ разсужденіи оси ординатамъ параллельной.

О движеніи ускоренномъ или укосненномъ —— 194—199.

Въ примѣчаніяхъ, къ 195 и 196му члену относящихся, предложено о движеніи равноускоренномъ и о другомъ простѣйшемъ выводѣ общихъ формулъ для движенія перемѣннаго, съ подлиннымъ понятіемъ, которое о силѣ ускорительной имѣть надлежитъ; потомъ въ примѣчаніи, къ 199му члену относящемся, въ поясненіе сихъ формулъ, присовокупленъ одинъ вопросъ, ведущій къ достопримѣчательному заключенію.

Тѣло движущееся съ нѣкоторою скоростію, совращается съ своего направленія нѣкоторою силою побуждающею его къ центру; вопрошается найти свойство криволинейнаго пути, которой оное тѣло описать долженствуетъ. - - - членъ 200—204.

Въ примѣчаніи, къ 200му члену относящемся, предложение о брошенномъ тѣлѣ съ выводомъ обыкновенныхъ правилъ Баллистики; потомъ въ примѣчаніи, къ 204му члену относящемся, произведено, какъ слѣдствіе, что въ случаѣ движенія тѣла по коническому сѣченію, средоточная сила должна перемѣняться въ обратномъ содержаніи квадратовъ разстояній тѣла до средоточія.

Какая бы средоточная сила ни была, площади описуемыя радіусомъ векторомъ всегда пропорціональны времени. - - - - —— 205—207.

Естьли средоточная сила перемѣняется въ обратномъ содержаніи квадратовъ разстояній, то тѣло непосредственно опишетъ коническое сѣченіе. —— 208—210.

Небесныя тѣла описали бы еллипсисы, естьли бы, кромѣ взаимнаго дѣйствія солнца и планеты, иными силами движеніе ихъ не возмущалося. —— 211—212.

Въ примѣчаніи, къ 211му члену относящемся, по исправленіи найденной авторомъ формулы для цѣлаго времени обращенія планеты, произведено, какъ слѣдствіе, извѣстное содержаніе составовъ и плотностей планетъ; потомъ въ примѣчаніи къ 212му члену относящемся, по исправлении авторовой формулы выведенной для содержанія диференціаловъ средней и истинной аномаліи, предложено самымъ простѣйшимъ образомъ, какъ находить среднюю аномалію по истинной, и обратно истинную по средней, сирѣчь предложено полное рѣшение Кеплеровой задачи, съ показаніемъ, когда бываетъ уравненіе орбиты наибольшее, и присовокупленіемъ о параболическомъ движеніи кометъ.

О средоточнобѣжной силѣ тѣла описывающаго какую нибудь кривую линію. - - —— 213

ВВЕДЕНІЕ

ВЪ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ и ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Приложеніе Алгебры къ Геометріи.

Декартъ приложивъ Алгебру къ Геометріи, разпространилъ и облегчилъ способъ, коимъ разрѣшаются вопросы: все обратилось во изобрѣтеніе уравненій. И какъ Геометрія для сего представляетъ намъ токмо треугольники подобные и прямоугольные, то дѣло теперь не въ иномъ чемъ состоитъ, какъ въ составленіи сихъ треугольниковъ, чрезъ посредство нѣкоего простаго геометрическаго строенія, назначаемаго свойствомъ вопроса.

О количествахъ получившихъ бытіе свое отъ круга, каковы суть синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ.

(1) Мы начнемъ приложеніемъ сихъ началъ ко изслѣдованію количествъ, которыя получили бытіе свое отъ круга. Во первыхъ есть ли въ круговой линеи AMBm (черт. 1) протянется діаметръ AB и перпендикулярныя къ сему діаметру прямыя MPm, NQn, равное отстояніе отъ центра C имѣющія; то по свойству кривой линеи части оныхъ прямыхъ PM, Pm, QN, Qn, называемыя

ординаты, *будутъ* равны между собою. Сіи ординаты имѣютъ не одинаковое направленіе; почему для отличія, когда онѣ простираются въ противныя стороны, Геометры ихъ сопровождаютъ разными знаками: когда согласятся ординаты PM, QN сопроводить знакомъ +, то ординатамъ Pm, Qn надлежитъ придать знакъ —; равнымъ образомъ когда изъ двухъ отрѣзковъ CP, CQ, одинъ CP возмется положительно, другой CQ долженъ быть взятъ отрицательно. Но остается изслѣдовать, можемъ ли мы, принявъ сіе, чрезъ оныя линеи представить и геометрически построить всѣ корни уравненія кривой линеи.

(2) Протянувъ CM и назвавъ радіусъ буквою r, CP буквою x и PM буквою y, изъ прямоугольнаго треугольника CPM я получаю $y^2 = r^2 - x^2$, и оттуда $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Слѣдовательно положительной величинѣ количества x соотвѣтствуютъ двѣ равныя между собою ординаты PM, Pm, изъ коихъ одна положительная, а другая отрицательная; равнымъ образомъ и отрицательной величинѣ количества x соотвѣтствуютъ двѣ другія ординаты QN, Qn, равныя какъ между собою, такъ и первымъ, и изъ коихъ одна положительная, а другая отрицательная. И такъ всѣ свойства выведенныя изъ уравненія кривой линеи точно излагаются чрезъ предъидущее строеніе.

(3) Естьли радіусъ возмется за единицу и дуга AM означится буквою m, то ордината PM будетъ *синусъ* сей дуги, а отрѣзокъ CP *косинусъ* ея. Геометры согласилися представлять синусъ дуги m чрезъ fin. m, а косинусъ ея чрезъ cof. m; и послѣ сего уравненіе кривой линеи приемлетъ сей другой видъ: $\text{fin. } m^2 + \text{cof. } m^2 = 1$.

(4) Чрезъ центръ C я протяну DCd перпендикулярно къ AB; и какъ сіи два діаметра раздѣляютъ окружность на четыре равныя части, то дуга DM будетъ $= 90^\circ - m$; она называется *дополненіемъ* дуги AM и имѣетъ синусомъ перпендикуляръ Mq на CD опущенный, которой равенъ $\text{CP} = \text{cof. } m$. Естьли сверьхъ того чрезъ точку M протянется TMt перпендикулярно къ радіусу CM, то MT будетъ *тангенсъ* дуги m, которой изъявляется чрезъ tang. m, и Mt тангенсъ дополненія

или *котангенсъ* ея, которой изображается чрезъ cot. m. Здѣсь подобные треугольники TMC, MPC даютъ CP: PM = CM: MT = tang. $m = \frac{\text{fin. } m}{\text{cof. } m}$; такъ же изъ подобныхъ треугольниковъ tmC, MqC произойдетъ Cq: qM = CM: Mt = cot. $m = \frac{\text{cof. } m}{\text{fin. } m}$. [Откуда слѣдуетъ, что tang. m. cot. $m = 1$, что tang. $m = \frac{1}{\text{cot. } m}$ и что cot. $m = \frac{1}{\text{tang. } m}$].

(5) Я означу чрезъ π содержанïе полуокружности къ радïусу, или самую полуокружность, коея радïусъ взятъ за единицу, и изъ предложеннаго выше удобно будетъ произвести, что, когда $m = 0$, fin. $m = 0$ и cof. $m = 1$, что fin. $\frac{1}{2}\pi = 1$, cof $\frac{1}{2}\pi = 0$, fin. $\pi = 0$, cof. $\pi = -1$, fin $\frac{3}{2}\pi = -1$, cof. $\frac{3}{2}\pi = 0$, fin. $2\pi = 0$, cof. $2\pi = 1$, и что

$$\text{fin.} \left(\tfrac{1}{2}\pi \pm m\right) = + \text{cof.}\, m,\ \text{cof.} \left(\tfrac{1}{2}\pi \pm m\right) = \mp \text{fin.}\, m,$$
$$\text{fin.} \left(\pi \pm m\right) = \mp \text{fin.}\, m,\ \text{cof.} \left(\pi \pm m\right) = - \text{cof.}\, m,$$
$$\text{fin.} \left(\tfrac{3}{2}\pi \pm m\right) = - \text{cof.}\, m,\ \text{cof.} \left(\tfrac{3}{2}\pi \pm m\right) = \pm \text{fin.}\, m,$$
$$\text{fin.} \left(2\pi \pm m\right) = \pm \text{fin.}\, m,\ \text{cof.} \left(2\pi \pm m\right) = + \text{cof.}\, m.$$

Всѣ сïи формулы заключаются въ другихъ паче всеобщихъ, каковы суть слѣдующïя, гдѣ m и n суть два какïе нибудь угла, изъ коихъ $m > n$:

$$\text{fin.} \left(m \pm n\right) = \text{fin.}\, m.\, \text{cof.}\, n \pm \text{cof.}\, m.\, \text{fin.}\, n,$$
$$\text{cof.} \left(m \pm n\right) = \text{cof.}\, m.\, \text{cof.}\, n \mp \text{fin.}\, m.\, \text{fin.}\, n.$$

Мы въ краткихъ словахъ приведемъ здѣсь доказательство симъ формуламъ.

(6) Да будутъ чрезъ AM и AN (черт. II) представлены двѣ дуги m и n, и да протянутся изъ центра C радïусы CA, CM, CN и на CA, CN да опустятся перпендикуляры MP, NQ, Mm. По причинѣ подобныхъ треугольниковъ CQN, CPR, получишь cof. n : fin. n = cof. m : PR $= \frac{\text{fin. } n}{\text{cof. } n}$. cof. m; слѣдовательно MR = fin. $m + \frac{\text{fin. } n}{\text{cof. } n}$ cof. m. Потомъ два другïе подобные треугольника NQC, RmM даютъ 1 : cof. n = fin. $m + \frac{\text{fin. } n}{\text{cof. } n}$ cof. m : fin $(m + n)$ = fin. m. cof. n + cof. m. fin. n.

Треугольники CQN, MPn, которыхъ стороны взаимно перпендикулярныя, суть подобные, и потому даютъ cof. n : fin. n

$= \sin.m : Pn = \frac{\sin.n}{\cos.n}.\sin.m$; слѣдовательно $Cn = \cos.m - \frac{\sin.n}{\cos.n}.\sin.m$. Потомъ треугольники CQN, Cmn даютъ $1 : \cos.n = \cos.m - \frac{\sin.n}{\cos.n}.\sin.m : \cos.(m+n) = \cos.m.\cos.n - \sin.m.\sin.n$.

Чтобы доказать двѣ другія формулы, представимъ чрезъ NM большую дугу m, а чрезъ AN меньшую; тогда AM будетъ равна разности $m - n$. Подобные треугольники CQN, Cmn даютъ $\cos.n : \sin.n = \cos.m.mn = \frac{\sin.n}{\cos.n}.\cos.m$; слѣдовательно $Mn = \sin.m - \frac{\sin.n}{\cos.n}.\cos.m$; и по причинѣ подобныхъ треугольниковъ CQN, MPn, будетъ $1 : \cos.n = \sin.m - \frac{\sin.n}{\cos.n}.\cos.m : \sin(m-n) = \sin.m.\cos.n - \cos.m.\sin.n$.

Подобные треугольники NQC, RmM даютъ $\cos.n : \sin.n = \sin.m : mR = \frac{\sin.n}{\cos.n}.\sin.m$; слѣдовательно $CR = \cos.m + \frac{\sin.n}{\cos.n}.\sin.m$; и по причинѣ двухъ другихъ подобныхъ треугольниковъ CQN, CPR, будетъ $1 : \cos.n = \cos.m + \frac{\sin.n}{\cos.n}\sin.m : \cos.(m-n) = \cos.m.\cos.n + \sin.m.\sin.n$. (*)

(7) Совокупляя во едино сіи два уравненія

$$\sin.(m+n) = \sin.m.\cos.n + \cos.m.\sin.n;$$
$$\sin.(m-n) = \sin.m.\cos.n - \cos.m.\sin.n,$$

и отнимая второе отъ перваго, получимъ

$$2\sin.m.\cos.n = \sin.(m+n) + \sin.(m-n);$$
$$2\cos.m.\sin.n = \sin.(m+n) - \sin(m-n).$$

Поступивъ такъ же съ двумя другими уравненіями, будемъ имѣть еще

$$2\cos.m.\cos.n = \cos.(m+n) + \cos.(m-n),$$
$$2\sin.m.\sin.n = \cos.(m-n) - \cos.(m+n).$$

(8) Изъ двухъ уравненій

$$\sin.(m+n) = \sin.m.\cos.n + \cos.m.\sin.n,$$
$$\cos.(m+n) = \cos.m.\cos.n - \sin.m.\sin.n,$$

(*) Гораздо кратче и легче докажутся сіи формулы, когда меньшая дуга отъ конца большей положится на окружности по ту и другую сторону, и произшедшая отъ того двойная дуга стянется хордою; словомъ такъ, какъ сдѣлалъ Г. Безу со многими другими писателями.

дѣлая $m = n$, имѣемъ

$$\sin. 2n = 2 \sin. n . \cos. n \;,\; \cos. 2n = \cos. n^2 - \sin. n^2$$
$$= 2 . \cos. n^2 - 1 \;,$$

$m = 2n$,

$$\sin. 3n = \sin. 2n . \cos. n + \cos. 2n . \sin. n = 4 \sin. n . \cos. n^2$$
$$- \sin. n = 3 \sin. n - 4 \sin. n^3 \;,\; \cos. 3n = \cos. 2n . \cos. n$$
$$- \sin. 2n . \sin n = 4 \cos. n^3 - 3 \cos. n \;,$$

$m = 3n$,

$$\sin. 4n = \sin. 3n . \cos. n + \cos. 3n . \sin. n = - 4 \cos. n . \sin. n^3$$
$$+ 4 \sin. n . \cos. n^3 = \cos. n (4 \sin. n - 8 \sin. n^3) \;,$$
$$\cos. 4n = \cos. 3n . \cos. n - \sin. 3n . \sin. n = 8 \cos. n^4 -$$
$$8 \cos. n^2 + 1 = 8 \sin. n^4 + 8 \cos. n^2 - 7 \;,$$

и такъ далѣе. Откуда удобно будетъ сочинить слѣдующія двѣ таблички, коимъ мы частое будемъ дѣлать употребленіе въ интегральномъ изчисленіи:

$$2 \sin. n^2 = 1 - \cos. 2n,$$
$$4 \sin n^3 = 3 \sin. n - \sin. 3n,$$
$$8 \sin. n^4 = 3 - 4 \cos. 2n + \cos. 4n,$$
$$16 \sin. n^5 = 10 \sin. n - 5 \sin. 3n + \sin. 5n,$$
$$32 \sin. n^6 = 10 - 15 \cos. 2n + 6 \cos. 4n - \cos. 6n,$$

и такъ далѣе.

$$2 \cos. n^2 = 1 + \cos. 2n,$$
$$4 \cos n^3 = 3 \cos. n + \cos. 3n,$$
$$8 \cos. n^4 = 3 + 4 \cos. 2n + \cos. 4n,$$
$$16 \cos. n^5 = 10 \cos. n + 5 \cos. 3n + \cos. 5n,$$
$$32 \cos. n^6 = 10 + 15 \cos. 2n + 6 \cos. 4n + \cos. 6n,$$

и такъ далѣе. (*)

(*) Положивъ $2n = a$, изъ перваго уравненія первой таблички получишь $2 \sin \frac{a^2}{2} = 1 - \cos a$, и $\sin. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos. a}{2}}$; изъ перваго же уравненія второй таблички найдешь $2 \cos. \frac{a^2}{2} = 1 + \cos. a$, и $\cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos. a}{2}}$, и по-

(9) Не будетъ труднѣе составить подобныя таблички для тангенсовъ и котангенсовъ чрезъ посредство слѣдующихъ ѳеоремъ: $\text{tang.}\,(m+n)=\frac{\text{sin. }m\,.\,\text{cos. }n+\text{cos. }m\,.\,\text{sin. }n}{\text{cos. }m\,.\,\text{cos. }n-\text{sin. }m\,.\,\text{sin. }n}=\frac{\text{tang. }m+\text{tang. }n}{1-\text{tang. }m\,.\,\text{tang. }n}$,

$\text{cot.}\,(m+n)=\frac{\text{cos. }m\,.\,\text{cos. }n-\text{sin. }m\,.\,\text{sin. }n}{\text{sin. }m\,.\,\text{cos. }n+\text{cos. }m\,.\,\text{sin. }n}=\frac{\text{cot. }m\,.\,\text{cot. }n-1}{\text{cot. }m+\text{cot. }n}$. [Изъ коихъ первая доказывается чрезъ раздѣленіе числителя и знаменателя предшествующей дроби на cos. m. cos. n, а другая чрезъ раздѣленіе числителя и знаменателя таковой дроби на sin. m. sin. n].

Такимъ же образомъ докажется, что

$\text{tang.}\,(m-n)=\frac{\text{tang. }m-\text{tang. }n}{1+\text{tang. }m\,.\,\text{tang. }n}$ и $\text{cot.}\,(m-n)=\frac{\text{cot. }m\,.\,\text{cot. }n+1}{\text{cot. }n-\text{cot. }m}$.

Положимъ $m+n=\alpha$, $m-n=\beta$; имѣемъ изъ того $m=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $n=\frac{\alpha-\beta}{2}$, и вставливая сіи величины въ формулы члена 7 го, получимъ

$$\text{sin. }\alpha+\text{sin. }\beta=2\,\text{sin.}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,\text{cos.}\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\text{sin. }\alpha-\text{sin. }\beta=2\,\text{cos.}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sin.}\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\text{cos. }\alpha+\text{cos. }\beta=2\,\text{cos.}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,\text{cos.}\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\text{cos. }\beta-\text{cos. }\alpha=2\,\text{sin.}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sin.}\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

И посему еще будемъ имѣть

$$\frac{\text{sin. }\alpha+\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\alpha+\text{cos. }\beta}=\text{tang.}\tfrac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\text{sin. }\alpha-\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\alpha-\text{cos. }\beta}=-\text{cot.}\tfrac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\frac{\text{sin. }\alpha-\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\alpha+\text{cos. }\beta}=\text{tang.}\tfrac{\alpha-\beta}{2},\quad \frac{\text{sin. }\alpha+\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\alpha-\text{cos. }\beta}=-\text{cot.}\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\left[\frac{\text{sin. }\alpha+\text{sin. }\beta}{\text{sin. }\alpha-\text{sin. }\beta}=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},\ \frac{\text{cos. }\alpha+\text{cos. }\beta}{\text{cos. }\beta-\text{cos. }\alpha}=\frac{\text{cot.}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right]$$

сему еще будешь имѣть

$$\text{tang.}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{cos. }a}{1+\text{cos. }a}}=\sqrt{\frac{(1-\text{cos. }a)(1+\text{cos. }a)}{(1+\text{cos. }a)^2}}=\frac{\text{sin. }a}{1+\text{cos. }a},$$

$$\text{и cot.}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\text{cos. }a}{1-\text{cos. }a}}=\frac{\text{sin. }a}{1-\text{cos. }a}.$$

Изчисленіе вообще какого нибудь треугольника.

(10) Мы возмемъ для другаго примѣра приложенія Алгебры къ Геометріи изчисленіе какого нибудь треугольника ABC (черт. III). Все строеніе тутъ состоитъ токмо въ опущеніи изъ одного угла на противулежащую оному сторону перпендикуляра CP, и въ составленіи чрезъ то двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ APC, BPC. Потомъ въ треугольникѣ надлежитъ разсматривать три стороны, три угла, периметръ и площадь его. Я означу три стороны AC, CB, AB чрезъ a, b, c, периметръ чрезъ p, перпендикуляръ CP чрезъ q и площадь $\frac{cq}{2}$ чрезъ s; я означу такъ же уголъ A чрезъ α, уголъ B чрезъ β, и потому что уголъ $C = 180^\circ - \alpha - \beta$, будетъ $\sin. C = \sin.(\alpha + \beta)$, $\cos. C = -\cos.(\alpha + \beta)$.

(11). Означивъ одинъ изъ отрѣзковъ AP чрезъ x, будетъ другой $PB = c - x$, и два упомянутые прямоугольные треугольника намъ дадутъ $a^2 = x^2 + q^2$, $b^2 = c^2 - 2cx + x^2 + q^2$; откуда выдетъ $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$,
[$q^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2 = \frac{4a^2c^2 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{4c^2}$] и
$4c^2q^2 = 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = ((a+b)^2 - c^2)(-(a-b)^2 + c^2) = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.
[По сему найдется площадь $s = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}$ $= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - a\right)}$].

(12) Прямоугольной треугольникъ CPA даетъ $x = a \cos.\alpha$; $q = a \sin.\alpha$ и, попричинѣ что $\frac{ac \sin.\alpha}{2} = s$, $c = \frac{2s}{a \sin.\alpha}$. Потомъ найдешь

$$b^2 = c^2 - 2cx + x^2 + q^2 = \frac{4s^2}{a^2 \sin.\alpha^2} - \frac{4s \cos.\alpha}{\sin.\alpha} + a^2,$$

$$b^2 = (p - a - c)^2 = p^2 - 2\left(a + \frac{2s}{a \sin.\alpha}\right)p + a^2 + \frac{4s}{\sin\alpha} + \frac{4s^2}{a^2 \sin.\alpha^2};$$

откуда, сравнивая двѣ величины b^2, получишь уравненіе

$$2pa^2 - \left(p^2 + 4s\frac{1 + \cos.\alpha}{\sin.\alpha}\right)a = -\frac{4ps}{\sin.\alpha}.$$

Изчисляя такимъ же образомъ треугольникъ CPB, найдешь $c = \frac{2s}{b \sin\beta}$ и уравненіе $2pb^2 - (p^2 + 4s\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta})b = -\frac{4ps}{\sin\beta}$.

И такъ когда будутъ даны одинъ изъ двухъ угловъ α или β, периметръ и площадь, то удобно найдутся три стороны и два другіе угла (*). Вычисленіе не будетъ труднѣе, когда даны будутъ вмѣсто того два угла α и β съ однимъ изъ сихъ двухъ количествъ, периметромъ или площадью; ибо дабы имѣть a и b, довлѣетъ токмо изъ предъидущихъ двухъ уравненій изключить p или s и произшедшее уравненіе соединить съ симъ $a \sin\alpha = b \sin\beta$. (**)

(13) Въ первое уравненіе вставлявая $\frac{2s}{c \sin\alpha}$ вмѣсто a, и въ другое $\frac{2s}{c \sin\beta}$ вмѣсто b [потому что перпендикуляръ $q = \frac{2s}{c}$, $= a \sin\alpha$ и $= c \sin\beta$], получишь два уравненія заключающія въ себѣ c, точно таковыя, какія произойдутъ, когда въ первомъ изъ прежнихъ вмѣсто a напишетъ c, и въ другомъ вмѣсто b напишешь c; слѣдовательно a и c суть корни одного, а b и c корни другаго [ибо a и c равно разрѣшаютъ одно уравненіе, а b и c равно разрѣшаютъ другое]. Что докажется еще иначе, при-

(*) Удобность сія состоитъ наипаче въ томъ, что уравненіе

$2pa^2 - (p^2 + 4s\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha})a = -\frac{4ps}{\sin\alpha}$, когда данъ уголъ α, или уравненіе

$2pb^2 - (p^2 + 4s\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta})b = \frac{4ps}{\sin\beta}$, когда данъ уголъ β, даетъ вдругъ сторону a и c или b и c; что въ слѣдующемъ членѣ авторъ докажетъ.

(**) Пусть напримѣръ при двухъ углахъ α и β данъ будетъ периметръ p; то изъ оныхъ предъидущихъ уравненій сыскавъ $s =$

$\frac{(2pa^2 - p^2 a)\sin\alpha}{4a(1+\cos\alpha) - 4p}$ и $s = \frac{(2pb^2 - p^2 b)\sin\beta}{4b(1+\cos\beta) - 4p}$, получишь уравненіе

$\frac{(2pa^2 - p^2 a)\sin\alpha}{a(1+\cos\alpha) - p} = \frac{(2pb^2 - p^2 b)\sin\beta}{b(1+\cos\beta) - p}$, въ которое вмѣсто b поставь

$\frac{a \sin\alpha}{\sin\beta}$, и будешь имѣть уравненіе $\frac{2a - p}{a(1+\cos\alpha) - p} = \frac{2a\sin\alpha - p\sin\beta}{a\sin\alpha(1+\cos\beta) - p}$, чрезъ кое опредѣлится сторона a.

ведши себѣ на память, что во всякомъ уравненіи, расположенномъ такимъ образомъ, чтобы вышшая степень онаго не имѣла предстоящаго, предстоящее втораго члена, взятое съ противнымъ знакомъ, равно суммѣ корней; ибо изъ того должно слѣдовать, что $\frac{1}{2p}(p^2 + 4s.\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha}) = a + c$, $\frac{1}{2p}(p^2 + 4s.\frac{1+\cos.\beta}{\sin.\beta}) = b + c$; и слагая сіи уравненія, получишь $2s(\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha} + \frac{1+\cos.\beta}{\sin.\beta}) = cp$, или $a\cos.\alpha + b\cos.\beta = c$; что не иное что есть, какъ $x + c - x = c$. (*).

(4.) Понеже q есть извѣстная функція трехъ сторонъ, и сверьхъ того $\sin.\alpha = \frac{q}{a}$, $\sin.\beta = \frac{q}{b}$; то явствуетъ, что по тремъ даннымъ сторонамъ удобно можно будетъ опредѣлить все прочее. Такъ же удобно опредѣлишь все прочее, когда даны двѣ стороны и уголъ, лишь бы оный былъ противолежащій одной изъ данныхъ сторонъ. Но ежели данный уголъ будетъ содержащійся между двумя данными сторонами, такъ ежели данъ будетъ уголъ C съ двумя сторонами a и b, то другіе два угла опредѣлятся чрезъ посредство формулъ предложенныхъ въ членѣ 9мъ, а именно чрезъ посредство сихъ $\frac{\sin.\alpha + \sin.\beta}{\cos.\alpha + \cos.\beta} = \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\sin.\alpha - \sin.\beta}{\cos.\alpha + \cos.\beta} = \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$; ибо поставляя вмѣсто $\sin.\alpha$ его величину $\frac{b\sin.\beta}{a}$, получимъ $\frac{b+a}{a}.\frac{\sin.\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta} = \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{b-a}{2}.\frac{\sin.\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta} = \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$, и оттуда $b + a : b - a = \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$; но сумма $\alpha+\beta$ извѣстна, понеже $C = 180^\circ - \alpha - \beta$; слѣдовательно чрезъ оную про-

---

(*) Сіе нужно изъяснить нѣсколько подробнѣе. И такъ я примѣчаю, что должно быть $\frac{1}{2p}(p^2 + 4s\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha}) + \frac{1}{2p}(p^2 + 4s\frac{1+\cos.\beta}{\sin.\beta}) = a+b+c+c$, и что потому должно быть $p + \frac{4s}{2p}(\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha} + \frac{1+\cos.\beta}{\sin.\beta}) = p + c$; откуда чрезъ непосредственное уже слѣдствіе выдетъ $2s(\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha} + \frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\beta}) = cp$, или $\frac{2s}{\sin.\alpha}(1+\cos.\alpha) + \frac{2s}{\sin.\beta}(1+\cos.\beta) = cp$; но по причинѣ что $a = \frac{2s}{c\sin.\alpha}$ и $b = \frac{2s}{c\sin.\beta}$, $\frac{2s}{\sin.\alpha} = ac$ и $\frac{2s}{\sin.\beta} = bc$; чего ради будетъ $ac(1+\cos.\alpha) + bc(1+\cos.\beta) = cp$, или $a + a\cos.\alpha + b + b\cos.\beta = p = a+b+c$, или $a\cos.\alpha + b\cos.\beta = c$, или на конецъ $x + c - x = c$. И такъ, поелику сіе послѣднее уравненіе есть тождественное, первое положеніе справедливо.

порцїю найдется разность $\alpha - \beta$, а потомъ опредѣлится α и β. (*).

(*) Сей послѣднїй и первые два вопросы имѣютъ еще другїя рѣшенїя:

1) Пусть a и c данныя стороны и α данный, между ими содержащїйся, уголъ; будетъ $c - x = c - a \cos.\alpha$ и $b = \sqrt{q^2 + (c - x)^2} = \sqrt{a^2 \sin.\alpha^2 + c^2 - 2ac.\cos.\alpha + a^2 \cos\alpha^2} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos.\alpha}$. Уголъ же β найдется чрезъ сїю формулу $\text{tang}.\beta = \frac{q}{c - x} = \frac{a \sin.\alpha}{c - a\cos.\alpha}$.

2) Пусть b и a данныя стороны и α данный уголъ; изъ уравненїя $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos.\alpha}$ слѣдуетъ сїе $c = a\cos.\alpha \pm \sqrt{b^2 - a^2 + a^2 \cos\alpha^2} = a\cos.\alpha \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin.\alpha^2}$; откуда явствуетъ, что сей вопросъ имѣетъ два рѣшенїя, когда $b > a \sin.\alpha, = q$, одно, когда $b = q$, и совсѣмъ не возможенъ, когда $b < q$.

3) Пусть даны всѣ три стороны a, b, c; изъ урав. $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac.\cos.\alpha}$ слѣд. сїе $\cos.\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; откуда выдетъ $1 - \cos.\alpha = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2ac} = \frac{(a + b - c)(b + c - a)}{2ac}$; но $1 - \cos.\alpha = 2 \sin.\frac{\alpha^2}{2}$; чего ради будетъ $\sin.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a + b - c}{2}\right)\left(\frac{b + c - a}{2}\right)}{ac}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - a\right)}{ac}}$. Или еще, вмѣсто того, что бы изъ 1 вычесть, приложи ее къ той и другой части уравненїя $\cos.\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; получишь $1 + \cos.\alpha = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2ac}$; откуда, по причинѣ что $1 + \cos.\alpha = 2\cos.\frac{\alpha^2}{2}$, выдетъ $\cos.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a + c + b}{2}\right)\left(\frac{a + c - b}{2}\right)}{ac}} = \sqrt{\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - b\right)}{ac}}$. И посему будешь имѣть еще третїе рѣшенїе тому же вопросу: $\text{tang}.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - a\right)}{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - b\right)}}$.

Наконецъ уравненїя $1 - \cos.\alpha = \frac{(a + b - c)(b + c - a)}{2ac}$ и $1 + \cos.\alpha = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2ac}$ перемноженныя между собою даютъ $1 - \cos.\alpha^2$ или $\sin.\alpha^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4a^2c^2}$; откуда выдетъ $\frac{c^2.a^2 \sin.a^2}{4} = \left(\frac{a + b + c}{2}\right)\left(\frac{a + b - c}{2}\right)\left(\frac{a + c - b}{2}\right)\left(\frac{b + c - a}{2}\right)$, то есть площадь $\frac{cq}{2}\left(= \frac{ca \sin.\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$.

Опредѣленія и геометрическія строенія коническихъ сѣченій.

(15) На прямой AB (черт. IV и V) продолженной, естьли то нужно, и раздѣленной въ C пополамъ, я возьму двѣ непремѣнныя точки F и f, равно отъ C отстоящія, и безчисленное множество другихъ точекъ, каковы суть H; изъ точки F, какъ центра, радіусомъ AH и изъ точки f, какъ центра, радіусомъ BH я опишу двѣ круговыя линеи, кои да пересѣкутся въ M и m, съ той и другой стороны линеи AB; и я вопрошаю, какое есть свойство кривой линеи, которая проходитъ чрезъ точки, каковы суть M и m. Чтобы того достигнуть, проведу Mm, которая будетъ перпендикулярна къ AB, и еще прямыя FM, fM, Fm, fm; чрезъ что я составлю прямоугольные треугольники MPF, MPf, mPF, mPf. Я означу AB чрезъ $2a$, CF или Cf чрезъ e, AP чрезъ x, PM чрезъ y и FM чрезъ z; отъ чего по причинѣ что $fM \pm FM = 2a$, я получу $fM = 2a \mp z$.

И естьли положивъ сіе, возмется (черт. IV); то будетъ $FP = AP - AF = AP - AC + CF = x - a + e$, $fP = BP - BC + Cf = a + e - x$, и два прямоугольные треугольника FPM, fPM дадутъ $y^2 [= z^2 - (x - a + e)^2] = z^2 - x^2 + 2(a - e)x - (a - e)^2 [= (2a - z)^2 - (a + e - x)^2] = 4a^2 - 4az + z^2 - (a + e)^2 + 2(a + e)x - x^2$; слѣдовательно $[2(a - e)x - (a - e)^2 = 4a^2 - 4az - (a + e)^2 + 2(a + e)x$, $4az = 4a^2 + 2(a + e)x - 2(a - e)x - (a + e)^2 + (a - e)^2 = 4a^2 + 4ex - 4ae$, и $] z = a - e + \frac{ex}{a}$. Надлежитъ здѣсь замѣтить, что FM, $=$ AH, должна быть всегда больше AF, такъ что точки H не иначе могутъ быть взяты, какъ токмо между точками F и f. Теперь вставливая равную величину количества z въ одно изъ двухъ уравненій, получимъ $y^2 [= (a - e + \frac{ex}{a})^2 - x^2 + 2(a - e)x - (a - e)^2 = 2(a - e)\frac{ex}{a} + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 + 2(a - e)x = \frac{e^2x^2}{a^2} - \frac{2e^2x}{a} + 2ax - x^2 = \frac{e^2x^2 - 2ae^2x + 2a^3x - a^2x^2}{a^2} = \frac{a^2(2ax - x^2) - (2ax - x^2)e^2}{a^2}] = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(2ax - x^2)$; что есть уравненіе кривой линеи между

двумя *координатами*, взаимно перпендикулярными, изъ коихъ одна x называется *абсциссою*, а другая y именуется *ординатою*. Точно тоже уравненіе найдется, когда будешь изчислять другіе два треугольника FPm, fPm; слѣдовательно, когда MP есть одинъ изъ корней сего уравненія, mP будетъ другой; и естьли PM возмется за корень положительной, то Pm будетъ отрицательной. Кривая линея, о которой мы теперь разсуждаемъ, называется *еллипсисомъ*; она проходитъ чрезъ точки A и B, понеже корни $x=0$ и $x=2a$ уравненія $2ax-x^2=0$ даютъ, одинъ и другой, $y=0$. Линея AB называется *большею осью* еллипсиса; а что бы найти *меньшую его ось*, то изъ точекъ F, f, какъ центровъ, радїусами AC, BC опиши круговыя линеи, кои да пресѣкутся въ D и d, и чрезъ сіи точки, кои принадлежатъ къ кривой линеи, протяни Dd, коя пройдетъ чрезъ C и будетъ меньшая ось перпендикулярная къ AB; и естьли сія меньшая ось Dd означится чрезъ $2b$, то будетъ еще, по причинѣ что $FD=fD=a$, $b^2=a^2-e^2$. Или иначе, поелику меньшая ось есть удвоенная ордината, которая проходитъ чрезъ центръ C и которая соотвѣтствуетъ абсциссѣ a, то она должна найтися, положивъ въ уравненіи кривой линеи $x=a$; и въ самомъ дѣлѣ изъ того получится $b^2=a^2-e^2$. Поставивъ сію величину вмѣсто a^2-e^2, уравненіе еллипсиса приметъ другой видъ: $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$.

(16) Естьли же возмется (черт. V); то будетъ $FP=AP-AF=AP-CF+CA=x-e+a$, $fP=BP+Bf=BA+AP+Cf-CB=a+e+x$, и два прямоугольные треугольника FPM, fPM дадутъ $y^2[=z^2-(x-(e-a))^2]=z^2-x^2+2(e-a)x-(e-a)^2$ $[=(2a+z)^2-(x+a+e)^2]=4a^2+4az+z^2-x^2-2(a+e)x-(a+e)^2$; слѣдовательно $[4a^2+4az-2(a+e)x-(a+e)^2=2(e-a)x-(e-a)^2$, $4az=4ex+4ae-4a^2$ и$]$ $z=e-a+\frac{ex}{a}$. Мы замѣтимъ, что $FM,=AH$, должна быть больше AF и что въ семъ второмъ случаѣ точки H не могутъ быть взяты между F и f. Теперь вставливая величину количества z въ одно изъ двухъ уравненій,

получимъ $y^2 [= (e-a+\frac{ex}{a})^2 - x^2 + 2(e-a)x - (e-a)^2 = 2(e-a)\frac{ex}{a} + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 + 2(e-a)x = \frac{2e^2x}{a} + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - 2ax = \frac{2ae^2x + e^2x^2 - a^2x^2 - 2a^3x}{a^2} = \frac{(2ax+x^2)e^2 - (2ax+x^2)a^2}{a^2}] = \frac{e^2-a^2}{a^2}(2ax+x^2)$; что есть уравненіе кривой линеи, которая называется *гиперболою*; она проходитъ чрезъ точку A, ибо $x=0$, даетъ $y=0$. Прямая AB есть большая ось ея; но здѣсь, естьли изъ центра C проведется таковая перпендикулярная Dd, что $\overline{CD}^2$ или $\overline{Cd}^2 = e^2 - a^2$, точки D, d не принадлежатъ къ гинерболѣ, какъ то показуетъ строеніе, и какъ то слѣдуетъ изъ самаго уравненія, ибо въ опомъ сдѣлавъ $x = -a$, найдешь для y^2 отрицательную величину и слѣдовательно для y мнимую. Между тѣмъ возмемъ за уравненіе гиперболы

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

гдѣ a и b будутъ, какъ и въ еллипсисѣ, *полуоси сопряженныя*. Всѣ отрицательныя величины количества x меньшія нежели $2a$, даютъ для y величину мнимую. Но естьли возмешь $x = -2a$, то получишь $x = 0$; и естьли сверьхъ того положишь $x = -(2a+t)$, то означивъ чрезъ u соотвѣтствующую ординату, будешь имѣть $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(2at+t^2)$, то есть уравненіе гиперболы, которая подобна первой и которая оной первой противоположенна; она имѣетъ свою вершину въ точкѣ B. Въ *противоположенныхъ гиперболахъ* чѣмъ абсцисса болѣе прибавляется, тѣмъ и соотвѣтствующая ордината болѣе прибавляется, сирѣчь вѣтви сихъ кривыхъ, вопреки еллипсису, которой есть кривая линея собою опредѣленное пространство затворяющая, простираются безконечно.

(17) На продолженіи прямой BA (черт. VI) я возьму непремѣнную точку F, такъ что бы была $AF = BA$, и безчисленное множество другихъ точекъ P; чрезъ оныя я проведу неопредѣленныя къ BP перпендикулярныя линеи MPm; потомъ изъ точки F, какъ центра, радіусами BP я опишу круговыя линеи, пресѣкающія сіи перпендикулярныя въ точкахъ M, m; и я вопрошаю свойство сей кривой линеи проходящей чрезъ оныя точки. Про-

тянувъ FM, F*m*, я составляю два прямоугольные треугольника, которые долженствуютъ насъ вести къ уравненію кривой линеи. Въ самомъ дѣлѣ ежели я означу AB или AF чрезъ a, AP чрезъ x, PM чрезъ y, то по причинѣ что $FM = a + x$, $FP = x - a$, треугольникъ FPM дастъ $a^2 + 2ax + x^2 = y^2 + x^2 - 2ax + a^2$, и слѣдственно $y^2 = 4ax$, что есть искомое уравненіе кривой линеи, коя *параболою* называется. Въ оной, какъ и въ гиперболѣ, чѣмъ абсцисса прибавляется, тѣмъ и ордината болѣе становится, сирѣчь вѣтви параболы безконечно простираются. Сверьхъ того видно, что $x = 0$, даетъ $y = 0$; слѣдовательно кривая линея проходитъ чрезъ точку A.

(18) Три кривыя линеи, которыхъ мы нашли уравненія, извѣстны подъ именемъ *коническихъ сѣченій*, потому что есть ли конусъ пресѣчется плоскостію, которая не проходитъ чрезъ вершину и которая не параллельна основанію онаго, то кривая линея, составленная взаимнымъ пресѣченіемъ сей плоскости и конической поверхности, есть еллипсисъ, гипербола или парабола. Вообрази себѣ чрезъ вершину конуса плоскость параллельную плоскости коническаго сѣченія; она пресѣчетъ плоскость основанія того конуса на неопредѣленной прямой, коя *направленіемъ* называется: сѣченіе коническое будетъ еллипсисъ, когда сіе направленіе падаетъ совсѣмъ внѣ круга, которой есть основаніе конуса; оно будетъ гипербола, когда направленіе пресѣкаетъ сей кругъ; и на конецъ будетъ парабола, когда направленіе токмо касается къ кругу. Сіе предложеніе доказано будетъ ниже, въ ѳеоріи поверьхностей кривыхъ, въ членѣ 6мъ.

Въ параболѣ непремѣнная точка F, и въ еллипсисѣ и гиперболѣ непремѣнныя точки F, f называются *фокусами* сихъ кривыхъ линей. Въ параболѣ взятая въ четыре раза AF *параметромъ* именуется, а въ двухъ другихъ кривыхъ линеяхъ *параметръ* есть третья пропорціональная къ двумъ осямъ; притомъ сей параметръ есть той оси, которая будетъ взята за первой членъ пропорціи.

О касательныхъ, подкасательныхъ, нормаляхъ и субнормаляхъ.

(19) Прямая линея, которая съ кривою встрѣчается токмо въ одной точкѣ и которая продолженная въ ту и другую сторону не входитъ внутрь кривой, но падаетъ внѣ оной, называется *касательною* къ кривой въ сей точкѣ. (*). Пусть AMN (черт. VII) кривая линея, и MP, NQ двѣ ординаты ея къ оси перпендикулярныя; я проведу хорду NMS и я опущу на NQ перпендикуляръ MO; потомъ я означу AP чрезъ x, AQ чрезъ X, PM чрезъ y, QN чрезъ Y, и подобные треугольники NOM, MPS мнѣ дадутъ (NO) $Y-y$: (OM) $X-x=y$: $PS=\frac{X-x}{Y-y}y$. Теперь естьли MT будетъ касательная въ точкѣ M, то чѣмъ точка N болѣе приближается къ точкѣ M, тѣмъ NMS болѣе приближается къ соединенію съ MT; слѣдовательно *подкасательная* PT получится, когда въ выраженіи величины PS сдѣлается $X=x$ и $Y=y$. Но тогда сіе выраженіе представится въ видѣ неопредѣленнаго количества $\frac{0}{0}$, которое ничего бы намъ не дало, естьли бы въ каждомъ особенномъ случаѣ не принимало величины опредѣленной. (**)

(*) Сіе опредѣленіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ напримѣръ при точкѣ перегиба и возврата, вовсе мѣста имѣть не можетъ, а въ другихъ, какъ напримѣръ при началѣ и концѣ кривой линеи, недостаточно. Мы будемъ имѣть случай изъяснить сіе подробнѣе въ другомъ сочиненіи.

(**) Приближеніе точки N къ M не можетъ иначе учиниться, какъ или чрезъ движеніе или чрезъ геометрическое строеніе:

1) Естьли положить, что оное дѣлается чрезъ движеніе, напримѣръ чрезъ движеніе вращательное около точки M прямой NS; то хотя отъ того линея NS и упадаетъ напослѣдокъ на MT, однако выраженіе $\frac{X-x}{Y-y}y$ тогда не будетъ принадлежать къ кривой линеи. Въ самомъ дѣлѣ, подобные треугольники NOM, MPS, изъ коихъ сіе выраженіе получается, по тѣхъ поръ токмо существуютъ, пока прямая NS пресѣкаетъ кривую; коль же

Пусть кривая линея парабола, которой параметръ есть p; то имѣемъ $y^2 = px$, $Y^2 = pX$, откуда выдетъ $Y^2 - y^2$ или $(Y + y)(Y - y) = p(X - x)$ и слѣдовательно $\frac{X - x}{Y - y} y = \frac{Y + y}{p} y$, которое выраженіе перемѣнится въ сіе $\frac{2y^2}{p}$, когда сдѣлается $Y = y$ и $X = x$. И такъ, когда кривая линея есть парабола, $PT = \frac{2y^2}{p} [= \frac{2px}{p}] = 2x$.

Пусть кривая линея еллипсисъ или гипербола; то имѣемъ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)$, $Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2aX \mp X^2)$, откуда выдетъ $Y^2 - y^2$ или $(Y + y)(Y - y) = \frac{b^2}{a^2}(2a(X - x) \mp (X + x)(X - x)) [= \frac{b^2}{a^2}(2a \mp (X + x))(X - x)]$ и слѣдовательно $\frac{X - x}{Y - y} . y = \frac{y(Y + y)}{\frac{b^2}{a^2}(2a \mp (X + x))}$, которое выраженіе перемѣнится въ сіе $\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a \mp x)}$, когда сдѣлаешь $X = x$ и $Y = y$. И такъ

скоро не будетъ пресѣкать, они уничтожатся, а потому и слѣдствіе $\frac{X - x}{Y - y} y$, изъ нихъ извлеченное, такъ же уничтожиться должно; но съ прямою NS пришедшею въ положеніе MT то самое и происходитъ, то есть что она тогда уже не пресѣкаетъ кривую; чего ради выраженіе $\frac{X - x}{Y - y} . y$ не далѣе простирается, какъ токмо до тѣхъ поръ, пока та прямая не достигла еще сего предѣла; и дѣйствительно приономъ предѣлѣ ни какой уже пропорціи учинить не можно, и слѣдственно получить такъ же выраженія подобнаго $\frac{X - x}{Y - y} . y$.

2) Естьли же приближеніе точки N къ M дѣлается чрезъ геометрическое строеніе, какъ напримѣръ чрезъ раздѣленіе линеи PQ на полы, половины ея паки на полы, и такъ далѣе; то явно, что X никогда не сдѣлается x, равно и Y не учинится y; а потому выраженіе $\frac{X - x}{Y - y} y$ никогда не можетъ принять сего вида $\frac{0}{0}$, которой въ прочемъ уму ни какого чистаго и яснаго понятія не представляетъ. Мы въ особомъ сочиненіи предложимъ исправленіе сея теоріи, которая ведетъ къ дифференціальному изчисленію; теперь же читатель долженъ довольствоваться авторовымъ оной изъясненіемъ.

когда кривая линея есть еллипсисъ или гипербола, то подкасательная PT $\left[=\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a\mp x)}\right]=\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}$. (*)

Называется *нормалемъ* перпендикуляръ MR къ касательной MT и *субнормалемъ* часть PR оси абсциссъ. Сія последняя линея найдется чрезъ следующую пропорцію PT : PM = PM : PR; потомъ два прямоугольные треугольника TPM, MPR дадутъ касательную MT и нормаль MR.

Въ параболе PR $[=\frac{px}{2x}]=\frac{p}{2}$, $\overline{MT}^2\,[=2x(2x+\frac{p}{2})]=x(4x+p)$, и $\overline{MR}^2\,[=\frac{p}{2}(2x+\frac{p}{2})]=\frac{p}{4}(4x+p)$.

Въ еллипсисе и гиперболе PR $[=\frac{b^2}{a^2}(2ax\mp x^2):\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}]=\frac{b^2}{a^2}(a\mp x)$; $\overline{MT}^2\,[=\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}(\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}+\frac{b^2}{a^2}(a\mp x))]=(2ax\mp x^2)(\frac{b^2}{a^2}+\frac{2ax\mp x^2}{(a\mp x)^2})$, и $\overline{MR}^2\,[=\frac{b^2}{a^2}(a\mp x)(\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}+\frac{b^2}{a^2}(a\mp x))]=\frac{b^2}{a^2}(2ax\mp x^2+\frac{b^2}{a^2}(a\mp x)^2)$.

(*) Сей способъ проведенія касательныхъ къ кривымъ линеямъ можетъ приложенъ быть къ доказательству вогнутости или выпуклости оныхъ. Въ самомъ деле, когда пресеченіе N второй ординаты QN съ секансомъ NMS, чрезъ конецъ первой PM протянутымъ, находится на кривой AMNZ и есть некая точка оной; то для доказательства вогнутости или выпуклости ея, спонитъ токмо показать, что по уменьшеніи абсциссы AQ, непременно уменшается или увеличивается субсекансъ PS, ибо тогда явно будетъ, что пресеченіе самаго секанса съ соответствующею ординатою, которое всегда есть некая точка кривой, находится выше или ниже прямой MN, и что потому кривая есть вогнутая или выпуклая со стороны оси AB. И такъ означивъ уменьшенную абсциссу AQ чрезъ X′ и соответствующую ординату чрезъ Y′, будетъ въ параболе новой субсекансъ $=\frac{Y'+y}{p}.y$, которое выраженіе, для уменьшенія последовавшаго въ числителе, меньше прежняго, и потому, для приведенной причины, парабола есть кривая со стороны оси вогнутая. Равнымъ образомъ въ еллипсисе выдетъ новой субсекансъ $=\frac{y(Y'+y)}{\frac{b^2}{a^2}(2a-(X'+x))}$, которое выраженіе, для увеличиванія последовавшаго въ знаменателе и уменьшенія въ числителе, меньше прежняго, и потому еллипсисъ есть такъ же кривая со стороны оси вогнутая.

Но сія ѳеорія касательныхъ можетъ имѣть полную развязку токмо въ приложеніи къ оной дифференціальнаго изчисленія; и мы теперь приступимъ къ другимъ свойствамъ алгебраическихъ кривыхъ линей, разсматривая ихъ съ большею всеобщностію. (*)

Но сей способъ не всегда удобно къ настоящему предмету приложенъ быть можетъ, и потому я предлагаю другой: естьли разность PQ двухъ абсциссъ AP, AQ раздѣлится пополамъ и изъ средины протянется соотвѣтствующая ордината, то кривая линея со стороны оси AB будетъ вогнутая, когда сумма крайнихъ ординатъ PM, QN меньше удвоенной средней, и выпуклая, когда больше. И такъ означивъ $\frac{1}{2}$PQ чрезъ q, въ гиперболѣ надлежитъ доказать токмо, что $\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}+\frac{b}{a}\sqrt{2a(x+2q)+(x+2q)^2}<2\frac{b}{a}\sqrt{2a(x+q)+(x+q)^2}$. На сей конецъ предположивъ оное справедливымъ, возьми съ обѣихъ сторонъ квадраты, и получишь $\sqrt{(2ax+x^2)(2ax+x^2+4q(a+x+q))}<2ax+x^2+2q(a+x)$; взявъ еще квадраты, найдешь $(2ax+x^2)(a+x+q)<(2ax+x^2)(a+x)+q(a+x)^2$ или $2ax+x^2<(a+x)^2$; что явно справедливо, и потому предположеніе такъ же справедливо.

(*) Слѣдующихъ членовъ сего введенія въ дифференціальное и интегральное изчисленіе не можно разумѣть безъ общаго о кривыхъ линеяхъ понятія; и чтобы въ начертаніи онаго облегчить себя, я не могу ничего лучше сдѣлать, какъ предложить въ концѣ сего введенія первыя четыре главы второй части превосходнаго сочиненія славнаго Ейлера: Introductio in Analysin infinitorum.

Лемма, на которой основана вся ѳеорїя алгебраическихъ кривыхъ линей.

(20) Вообрази себѣ двѣ прямыя линеи AE и BF (черт. VIII и IX) взаимно въ H пресѣкающїяся подъ угломъ BHA ($=m$), и прямую Mm, которая можетъ быть продолжена, естьли то нужно, пресѣкающую BF подъ угломъ BNM ($=q$); и да протянутся изъ точекъ B, M, m прямыя BD, MP, mp, взаимно параллельныя, прямую AE подъ угломъ n пресѣкающїя.

Означимъ AD чрезъ x, BD чрезъ y, AP чрезъ X, PM чрезъ Y, Ap чрезъ X′, Pm чрезъ Y′, BN чрезъ T, MN чрезъ V, и mN чрезъ V′; два подобные треугольника BDH, HPu намъ дадутъ $BH = \frac{y\,\text{ſin.}\,n}{\text{ſin.}\,m}$, $DH = \frac{y\,\text{ſin.}\,(m+n)}{\text{ſin.}\,m}$, $Pu = \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,(m+n)} - y$, $Hu = \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,n}{\text{ſin.}\,(m+n)} - \frac{y\,\text{ſin.}\,n}{\text{ſin.}\,m}$, $uM = Y + y - \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,(m+n)}$. Потомъ поелику въ треугольникѣ uMN уголъ $M = m + n - q$, будетъ

$$MN\,(=V) = (Y+y)\,\frac{\text{ſin.}\,(m+n)}{\text{ſin.}\,q} - (X-x)\,\frac{\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,q},$$

$$uN = \frac{\text{ſin.}\,(m+n-q)}{\text{ſin.}\,(m+n)}.\,V.$$ Слѣдовательно $$BN\,(=T) = (X-x)\,\frac{\text{ſin.}\,n}{\text{ſin.}\,(m+n)} - \frac{\text{ſin.}\,(m+n-q)}{\text{ſin.}\,(m+n)}.\,V.$$

Откуда имѣемъ сїи уравненїя

$$(1)\ldots(X-x)\,\text{ſin.}\,n = T\,\text{ſin.}\,(m+n) - V\,\text{ſin.}\,(m+n-q)$$

$$(2)\ldots(Y+y)\,\text{ſin.}\,(m+n) = V\,\text{ſin.}\,q + \frac{\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,n}\big(T\,\text{ſin.}\,(m+n) - V\,\text{ſin.}\,(m+n-q)\big).\ (*).$$

(*) Сїи уравненїя гораздо скорѣе найти можно, проведши BP′ параллельно AE и продолживъ MP, пока съ BP′ въ P′ пресѣчется. Въ самомъ дѣлѣ, треугольникъ BP′u даетъ $\text{ſin.}\,(m+n) : X - x = \text{ſin.}\,m : P'u = \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,(m+n)}$; откуда $Mu = Y + y - \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,(m+n)}$; потомъ треуг. MN$u$ даетъ $\text{ſin.}\,q : Mu = \text{ſin.}\,(m+n) : V = \left(Y + y - \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,(m+n)}\right)\frac{\text{ſin.}\,(m+n)}{\text{ſin.}\,q}$; чрезъ сїе получена взаимность Y, y и X, x съ V; остается теперь найти взаимность тѣхъ же количествъ съ T; чего ради возмемъ тѣже треуг. BP′u и MNu; изъ нихъ первой даетъ $\text{ſin.}\,(m+n) : X - x = \text{ſin.}\,n : Bu = \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,n}{\text{ſin.}\,(m+n)}$; потомъ другой даетъ $\text{ſin.}\,(m+n) : V = \text{ſin.}\,(m+n-q) : Nu = \frac{V\,\text{ſin.}\,(m+n-q)}{\text{ſin.}\,(m+n)}$; оттуда $T\,(= Bu + Nu) = \frac{(X-x)\,\text{ſin.}\,n}{\text{ſin.}\,(m+n)} + \frac{V.\,\text{ſin.}\,(m+n-q)}{\text{ſin.}\,(m+n)}$; что даетъ первое уравненїе $(X-x)\,\text{ſin.}\,n = T.\,\text{ſin.}\,(m+n) - V.\,\text{ſin.}\,(m+n-q)$;

(21) Треугольникъ Hpt даетъ $pt = \frac{(X' - x)\sin. m}{\sin. (m + n)} - y$, $Ht = \frac{(X' - x)\sin. n}{\sin. (m + n)} - \frac{y \sin. n}{\sin. m}$; откуда $tm = \pm(\frac{(X' - x)\sin. m}{\sin. (m + n)} - y - Y)$, $mN(=V') = \pm(\frac{(X' - x)\sin. m}{\sin. q} - (y + Y')\frac{\sin. (m + n)}{\sin. q})$, $Nt = \frac{\sin. (m + n - q)}{\sin. (m + n)}. V'$; изъ чего получается другая величина линеи $BN (= T) = (X' - x)\frac{\sin. n}{\sin. (m + n)} \mp \frac{\sin. (m + n - q)}{\sin. (m + n)} V'$. И такъ будемъ имѣть еще сіи два уравненія

$(3) \ldots (X' - x)\sin. n = T\sin. (m + n) \pm V'\sin. (m + n - q)$,

$(4) \ldots (Y' + y)\sin. (m + n) = \pm\frac{\sin. m}{\sin. n}(T\sin. (m + n) \pm V'. \sin. (m + n - q)) \mp V'\sin. q$. (*).

(22) Естьли M и m суть двѣ точки данной кривой линеи, то V и V' будутъ два корня уравненія ея (**); и довлѣетъ 1 и 2го уравненія или 3 и 4го, поставляя попеременно на мѣсто V въ два первыя, или на мѣсто V' въ два другія уравненія, всѣ корни даннаго уравненія. [Ибо сколько бы уравненіе ни имѣло корней, два, три и болѣе, всѣ оные содержатся или въ 1 и 2мъ уравненіи или въ 3 и 4мъ].

сыскавъ же изъ него $X + x$ и поставивъ въ сіе $V = (Y + y - \frac{(X - x)\sin. m}{\sin. (m + n)}) \cdot \frac{\sin. (m + n)}{\sin. q}$, получишь второе $(Y + y)\sin. (m + n) = V\sin. q + \frac{\sin. m}{\sin. n}(T. \sin. (m + n) - V\sin. (m + n - q))$.

(*) Здѣсь такъ же надлежитъ протянуть Bp' параллельно AE и продолжить mp, пока съ Bp' пресѣчется въ p'; потомъ должно изчислять треугольники $Bp't$, Nmt; и получишь другія два уравненія, кои отъ первыхъ разнятся токмо знакомъ; что и быть должно, поелику $V'(= Nm)$ лежитъ съ противной стороны оси BF. Причемъ примѣтить надлежитъ, что у автора въ сихъ послѣднихъ уравненіяхъ знакъ верьхній принадлежитъ къ VIII чертежу, а знакъ нижній къ IXму

(**) Ибо, когда свойство кривой линеи отнесенной къ координатамъ BN и NM изображается чрезъ данное уравненіе между V и T, то оное уравненіе равно принадлежитъ ко всѣмъ точкамъ кривой линеи, и потому равно принадлежитъ какъ къ точкѣ M, коя соотвѣтствуетъ абсциссѣ BN, такъ и къ точкѣ m, коя соотвѣтствуетъ тойже абсиссѣ BN; слѣдовательно какъ $V(= NM)$, такъ и $V'(= Mm)$ при той же абсциссѣ T равно удовлетворяютъ данному уравненію между V и T, и слѣдовательно какъ V, такъ и V' суть корни даннаго уравненія, свойство кривой изображающаго.

О кривыхъ линеяхъ втораго порядка.

(23) Мы представимъ всѣ уравненія кривыхъ линей втораго порядка чрезъ слѣдующее:

$$aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0;$$

и естьли положимъ, что координаты Y и X суть между собою перпендикулярныя, то уголъ n будетъ прямой, и по причинѣ что тогда $\sin.(m+n) = \cos. m$, $\sin.(m+n-q)$ $[= \sin.(n-(q-m))] = \cos.(q-m)$, уравненія 1 и 2 обратятся въ сіи:

$$X - x = T.\cos. m - V\cos.(q-m),$$
$$Y + y = T.\sin. m + V\sin.(q-m).\ (*)$$

Мы поставимъ въ данное уравненіе на мѣсто X и Y ихъ величины, [то есть, поелику $Y = V\sin.(q-m) + T\sin. m - y$ и $X = T\cos. m - V\cos.(q-m) + x$, мы учинимъ сіе вычисленіе

$$aY^2 = aV^2\sin.(q-m)^2 + 2aT\sin.m.\sin.(q-m) + aT^2.\sin.m^2 - 2aVy\sin.(q-m) - 2aTy\sin.m + ay^2$$
$$bXY = -bV^2\sin.(q-m)\cos.(q-m) + bTV\cos.m.\sin.(q-m) + bT^2\sin.m.\cos.m + bVy\cos.(q-m) - bTy\cos.m - bxy$$
$$-bTV\sin.m.\cos.(q-m) \qquad + bVx\sin.(q-m) + bTx\sin.m.$$
$$cX^2 = cV^2\cos.(q-m)^2 - 2cTV\cos.m.\cos.(q-m) + cT^2\cos.m^2 - 2cVx\cos.(q-m) + 2cTx\cos.m + cx^2$$
$$dY = \ldots\ldots + dV\sin.(q-m) + dT\sin.m - dy$$
$$eX = \ldots\ldots - eV\cos.(q-m) + eT\cos.m + ex$$
$$f = \ldots\ldots + f],$$

и послѣ для сокращенія положимъ

$$a\sin.(q-m)^2 - b\sin.(q-m)\cos.(q-m) + c.\cos.(q-m)^2 = E,$$
$$2a\sin.m.\sin.(q-m) + b(\cos.m.\sin.(q-m) - \sin.m.\cos.(q-m))$$
$$- 2c.\cos.m.\cos.(q-m) = F,$$
$$a\sin.m^2 + b\sin.m.\cos.m + c.\cos.m^2 = G,$$

(*) Второе уравненіе сначала перемѣнится не въ сей авторомъ вдругъ написанный видъ, но въ слѣдующій $(Y+y)\cos.m = V\sin.q + \sin.m(T.\cos.m - V.\cos.(q-m))$; потомъ же, поелику $V\sin.q + \sin.m(T.\cos.m - V\cos.(q-m)) = V\sin.q + \sin.m(T.\cos.m - V\cos.q\cos.m - V\sin.q\sin.m) = V\sin.q(1-\sin.m^2) + T.\sin.m\cos.m - V\sin.m\cos.m.\cos.q = V\cos.m^2.\sin.q + T\sin.m.\cos.m - V\sin.m.\cos.m.\cos.q$, будетъ $Y+y = T.\sin.m + V\sin.q\cos.m - V\cos.q.\sin.m = T\sin.m + V\sin.(q-m)$.

$(2ay - bx - d)\sin.(q - m) - (by - 2cx - e)\cos.(q - m) = H$ [гдѣ истинная величина, то есть $(-2a + bx + d)\sin.(q - m) + (by - 2cx - e)\cos.(q - m)$, полагается $= -H$,
$(2ay - bx - d)\sin.m + (by - 2cx - e)\cos.m = I$ [гдѣ истинная величина, то есть $(-2ay + bx + d)\sin.m - (by - 2cx - e)\cos.m$, полагается $= -I$],
$ay^2 - bxy + cx^2 - dy + ex + f = K$;
отъ чего преобразованное уравненіе пріиметъ сей видъ:

$$[EV^2 + FTV + GT^2 - HV - IT + K = 0, \text{ или сей}]$$
$$EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0.$$

(24) Дабы было $K = 0$, довлѣетъ токмо, чтобы точка B была одною изъ точекъ кривой линеи; что всегда можно положить (*). Сверьхъ того можно положить $F = 0$ и $H = 0$ (**); сіи уравненія будутъ служить ко опредѣленію угловъ m и q;

(*) Поелику точка B на линеи BF взята по произволенію и линея BF протянута такъ же по произволенію, то ни малѣйшаго сомнѣнія нѣтъ, что B всегда можно положить точкою кривой; но что отъ того K будетъ $= 0$, то потому, что координаты соотвѣтствующія точкѣ B кривой линеи суть y и x, и что уравненіе кривой $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$, которое равно принадлежитъ ко всѣмъ точкамъ оной кривой, при точкѣ B обращается въ $ay^2 - bxy + cx^2 - dy + ex + f = 0$, понеже здѣсь ордината y имѣетъ противное положеніе въ разсужденіи положенія ординаты Y.

(**) Поелику углы m и q взяты по произволенію, такъ что безчисленное ихъ множество можетъ удовлетворить преобразованному уравненію, то можно положить ихъ таковыми, что они величины F и H обращаютъ въ нуль; и уравнивъ F и H нулю, будешь имѣть два уравненія въ m и q, кои дадутъ намъ оныя m и q, и преобразованное уравненіе при сихъ углахъ m и q будетъ таково, что F и H выдутъ $= 0$.

Здѣсь при опредѣленіи угловъ m и q авторъ полагалъ y и x извѣстными и точку B непремѣнною; но естьли положить y и x неизвѣстными и точку B положеніе свое перемѣняющею, но такъ чтобы всегда было $ab^2 - bxy + cx^2 - dy + ex + f = 0$; то сверьхъ того можно будетъ положить еще $q =$ углу прямому; ибо тогда изъ уравненія $F = 0$ опредѣ-

и такъ доказано, что всякое уравненїе второй степени можетъ приведено быть къ сему виду:

$$aY^2 + cX^2 + eX = 0.$$

И естьли въ ономъ учинимъ тѣ же вставливанїя, что и въ первомъ [то есть, ежели въ мѣсто Y и X поставивъ $V \sin.(q - m) + T \sin. m - y$ и $T \cos. m - V \cos.(q - m) + x$, учинимъ сїе вычисленїе

$$aY^2 = aV^2 \sin.(q-m)^2 + 2aTV \sin.m.\sin.(q-m) + aT^2 \sin.m^2 - 2aVy \sin.(q-m) - 2aTy \sin.m + ay^2$$
$$cX^2 = cV^2 \cos.(q-m^2) - 2cTV \cos.m.\cos.(q-m) + cT^2.\cos.m^2 - 2cVx \cos.(q-m) + 2cTx \cos.m + cx^2$$
$$eX = \ldots\ldots\ldots\ldots - eVx \cos.(q-m) + eT \cos.m + ex],$$

то получимъ преобразованное уравненїе

$$EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0, \text{ гдѣ}$$

$E = a \sin.(q - m)^2 + c.\cos.(q - m)^2$,
$F = 2a \sin.m.\sin.(q - m) - 2c.\cos.m.\cos.(q - m)$,
$G = a \sin.m^2 + c.\cos.m^2$,
$H = 2ay \sin.(q - m) + (2cx + e)\cos.(q - m)$,
$I = 2ay \sin.m - (2cx + e)\cos.m$
$K = ay^2 + cx^2 + ex.$

Но уравненїе $Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{e}{c}X)$ есть уравненїе всѣхъ коническихъ сѣченїй: оное есть уравненїе еллипсиса, когда c и a положительныя, а e отрицательное; оное есть уравненїе гиперболы, когда a положительное а c и e отрицательныя; и наконецъ оное есть уравненїе параболы, когда $c = 0$. И такъ въ кривыхъ

лится одинъ токмо уголъ m, а изъ уравненїя $H = 0$ съ помощїю уравненїя $K = 0$, найдутся величины x и y и опредѣлится мѣсто точки B, той точки отъ которой протянутая прямая BF составляя съ AE извѣстной уголъ m и съ Mm прямой q, обращаетъ преобразованное уравненїе $EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0$ въ сїе $EV^2 + GT - IT = 0$. И такъ одна и таже кривая линея имѣющая уравненїе $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$ чрезъ перемѣненїе осей, можетъ принять уравненїе $EV^2 + GT^2 - IT = 0$, въ которомъ координаты T и V суть такъ же взаимно между собою перпендикулярныя, какъ и координаты X и Y. Слѣдовательно вмѣсто уравненїя $aY^2 + b.XY + cX^2 + dY^2 + eX + f = 0$ для той же самой кривой можно взять сїе $aY^2 + cX^2 + ex = 0$.

линеяхъ втораго порядка заключаются токмо однѣ коническія сѣченія. (*).

(*) Разсматривая уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$, изъ коего авторъ произвелъ свое $Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{e}{c}X)$, я примѣчаю, что могутъ имѣть мѣсто слѣдующія случаи: 1) или $a = 0$, 2) или $e = 0$, 3) или $c = 0$ и e отрицательное, 4) или c положительное и e отрицательное, 5) или c отрицательное, какъ и e, 6) или $c = 0$ и e положительное, 7) или c положительное, какъ и e, 8) или на конецъ c отрицательное и e положительное. Во всѣхъ сихъ случаяхъ я полагаю a количествомъ положительнымъ, и что во всякомъ уравненіи всегда напередъ сдѣлать можно.

1) Когда $a = 0$, то уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$ сдѣлается $cX^2 + eX = 0$, которое есть опредѣленное и слѣдственно такое, кое не даетъ никакой линеи, но разрѣшаетъ токмо опредѣленной вопросъ.

2) Когда $e = 0$, то уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$ сдѣлается $aY^2 + cX^2 + = 0$, или $Y = \pm Y\sqrt{-\frac{c}{a}}$, которое или ничего не даетъ, или даетъ двѣ прямыя линеи взаимно сопряженныя.

3) Когда $c = 0$ и e отрицательное, то уравненіе $aY^2 + eX = 0$ или $Y^2 = -\frac{e}{a}X$ даетъ кривую линею, *параболого* называемую, взявъ X положительно.

4) Когда c положительное и e отрицательное, то уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$ или $Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{e}{c}X)$ даетъ кривую *еллипсисомъ* именуемую, взявъ X положительно.

5) Когда же c отрицательное, какъ и e, то уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$, или $Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{e}{c}X)$ даетъ кривую *гиперболого* называемую, взявъ X положительно и отрицательно.

6) Но когда $c = 0$ и e положительное, то взявъ X отрицательно, уравненіе $Y^2 = -\frac{e}{a}X$ будетъ имѣть точно тотъ же видъ, что и въ 3 случаѣ, и потому даетъ параболу.

7) И когда c положительное, какъ и e, то взявъ X отрицательно, уравненіе $Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{c}{e}X)$ будетъ имѣть точно тотъ же видъ, что и въ 4 случаѣ, и потому даетъ еллипсисъ.

8) Наконецъ когда c отрицательное и e положительное, то взявъ X отрицательно и положительно, уравненіе $Y^2 = -\frac{c}{a}({}^2X + \frac{e}{c}X)$ будетъ имѣть точно тотъ же видъ, что и въ 5 случаѣ, и потому даетъ гиперболу.

И такъ видно, что кривыя линеи втораго порядка суть токмо трехъ родовъ: парабола, еллипсисъ и гипербола.

При чемъ еще видно, что уравненїе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$ даетъ параболу, когда $c = 0$, еллипсисъ, когда c положителное, и гиперболу, когда c отрицательное.

Послѣ сего замѣчанїя весьма не трудно уже опредѣлить и тѣ признаки, по которымъ узнается, когда общее уравненїе кривыхъ линей втораго порядка даетъ параболу, еллипсисъ и гиперболу.

Въ самомъ дѣлѣ, возмемъ уравненїе $EV^2 + FTV + GT^2 - HV - IT + K = 0$, которое въ разсужденїи уравненія $aY^2 + cX^2 + eX = 0$ есть тоже самое, что и общее уравненїе $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$ въ разсужденїи уравненїя $EV^2 + GT^2 - IT = 0$, и которое слѣдственно можетъ представлять намъ общее уравненїе; сыщемъ количества $V^2 + \frac{FTV}{E} + \frac{GT^2}{E}$ множители; и сего ради уравнивъ оное нулю, получимъ $V = -\frac{FT}{2E} \pm \frac{T}{E}\sqrt{F^2 - 4GE}$, и искомые множители будутъ $V + \frac{FT}{2E} - \frac{T}{E}\sqrt{F^2 - 4GE}$ и $V + \frac{FT}{2E} + \frac{T}{E}\sqrt{F^2 - 4GE}$; я примѣчаю, что поелику $F = 2a\,\text{ſin.}\,m.\,\text{ſin.}\,(q-m) - 2c.\,\text{coſ.}\,m.\,\text{coſ.}\,(q-m)$, $E = a\,\text{ſin.}\,(q-m)^2 + c.\,\text{coſ.}\,(q-m)^2$ и $G = a\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ.}\,m^2$, будетъ $F^2 - 4GE = -8ac\,\text{ſin.}\,m.\,\text{coſ.}\,m\,\text{ſin.}\,(q-m)\,\text{coſ.}(q-m) - 4ac\,\text{ſin.}\,m^2.\,\text{coſ.}(q-m)^2 - 4ac.\,\text{coſ.}\,m^2.\,\text{ſin.}\,(q-m)^2$; откуда я заключаю: 1) что когда $c = 0$, то $F^2 - 4GE = 0$, и множители количества $V^2 + \frac{FT}{2E}V + \frac{GT^2}{E}$ будутъ равные между собою; 2) что когда c есть количество положительное, то $F^2 - 4GE$ количество отрицательное, и множители количества $V^2 + \frac{FT}{E}V + \frac{GT^2}{E}$ будутъ мнимые; и 3) что когда c отрицательное, то $F^2 - 4GE$ количество положительное, и множители количества $V^2 + \frac{FT}{E}V + \frac{GT^2}{E}$ будутъ дѣйствительные, но не равные между собою. И такъ общее уравненїе $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$ даетъ параболу, еллипсисъ и гиперболу, когда количество $Y^2 + \frac{bXY}{a} + \frac{cX^2}{a}$ можетъ разрѣшиться на множители равные между собою, мнимые и дѣйствительные, но не равные между собою, или все тоже, когда $b^2 = 4ac$, $b^2 < 4ac$ и $b^2 > 4ac$.

Въ заключенїе сего еще замѣтить должно, что изъ приведенныхъ выше 8ми случаевъ 6, 7 и 8й даютъ тѣже кривыя линеи, что 3, 4 и 5й случаи, не токмо свойствомъ, но и величиною, когда величины a, c и e тѣже; вся разность будетъ токмо въ противномъ положенїи сихъ кривыхъ линей; и посему въ слѣдующемъ, гдѣ дѣло настоитъ въ изъисканїи свойствъ оныхъ кривыхъ линей, довольно взять токмо 3, 4 и 5й случаи; и такимъ образомъ въ параболѣ будетъ $c = 0$ и e отрицательное, въ еллипсисѣ e положительное и e отрицательное, и наконецъ въ гиперболѣ c отрицательное, какъ и e.

О коническихъ сѣченіяхъ.

(25) Вопервыхъ я сдѣлаю $K = 0$, понеже всегда можно положить, что A и B суть двѣ точки кривой. Во вторыхъ, поелику предстоящее $\frac{FT - H}{E}$, взятое съ противнымъ знакомъ, равно суммѣ корней, естьли положимъ $FT - H = 0$, то два корня или двѣ величины количества V сдѣлаются равными, одна будетъ положительная, а другая отрицательная. Но при центрѣ всѣ прямыя Mm чрезъ оной проходящія долженствуютъ быть имъ раздѣлены на двѣ равныя части; слѣдовательно, дабы найти сей центръ, надлежитъ положить, чтобы уравненіе $FT - H = 0$ всегда имѣло мѣсто, какой бы величины уголъ $q - m$ ни былъ; что даетъ $T \cdot \sin. m = y$, $T \cdot \cos. m = -x - \frac{e}{2c}$ (*), и откуда изключивъ T, получимъ

$$x + \frac{y \cos. m}{\sin. m} = -\frac{e}{2c}.$$

Ограничимъ уголъ m такимъ образомъ, что бы BF проходила чрезъ оной центръ; отъ чего по причинѣ что $AH = x + \frac{y \cos. m}{\sin. m}$, будемъ имѣть $AH = -\frac{e}{2c}$, которое количество въ еллипсисѣ будетъ положительное, а въ гиперболѣ отрицательное; въ параболѣ же безконечное. [То есть, въ еллипсисѣ разстояніе AH центра H отъ начала A надлежитъ взять въ ту же сторону, въ ко-

---

(*) Ибо когда уравненіе $FT - H = 0$ всегда должно имѣть мѣсто, какой бы величины уголъ $q - m$ ни былъ, то будетъ

$$\text{какъ} \left\{ \begin{array}{l} 2aT.\sin. m.\sin. (q-m) - 2cT\cos. m.\cos. (q-m) \\ -2ay \sin. (q-m) - (2cx + e)\cos. (q-m) \end{array} \right\} = 0, \text{ или}$$

все тоже, $(2aT \sin. m - 2ay) \operatorname{tang.} (q - m) - (2cT \cos. m + 2cx + e) = 0$, такъ и $(2aT \sin. m - 2ay) \operatorname{tang.} (q' - m) - (2aT \cos. m + 2cx + e) = 0$, и потому такъ же и разность $(2aT \sin. m - 2ay)(\operatorname{tang.}(q-m) - \operatorname{tang.}(q'-m)) = 0$; но какъ множитель $\operatorname{tang.} (q - m) - \operatorname{tang.} (q' - m)$ равенъ нулю быть не можетъ, то слѣдуетъ, что $2aT \sin. m - 2ay = 0$ и что, по причинѣ уравненія $(2aT \cdot \sin. m - 2ay) \operatorname{tang.} (q - m) - (2cT\cos. m + 2cx + e) = 0$, $2cT \cos. m + 2cx + e = 0$; то есть $T = \frac{y}{\sin. m}$ и $2cT.\cos. m = -2cx - e$, или $T.\cos. m = -x - \frac{e}{2c}$.

торую будешь брать абсциссы, а въ гиперболѣ въ сторону противную; въ параболѣ же выраженіе $\frac{e}{2c}$, какъ, по причинѣ $c=0$, количества не означающее, показываетъ, что оная совсѣмъ центра не имѣетъ, или все тоже, что никогда не возможно достигнуть до такой точки, на оси взятой, которою бы упомянутыя выше прямыя M*m* раздѣлялися на полы].]

(26) Въ третьихъ, тоже уравненіе $FT-H=0$ служитъ и къ опредѣленію діаметровъ, кои долженствуютъ имѣть столько же ординатъ положительныхъ, сколько и отрицательныхъ, равныхъ каждая каждой. И поелику сіе уравненіе есть первой степени, то оные діаметры будутъ прямыя линеи. Положимъ что прямая BF есть одинъ изъ сихъ діаметровъ, то уравненіе $[FT-H=0]$ должно быть справедливо по всей сего діаметра протяженности, то есть надлежитъ, чтобы оно имѣло мѣсто, какой бы величины количество T ни было. Откуда выдетъ $F=0$, $H=0$ (*), и сверьхъ того, что мы нашли уже $x+\frac{y\cos. m}{\sin. m}=-\frac{e}{2c}$, будемъ имѣть еще $\frac{\sin.(q-m)}{\cos.(q-m)}=\frac{c.\cos. m}{a.\sin. m}$. (**). Дѣлая же въ преобразованномъ уравненіи F, H и K нулями, оное обратится въ

(*) Ибо, когда уравненіе $FT-H=0$ долженствуетъ имѣть мѣсто, какую бы величину количеству T ни дать, то имѣетъ мѣсто и уравненіе $FT'-H=0$, а потому такъ же и уравненіе $F(T-T')=0$, которое произойдетъ, когда одно изъ другаго вычтется; но какъ $T-T'$ не можетъ быть равно нулю, то $F=0$, и слѣдовательно такъ же и $H=0$.

(**) Что здѣсь будемъ имѣть $x+\frac{y\cos. m}{\sin. m}=-\frac{e}{2c}$, то потому, что $H=0$ даетъ $2ay\sin.(q-m)+(2cx+e)\cos.(q-m)$, или $\frac{y\sin.(q-m)}{\cos.(q-m)}=\frac{-2cx-e}{2a}$, гдѣ на мѣсто $\frac{\sin.(q-m)}{\cos.(q-m)}$ поставляя $\frac{c.\cos. m}{a\sin. m}$, получимъ $\frac{yc}{a}.\frac{\cos. m}{\sin. m}=\frac{-2cx-e}{2a}$, или $x+y\frac{\cos. m}{\sin. m}=-\frac{e}{2c}$. И поелику $x+y\frac{\cos. m}{\sin. m}$ есть разстояніе отъ начала A до точки H, чрезъ которую по положенію проходитъ діаметръ, и $-\frac{e}{2c}$, какъ то выше видѣли, есть разстояніе центра до того начала A, то заключимъ изъ сего, что всякой діаметръ проходитъ чрезъ центръ коническаго сѣченія.

$$V^2 = -\frac{G}{E}\left(T^2 - \frac{1}{G}T\right),$$ гдѣ

$\frac{1}{G}\Big[= \frac{2ay\,\text{ſin.}\,m - (2cx+e)\,\text{coſ.}\,m}{a.\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ.}\,m^2}$ и, по причинѣ что $\frac{y\,\text{coſ.}\,m}{\text{ſin.}\,m} = -x - \frac{e}{2c} = -\frac{(2cx+e)}{2c}$,

$= \frac{2ay\,\text{ſin.}\,m + \frac{2cy\,\text{coſ.}\,m^2}{\text{ſin.}\,m}}{a\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ.}\,m^2}\Big] = \frac{2y}{\text{ſin}\,m} = 2BH$ [по причинѣ что $\frac{y}{\text{ſin.}\,m} = BH$], и

$\frac{G}{E}\Big[= \frac{a\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ.}\,m^2}{a\,\text{ſin.}\,(q-m)^2 + c\,\text{coſ.}\,(q-m)^2} = \frac{a\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ}\,m^2}{\left(\frac{a\,\text{ſin.}\,(q-m)^2}{\text{coſ.}\,(q-m)^2} + c\right)\text{coſ.}\,(q-m)^2}$

и, по причинѣ что $\frac{\text{ſin.}\,(q-m)^2}{\text{coſ.}\,(q-m)^2} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\text{coſ.}\,m^2}{\text{ſin.}\,m^2}$, $=$

$\frac{a\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ.}\,m^2}{\left(\frac{ac^2}{a^2}\cdot\frac{\text{coſ.}\,m^2}{\text{ſin.}\,m^2} + c\right)\text{coſ.}\,(q-m)^2} = \frac{a\,\text{ſin.}\,m^2 + c.\,\text{coſ.}\,m^2}{\frac{c}{a}\left(\frac{c\,\text{coſ.}\,m^2 + a\,\text{ſin}\,m^2}{\text{ſin.}\,m^2}\right)\text{coſ.}\,(q-m)^2}\Big]$

$= \frac{a\,\text{ſin.}\,m^2}{c.\,\text{coſ.}\,(q-m)^2}$.

Сїе послѣднее количество въ еллипсисѣ есть положительное, а въ гиперболѣ отрицательное; въ параболѣ же безконечное (*).

(27) Поелику ординаты MP, mp перпендикулярны къ AH, то оная AH будетъ одна изъ полуосей коническаго сѣченїя. Означимъ чрезъ g и h сїи полуоси сопряженныя; мы будемъ имѣть въ еллипсисѣ $\frac{e}{c} = -2g$ и изъ уравненїя сей кривой $[Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{e}{c}X)]$, положивъ $X = g$ и $Y = h$, $\frac{c}{a} = \frac{h^2}{g^2}$; въ гиперболѣ же мы будемъ имѣть $\frac{e}{c} = 2g$ и изъ уравненїя оной кривой, положивъ $X = -g$ и $Y = h$, $\frac{c}{a} = -\frac{h^2}{g^2}$, ибо $\frac{c}{a}$ должно быть количество отрицательное. И такъ уравненїе $Y^2 = \frac{h^2}{g^2}(2gX \mp X^2)$ будетъ уравненїе сихъ коническихъ сѣченїй въ разсужденїи ихъ осей, и принадлежитъ къ еллипсису,

(*) Такъ же и количество содержанїя $\frac{1}{G}$ въ еллипсисѣ есть положительное, а въ гиперболѣ отрицательное, потому что въ той и другой кривой линеи прямая BH лежитъ съ AH ($= -\frac{e}{2c}$) всегда по одну и ту же сторону начала A; въ параболѣ же сїе количество представляется въ видѣ $\frac{1}{0}$.

когда возмется знакъ —, и къ гиперболѣ, когда знакъ + (*). Означивь же чрезъ X абсциссу взятую отъ центра, будемъ имѣть $X' = g \mp X$ и $2gX \mp X^2 = \pm g^2 \mp X'^2$; и посему уравненіе двухъ коническихъ сѣченій можетъ принять еще сей другой видъ $Y^2 = \pm \frac{h^2}{g^2}(g^2 - X'^2)$.

Означивъ полудіаметръ BH чрезъ g' и полусопряженной онаго чрезъ h', мы будемь имѣть въ еллипсисѣ $\frac{1}{G} = 2g'$ и изъ преобразованнаго уравненія $[V^2 = -\frac{G}{E}(T^2 - \frac{1}{G}T)]$, положивъ $T = g'$ и $V = h'$, $\frac{G}{E} = 2g'$; въ гиперболѣ же мы будемъ имѣть $\frac{1}{G} = -2g'$ и изъ преобразованнаго уравненія, сдѣлавъ $T = -g'$ и $V = h'$, $\frac{G}{E} = -\frac{h'^2}{g'^2}$, ибо $\frac{G}{E}$ должно быть отрицательное.

И такъ уравненіе $V^2 = \frac{h'^2}{g'^2}(2g'T \mp T^2)$ будетъ уравненіе сихъ коническихъ сѣченій въ разсужденіи ихъ діаметровъ, и принадлежитъ къ еллипсису, когда возмется знакъ —, и къ гиперболѣ, когда знакъ +(**). Означивъ же чрезъ T' абсциссу взятую

(*) Но въ найденіи сего уравненія мнѣ казалося бы лучше поступить такъ: означивъ чрезъ g разстояніе центра H до начала A, я примѣчаю сперва, что оное разстояніе, какъ равное $-\frac{e}{2c}$, даетъ сіе уравненіе $-\frac{e}{2c} = g$ или $\frac{e}{c} = -2g$; что естьли примется для еллипсиса, какъ то и должно, поелику въ еллипсисѣ c положительное, а e отрицательное; то для гиперболы будетъ $\frac{e}{c} = 2g$, ибо въ гиперболѣ c, какъ и e, есть отрицательное; потомъ я ищу во что обратится Y^2, когда X сдѣлается въ еллипсисѣ $= g$, а въ гиперболѣ $= -g$; на сей конецъ я нахожу въ еллипсисѣ $Y^2 = \frac{c}{a}g^2$, а въ гиперболѣ $Y^2 = -\frac{c}{a}g^2$, и означивъ въ семъ случаѣ Y^2 чрезъ h^2, я получаю въ еллипсисѣ $\frac{c}{a} = \frac{h^2}{g^2}$, а въ гиперболѣ $\frac{c}{a} = -\frac{h^2}{g^2}$, какъ и быть долженствуетъ, ибо въ еллипсисѣ c есть положительное, а въ гиперболѣ отрицательное. И такимъ образомъ произойдетъ предложенное авторомъ уравненіе.

(**) Авторъ приступилъ къ свойствамъ координатъ сопряженныхъ діаметровъ, не показавъ, какъ можно опредѣлить положеніе ихъ; мы сіе здѣсь покажемъ, тѣмъ охотнѣе, что имѣемъ средство сдѣлать сіе безъ помощи ѳеоріи касательныхъ.

И такъ естьли AE (черт. 1) будетъ ось еллипсиса или гиперболы и BF какой нибудь діаметръ, я говорю, что изъ конца онаго

отъ центра, сїе уравненїе приметъ другой видъ $V^2 \pm \frac{h'^2}{g'^2}(g'^2 - T'^2)$, гдѣ знакъ + имѣетъ мѣсто въ случаѣ еллипсиса, а знакъ — въ случаѣ гиперболы.

И такъ доказано, что свойство двухъ конических сѣченїй, относящееся къ двумъ ихъ осямъ, простирается и къ двумъ какимъ нибудь сопряженнымъ ихъ дїаметрамъ.

(28) Мы нашли $y = g' \,\mathrm{sin.}\, m$, $y^2 \frac{\mathrm{cos.}\, m^2}{\mathrm{sin.}\, m^2} = (g \mp x)^2 [= g^2 \mp (2gx \mp x^2)] = g^2 \mp \frac{g^2}{h^2} y^2$ [ибо въ 25 членѣ найдено было $T . \mathrm{sin.}\, m = y$ и $x + \frac{y \,\mathrm{cos.}\, m}{\mathrm{sin.}\, m} = - \frac{e}{2c} = \pm g$]; откуда [будетъ $y^2 (\frac{\mathrm{cos.}\, m^2}{\mathrm{sin.}\, m^2} \pm \frac{g^2}{h^2}) = g^2$, $g'^2 . \mathrm{sin.}\, m^2 (\frac{\mathrm{cos.}\, m^2}{\mathrm{sin.}\, m^2} \pm \frac{g^2}{h^2}) = g^2$, $\pm \frac{g^2}{h^2} \mathrm{sin.}\, m^2 + \mathrm{cos.}\, m^2 = \frac{g^2}{g'^2}$ и], $\mathrm{sin.}\, m^2 \pm \frac{h^2}{g^2} \mathrm{cos.}\, m^2 = \pm \frac{h^2}{g'^2}$.

Отсюда же имѣемъ [$\mathrm{sin.}\, m^2 \pm \frac{h^2}{g^2} (1 - \mathrm{sin.}\, m^2) = \pm \frac{h^2}{g'^2}$, $(1 \mp \frac{h^2}{g^2}) \mathrm{sin.}\, m^2 = \pm \frac{h^2}{g'^2} + \frac{h^2}{g^2}$ и] $\mathrm{sin.}\, m^2 = \pm \frac{h^2}{g'^2} . \frac{g^2 - g'^2}{g^2 \mp h^2}$, $\mathrm{cos.}\, m^2 [= 1 - \mathrm{sin.}\, m^2 = 1 - (\pm \frac{h^2}{g'^2} . \frac{g^2 - g'^2}{g^2 \mp h^2}) = \frac{g^2 g'^2 \mp g'^2 h^2 \mp g'^2 h^2 \pm g'^2 h^2}{g'^2 (g^2 \mp h^2)}] = \frac{g^2}{g'^2} . \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 \mp h^2}$ и слѣдственно $\frac{\mathrm{sin.}\, (q-m)^2}{\mathrm{cos.}\, (q-m)^2} = \frac{h^4}{g^4} . \frac{\mathrm{cos.}\, m^2}{\mathrm{sin.}\, m^2} = \pm \frac{h^2}{g^2} . \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 - g'^2}$, [$\mathrm{sin.}\, (q-m)^2 = \pm \frac{h^2}{g^2} . \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 - g'^2} (1 - \mathrm{sin.}\, (q-m)^2)$, $(1 \pm \frac{h^2}{g^2} . \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 - g'^2}) \mathrm{sin.}\, (q-m)^2 = \pm \frac{h^2}{g^2} . \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 - g'^2}$ и] $\mathrm{sin.}\, (q-m)^2 = \pm \frac{h^2}{g} \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 - g'^2 \pm \frac{h^2}{g^2} (g'^2 \mp h^2)}$ [$= \pm \frac{h^2 (g'^2 \mp h^2)}{g^2 (g^2 - g'^2) \pm h^2 (g'^2 \mp h^2)} = \frac{\pm h^2 (g'^2 \mp h^2)}{g^4 - h^4 - g^2 g'^2 \pm h^2 g'^2} = \frac{\pm h^2 (g'^2 \mp h^2)}{(g^2 \pm h^2)(g^2 \mp h^2) - g'^2 (g^2 \pm h^2)}$] $= \pm \frac{h^2 (g'^2 \mp h^2)}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)}$, $\mathrm{cos.}\, (q-m)^2 =$

F опустивъ перпендикуляръ FQ и сыскавъ четвертую пропорцїональную QT линей HQ, QE и AQ, получишь чрезъ соединенїе точекъ F и T прямую FT, которая будетъ параллельна ординатамъ MN дїаметра BF; ибо найденное (въ 26 членѣ) уравненїе $\frac{\mathrm{sin.}\, (q-m)}{\mathrm{cos.}\, (q-m)} = \frac{c}{a} . \frac{\mathrm{cos.}\, m}{\mathrm{sin.}\, m}$ даетъ $\mathrm{tang.}\, (q-m) = \pm \frac{h^2}{g^2} \mathrm{cot.}\, m = \frac{Y^2}{\pm (2gX \mp X^2)} . \mathrm{cot.}\, m$; потомъ треуг. QFH даетъ $Y \mathrm{cot.}\, m = X \mp g$; изъ чего выдетъ $\mathrm{tang.}\, (q-m) = \frac{(X \mp g) Y}{\pm (2g \mp X) X} = \frac{Y}{\pm QT} = \pm \mathrm{tang.}\, QTF = \mathrm{tang.}\, HTF$; и посему $q - m = HTF$, но $q - m$ есть уголъ, которой составляютъ ординаты MN дїаметра BF съ осью AE; слѣд. и проч.

Сїе опредѣленїе положенїя координатъ сопряженныхъ дїаметровъ, безъ помощи теорїи касательныхъ, весьма важно, для составленїя елементовъ Геометрїи кривыхъ линей, по системѣ сообразованной съ предметами; что я надѣюсь лучше изъяснить въ другомъ сочиненїи.

$\frac{g^2 - g'^2}{g^2 - g'^2 \pm \frac{h^2}{g^2}(g'^2 \mp h^2)} = \frac{g^2(g^2 - g'^2)}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)}$ [ибо сїе найдется подобно, какъ нашли $\sin.(q - m)^2$, или еще иначе симъ образомъ: $\cos.(q - m)^2 = 1 - \sin.(q - m)^2 = 1 \mp \frac{h^2(g'^2 \mp h^2)}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)} = \frac{g^4 - h^4 - g^2 g'^2 \pm h^2 g'^2 \mp h^2 g'^2 + h^4}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)}$], и напослѣдокъ $\sin.(q-m)^2 \pm \frac{h^2}{g^2}\cos.(q-m)^2$ $[= \frac{\pm h^2(g'^2 \mp h^2) \pm \frac{h^2}{g^2} \cdot g^2(g^2 - g'^2)}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)} = \frac{\pm h^2 g'^2 - h^4 \pm h^2 g^2 \mp h^2 g'^2}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)} = \frac{\pm(g^2 \mp h^2)h^2}{(g^2 \mp h^2)(g^2 \pm h^2 - g'^2)}] = \frac{\pm h^2}{g^2 \pm h^2 - g'^2}$.

Но $\frac{\sin.m^2 \pm \frac{h^2}{g^2}\cos.m^2}{\sin.(q-m)^2 \pm \frac{h^2}{g^2}\cos.(q-m^2)} [= \frac{a \sin.m^2 + c.\cos.m^2}{a \sin.(q-m)^2 + c.\cos.(q-m)^2}] = \frac{G}{E} = \pm\frac{h'^2}{g'^2}$, слѣдовательно [поелику $\sin.m^2 \pm \frac{h^2}{g^2}\cos.m^2 = \pm\frac{h^2}{g'^2}$, будетъ $\frac{g^2 \pm h^2 - g'^2}{g'^2} = \pm\frac{h'^2}{g'^2}$, $g^2 \pm h^2 - g'^2 = \pm h'^2$ и] $g^2 \mp h^2 = g'^2 \pm h'^2$, сирѣчь въ еллипсисѣ сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ дїаметровъ, а въ гиперболѣ разность сихъ квадратовъ есть постоянно одна и таже при всѣхъ точкахъ кривой.

(29) Удобно усмотрѣть можно, что $\sin.q = \sin.m.\cos.(q-m) + \cos.m.\sin.(q-m)$ [ибо q есть сумма угловъ m и $q-m$]; посему поставляя въ сїе уравненїе вмѣсто $\sin.m$, $\cos.m$, $\sin.(q-m)$ и $\cos.(q-m)$ ихъ величины, получишь $\sin.q\,[= \frac{h}{g'}\sqrt{\frac{g^2 - g'^2}{g^2 \mp h^2}} \cdot \sqrt{\pm 1} \cdot g\sqrt{\frac{g^2 - g'^2}{g^2 \mp h^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g^2 \pm h^2 - g'^2}} + \frac{g}{g'}\sqrt{\frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 \mp h^2}} \cdot h\sqrt{\frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 \mp h^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{g^2 \pm h^2 - g'^2}} = \frac{hg}{g'} \cdot \frac{g^2 - g'^2}{g^2 \mp h^2} \cdot \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{g^2 \pm h^2 - g'^2}} + \frac{hg}{g'} \cdot \frac{g'^2 \mp h^2}{g^2 \mp h^2} \cdot \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{g^2 \pm h^2 - g'^2}} = \frac{hg}{g'} \cdot \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{g^2 \pm h^2 - g'^2}} \cdot \frac{g^2 - g'^2 + g'^2 \mp h^2}{g^2 \mp h^2}] = \frac{hg\sqrt{\pm 1}}{g'\sqrt{g^2 \pm h^2 - g'^2}}$; откуда, по причинѣ что $g^2 \pm h^2 - g'^2 = \pm h'^2$, будешь имѣть [$\sin.q = \frac{hg\sqrt{\pm 1}}{g'\sqrt{\pm h'^2}} = \frac{h}{h'}\frac{g}{g'}$ и] $g'h'\sin.q = gh$; и такъ въ томъ и другомъ изъ двухъ коническихъ сѣченїй произведенїе двухъ сопряженныхъ дїаметровъ умноженное на синусъ угла, которой составляютъ сїи дїаметры, есть постоянно одно и то же при всѣхъ точкахъ кривой. [Что обыкновенно изображается такъ: параллелограммы описанные около еллипсиса или гиперболы суть равны прямоугольнику изъ осей той или другой кривой линеи].

(30) Теперь я положу, что діаметръ BF пресѣкаетъ какъ *нибудь хорду*, составляя съ нею, продолженною, естьли *то нужно*, уголъ q; въ семъ случаѣ предстоящее втораго члена въ преобразованномъ уравненіи уже не изчезнетъ, и оному преобразованному уравненію можно дать сей видъ:

$$Y^2 + \frac{FT - H}{E} Y + \frac{GT^2 - IT}{E} = 0.$$

Сіе уравненіе имѣетъ корнями линеи NM и Nm, и какъ по свойству уравненій третій членъ онаго равенъ произведенію корней, то будетъ $NM.Nm = \frac{GT^2 - IT}{E}$. И естьли чрезъ ту же точку N протянется другая хорда $M'm'$, которая съ BF дѣлаетъ уголъ q', то означивъ чрезъ E' то количество, въ которое обратится E, когда вмѣсто q возмется уголъ q', получишь такъ же $M'N.Nm' = \frac{GT^2 - IT}{E'}$. Слѣдовательно

$$NM.Nm : NM'.Nm' = E' : E = \sin.(q'-m)^2 + \frac{c}{a}\cos.(q'-m)^2 : \sin.(q-m)^2 + \frac{c}{a}\cos.(q-m)^2.$$

Чрезъ центръ параллельно симъ хордамъ протянемъ два полудіаметра λ, λ' и чрезъ точки, въ коихъ они пресѣкаютъ кривую линею, перпендикулярныя къ оси ординаты $\lambda' \sin.(q-m)$, $\lambda' \sin.(q'-m)$; отъ чего соотвѣтствующія имъ абсциссы, отъ центра взятыя, будутъ $\lambda\cos.(q-m)$, $\lambda\cos.(q'-m)$, и [по причинѣ уравненія кривой линеи $Y^2 = \pm\frac{b^2}{g^2}(g^2 - X^2)$] произойдетъ.

$$\lambda^2 \sin.(q-m)^2 = \pm\frac{b^2}{g^2}(g^2 - \lambda^2.\cos.(q-m)^2),$$

$$\lambda'^2 \sin.(q'-m)^2 = \pm\frac{b^2}{g^2}(g^2 - \lambda'^2 \cos.(q'-m)^2));$$

откуда удобно вывести можно, что

$$\sin.(q-m)^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos.(q-m)^2 = \pm\frac{b^2}{\lambda^2},$$

$$\sin.(q'-m)^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos.(q'-m)^2 = \pm\frac{b^2}{\lambda'^2},$$

и что, по причинѣ $\frac{c}{a} = \pm\frac{b^2}{g^2}$, имѣетъ мѣсто слѣдующая пропорція:

$$NM.Nm : NM'.Nm' = \lambda^2 : \lambda'^2.$$

Въ кругѣ $\lambda = \lambda'$, и $NM.Nm = NM'.Nm'$.

(31) Непреставая почитать точку B за одну изъ точекъ кривой линеи, положимъ, что BF проходитъ чрезъ фокусъ, и въ преобразованномъ уравненіи да будетъ $q = 180°$, $\sin.q = 0$, $\cos.q = -1$, $\sin.(q-m) = \sin.m$ и $\cos.(q-m) = -\cos.m$; отъ

чего произойдетъ $E = G = \frac{F}{2}[= a.\sin. m^2 + c.\cos. m^2 = a(\sin m^2 + \frac{c}{a}\cos. m^2)] = a(\sin. m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2)$.

$I = H [= 2ay\sin. m - (2cx+e)\cos. m = 2a(y\sin. m - \frac{1}{2a}(2cx+e)\cos. m = 2a(y\sin. m - \frac{c}{a}(x + \frac{e}{2c})\cos. m] = 2a(y\sin. m \mp \frac{b^2}{g^2}(x \mp g)\cos. m)$.

Но означивъ AH чрезъ β, BH чрезъ r', мы имѣемъ $y = r'\sin. m$, $x = \beta - r'\cos. m$ и $I = H[= 2a(r'\sin. m^2 \mp \frac{b^2}{g^2}(\beta - r'\cos. m \mp g)\cos. m)] = 2a(r'(\sin. m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2) \mp \frac{b^2}{g^2}(\beta \mp g)\cos. m)$.

Чего ради вставливая сїи величины въ преобразованное уравненїе, обратишь оное въ сїе

$$V + T - 2r' \pm \frac{2b^2}{g^2}\frac{(\beta \mp g)\cos. m}{\sin. m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2} = 0.$$

[Ибо, по причинѣ что $E = G = \frac{F}{2}$ и $I = H$, преобразованное уравненїе $V^2 + \frac{FT - H}{E}V + \frac{GT^2 - IT}{E} = 0$ перемѣнится сначала въ сїе $V^2 + \frac{2ET - H}{E}V + \frac{ET^2 - HT}{E} = 0$, или $V^2 + 2TV + T^2 - \frac{H}{E}(V+T) = 0$ или $(V+T)^2 - \frac{H}{E}(V+T) = 0$, или $V + T - \frac{H}{E} = 0$; потомъ же, поставляя въ мѣсто H и E ихъ величины, обратится въ слѣдующее

$$V + T - \frac{2a(r'(\sin. m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2) \mp \frac{b^2}{g^2}(\beta \mp g)\cos. m)}{a(\sin. m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2)} = 0,$$ то

есть въ предначертанное.]

И какъ r' есть часть прямой $V + T$ [ибо $q = 180^0$], то означивъ чрезъ r другую часть, получишь [$r' + r = V + T$, $V + T - 2r' = r - r'$ и] $r - r' \left[= \mp \frac{2b^2}{g^2}\frac{(\beta \mp g)\cos. m}{1 - \cos. m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2}\right] = \frac{2b^2}{g^2}\cdot\frac{(g \mp \beta)\cos. m}{1 - \frac{g^2 \mp b^2}{g^2}\cos. m^2}$, или поставляя $(g \mp \beta)^2$ вмѣсто $g^2 \mp h^2$ [понеже $(g \mp \beta)^2 = g^2 \mp h^2$, какъ то явствуетъ изъ 15 и 16 членовъ], будешь имѣть $r - r' = \frac{2b^2}{g^2}\cdot\frac{(g \mp \beta)\cos. m}{1 - \frac{(g \mp \beta)^2}{g^2}\cos. m^2}\left[= \frac{2b^2}{g^2}\frac{(g \mp \beta)\cos. m}{(1 - \frac{g \mp \beta}{g}\cos. m)(1 + \frac{g \mp \beta}{g}\cos. m)}\right] = \frac{b^2}{g}\left(\frac{1}{1 - \frac{g \mp \beta}{g}\cos. m} - \frac{1}{1 + \frac{g \mp \beta}{g}\cos. m}\right)$. [Ибо, положивъ $\frac{(g \mp \beta)\cos. m}{g} = p$, выдетъ сначала $r - r' = \frac{b^2}{g}\cdot\frac{2p}{(1+p)(1-p)}$; потомъ же положив

$\frac{2p}{(1-p)(1+p)} = \frac{A}{1-p} + \frac{B}{1+p}$, будетъ $\left.\begin{array}{r} A - Bp \\ B + Ap \\ -2p \end{array}\right\} = 0$; откуда найдется $A = 1$ и $B = -1$; и потому $r - r' = \frac{h^2}{g}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+p}\right)$, то есть $=$ преднаначертанному выраженію.]

Поелику же всякая прямая отъ фокуса до кривой протянутая называется *радіусомъ векторомъ*; то r' и r суть два радіуса вектора; и поелику они не иначе могутъ разнишься какъ токмо однимъ знакомъ сопровождающимъ cos. m, (*) и сверьхъ того, когда $m = 0$, должно быть $r' = \beta$ и $r = \pm 2g - \beta$, то будемъ имѣть

$$r' \left[= \frac{h^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g \mp \beta}{g} \cos. m}\right] = \frac{h^2}{g + (g \mp \beta) \cos. m}$$

$$\text{и } r \left[= \frac{h^2}{g} \cdot \frac{1}{1 - \frac{g \mp \beta}{g} \cos. m}\right] = \frac{h^2}{g - (g \mp \beta) \cos. m}.$$

[Въ самомъ дѣлѣ, когда $m = 0$, то r' сдѣлается $= \frac{h^2}{2g \mp \beta} = \beta$, и $r = \frac{h^2}{\pm\beta} = \pm 2g - \beta$; ибо извѣстно, что h есть средняя пропорціональная между β и $2g \mp \beta$, или все тоже, между $\pm\beta$ и $\pm 2g - \beta$.]

Сіи уравненія извѣстны подъ именемъ *полярныхъ уравненій* двухъ коническихъ сѣченій. (**)

(*) Ибо когда радіусы векторы r' и r имѣютъ одинаковыя выраженія въ углахъ, кои они составляютъ съ осью, принявъ за первой или начальной изъ нихъ радіусъ векторъ β; то по причинѣ что изъ сихъ угловъ, вмѣстѣ составляющихъ два прямыхъ, одинъ можетъ быть острой, а другой тупой, оныя выраженія радіусовъ векторовъ r' и r въ одномъ и томъ же углѣ m, дѣйствительно долженствуютъ разнишься, и притомъ не иначе, какъ токмо знакомъ сопровождающимъ cos. m.

(**) Но сей способъ находить оныя уравненія двухъ коническихъ сѣченій, сверьхъ малой точности, основанъ еще на строеніи геометрическомъ предложенномъ авторомъ въ 15. и 16 членахъ; чего ради мы здѣсь предложимъ другое средство къ достиженію оныхъ уравненій. И во первыхъ мы дадимъ опредѣленіе фокусамъ и параметру сихъ двухъ коническихъ сѣченій.

Фокусомъ называется такая на большей оси находящаяся точка, чрезъ которую проходящая ордината, въ два раза взятая, равняется третьей пропорціональной къ двумъ осямъ $2g$ и $2h$; сія третья пропорціональная обыкновенно *параметромъ оси* $2g$ называется.

Что бы послѣ сего опредѣленія фокусу найти мѣсто его, положи $Y = \frac{h^2}{g}$ и поставь въ уравненіе $Y^2 = \frac{h^2}{g^2}(2gX \mp X^2)$ на мѣсто Y сію оного количества величину; получишь $X^2 \mp 2gX = h^2$, и $X = \pm g \pm \sqrt{g^2 \mp h^2}$. Откуда явствуетъ, что сіи коническія сѣченія имѣютъ по два фокуса и что въ еллипсисѣ оные отъ начала находятся въ разстояніи $g + \sqrt{g^2 - h^2}$ и $g - \sqrt{g^2 - h^2}$, а въ гиперболѣ въ разстояніи $-g + \sqrt{g^2 + h^2}$ и $-g - \sqrt{g^2 + h^2}$. Сіе показываетъ, что въ еллипсисѣ оба разстоянія надлежитъ взять въ одну сторону, а въ гиперболѣ въ противныя. Положи меньшее разстояніе $\pm g \mp \sqrt{g^2 \mp h^2}$, гдѣ верхніе знаки имѣютъ мѣсто въ случаѣ еллипсиса, а нижніе въ случаѣ гиперболы, $= \beta$; будетъ $\pm g - \beta = \pm \sqrt{g^2 \mp h^2}$, $(g \mp \beta)^2 = g^2 \mp h^2$, $\mp(2g \mp \beta)\beta = \mp h^2$, и наконецъ $(2g \mp \beta)\beta = h^2$. И такъ меньшая или вторая ось есть средняя пропорціональная между разстояніями одного изъ фокусовъ до концовъ большей или первой оси.

Положи $g \mp \beta = e$; будетъ $e^2 = g^2 \mp h^2$. Количество e есть то, что *ексцентрицитетомъ* называется.

Теперь чтобы найти выраженіе радіуса вектора FM (черт. IV и V); я примѣчаю, что $\beta = \pm g \mp e$, ибо уравненіе $g \mp \beta = e$ даетъ $\mp \beta = -g + e$; откуда я нахожу $FP = X \mp g \pm e$ и $r^2 (= FM^2) = (X \mp g \pm e)^2 + Y^2 = X^2 \mp 2gX + g^2 \pm 2eX - 2ge + e^2 + \frac{h^2}{g^2}(2gX \mp X^2) = (1 \mp \frac{h^2}{g^2})X^2 \mp (2g \mp \frac{2h^2}{g})X + g^2 \pm 2eX - 2ge + e^2 = \frac{e^2X^2}{g^2} \mp \frac{2e^2}{g}X + e^2 \pm 2eX - 2ge + g^2$. Естьли $X < g$, то $eX < eg$ и $\frac{eX}{g} < e$; и потому $\frac{e^2X^2}{g^2} \mp \frac{2e^2X}{g} + e^2 = (e \mp \frac{eX}{g})^2$, и $r^2 = (e \mp \frac{eX}{g})^2 \pm 2eX - 2ge + g^2 = (e \mp \frac{eX}{g})^2 - 2(e \mp \frac{eX}{g})g + g^2 = (\pm g \mp (e \mp \frac{eX}{g}))^2$, ибо въ еллипсисѣ $e - \frac{eX}{g} < g$, а въ гиперболѣ $e + \frac{eX}{g} > g$. Слѣдовательно $r = \pm g \mp e + \frac{eX}{g}$. Естьли же $X > g$, то $eX > ge$ и $\frac{eX}{g} > e$, и потому $\frac{e^2X^2}{g^2} \mp \frac{2e^2X}{g^2} + e^2 = (\frac{eX}{g} \mp e)^2$ и $r^2 = (\frac{eX}{g} \mp e)^2 \pm 2eX - 2ge + g^2 = (\frac{eX}{g} \mp e)^2 \pm 2(\frac{eX}{g} \mp e)g + g^2 = (\frac{eX}{g} \mp e \pm g)^2$, ибо въ гиперболѣ $\frac{eX}{g} + e > g$. Слѣдовательно $r = \frac{eX}{g} \mp e \pm g$, что есть тоже, что и прежде найдено было.

Пусть другой радіусъ векторъ $fM = R$; будетъ $Pf = e + g \mp X = e \mp X + g$ и $R^2 = (e \mp X + g)^2 + \frac{h^2}{g^2}(2gX \mp X^2) = e^2 \mp 2eX + X^2 + 2ge \mp 2gX + g^2 + \frac{h^2}{g^2}(2gX \mp X^2) = (1 \mp \frac{h^2}{g^2})X^2 \mp (2g - \frac{2h^2}{g})X + e^2 \mp 2eX + 2ge + g^2 = \frac{e^2X^2}{g^2} \mp \frac{2e^2X}{g} + e^2 \mp 2eX + 2ge + g^2$. Есть-

ли $X < g$, то $\frac{eX}{g} < e$, и потому $\frac{e^2X^2}{g^2} \mp \frac{2e^2X}{g} + e^2 = (e \mp \frac{eX}{g})^2$ и $R^2 = (e \mp \frac{eX}{g})^2 + 2(e \mp \frac{eX}{g})g + g^2 = (e \mp \frac{eX}{g} + g)^2$. Слѣдовательно $R = e \mp \frac{eX}{g} + g$. Естьли же $X > g$, то $\frac{eX}{g} > e$, $\frac{e^2X^2}{g^2} \mp \frac{2e^2}{g}X + e^2 = (\frac{eX}{g} \mp e)^2$ и $R^2 = (\frac{eX}{g} \mp e)^2 \mp 2(\frac{eX}{g} \mp e)g + g^2 = (g \mp (\frac{eX}{g} \mp e))^2$, ибо въ еллипсисѣ, по причинѣ что $X - g < g$, $eX - eg < g^2$ и $\frac{eX}{g} - e < g$. Слѣдовательно $R = g \mp \frac{eX}{g} + e$, то есть тоже, что предъ симъ найдено было.

Откуда слѣдуетъ, что $R \pm r = g \mp \frac{eX}{g} + e \pm (\pm g \mp e + \frac{eX}{g}) = 2g$.

Наконецъ чтобы найти полярное уравненіе сихъ коническихъ сѣченій, я примѣчаю, что $X = \beta - r.\cos.\theta$, гдѣ θ означаетъ уголъ AFM; откуда, по причинѣ что $r = \pm g \mp e + \frac{eX}{g}$ и $\beta = \pm g \mp e$, я нахожу $r = \beta + \frac{e}{g}(\beta - r\cos.\theta)$, $gr = g\beta + e\beta - er\cos.\theta$ и $r = \frac{(g+e)\beta}{g+e.\cos.\theta} = \frac{(g+g\mp\beta)\beta}{g+(g\mp\beta)\cos.\theta} = \frac{b^2}{g+(g\mp\beta)\cos.\theta}$, то есть тоже, что нашелъ и авторъ.

(32) Въ гиперболѣ двѣ вѣтви простираются безконечно. Имѣются прямыя линеи, которыя къ онымъ непрестанно приближаются, но никогда ихъ не достигаютъ. Сіи линеи называются *асимптотами*. Естьли BE будетъ одна изъ сихъ асимптотъ, то надобно, что бы она не могла встрѣтиться съ гиперболою ни съ противоположенною оной, какую бы величину T ни дать; къ чему достигнешь, сдѣлавъ одинъ изъ корней преобразованнаго уравненія, разрѣшеннаго въ разсужденіи T, безконечно великимъ, или все тоже, уравнивъ нулю предстоящее количества T^2; (*) тогда уравненіе $G = 0$ [то есть $a\,\sin.m^2 + c.\cos.m^2 = 0$ или еще $\sin.m^2 \pm \frac{b^2}{g^2}\cos.m^2 = 0$] даетъ сіе $\frac{\sin.m^2}{\cos.m^2} = \mp\frac{b^2}{g^2}$, которое

(*) Сіе требуетъ лучшаго изъясненія. На сей конецъ преобразованное уравненіе $EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0$ я представляю въ семъ видѣ $GT - I + EV + \frac{EV^2 - HV + K}{T} = 0$; тогда, поелику надлежитъ, что бы по мѣрѣ какъ абсцисса T увеличивается, ордината V убывала и могла бы сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины, явствуетъ, что не положивъ $G = 0$ выдетъ равенство между количествомъ GT, которое можетъ превзойти всякое данное, и количествомъ $I - FV - \frac{EV^2 - HV + K}{T}$, которое сдѣлавшись меньше I, никогда не можетъ превзойти оное I, что нелѣпо; слѣдовательно $G = 0$

въ еллипсисѣ мѣста имѣть не можетъ, и дѣйствительно еллипсисъ не имѣетъ вѣтвей безконечныхъ; напротивъ же того для гиперболы оное уравненіе даетъ $\frac{\sin. n}{\cos. n} = \mp \frac{b}{g}$; и такимъ образомъ гипербола имѣетъ двѣ асимптоты, которыя геометрически опредѣляются такъ: Проведи чрезъ вершину гиперболы прямую, которая бы была параллельна и равна второй оси, и которая бы первою раздѣлялася на двѣ равныя части; потомъ протяни чрезъ центръ и концы параллельной двѣ прямыя; оныя продолженныя въ ту и другую сторону, будутъ асимптоты противоположенныхъ гиперболъ. (*)

(*) Но сіе геометрическое строеніе авторъ учинилъ произвольно, ни чемъ не доказавъ справедливости онаго; ибо уравненіе $G = o$ даетъ токмо уголъ m, которой асимптота BF съ осью AE составлять долженствуетъ, а не мѣсто точки, въ которой оная ось пресѣкать должна. И такъ мы здѣсь сему предложимъ доказательство.

Поелику мы доказали уже, что $G = o$, то преобразованное уравненіе перемѣнится въ сіе $\frac{EV^2 - HV + K}{T} + FV = I$; и поелику надлежитъ, чтобы по мѣрѣ какъ T увеличивается, ордината V убывала и могла бы сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины, то не положивъ $I = o$, выдетъ равенство между количествомъ $\frac{EV^2 - HV + K}{T} + FV$, которое можетъ учиниться меньше всякаго даннаго, и количествомъ I, которое непремѣнно пребываетъ, что нелѣпо; слѣдовательно $I = o$. Сіе уравненіе даетъ $2ay \sin. m - (2cx + e) \cos. m = o$; откуда выдетъ $2a(y \sin. m - \frac{c}{a}(x + \frac{e}{2c}) \cos. m) = o$, $2a(y \sin. m + \frac{b^2}{g^2}(x+g) \cos. m) = o$, $\frac{y \sin. m}{\cos. m} = -\frac{b^2}{g^2}(x+g)$ и $y = -\frac{b}{g}(x+g)$; сіе показываетъ, что ордината y бывъ протянута въ низъ, здѣсь должна быть протянута въ верьхъ; и тогда сіе послѣднее уравненіе сдѣлается $y = \frac{b}{g}(x+g)$; и поелику удовлетворить оному иначе не можно, какъ чрезъ строеніе авторомъ учиненное, то заключимъ, что сіе строеніе есть справедливое.

И теперь, поелику точка B, какъ начало координатъ T и V, можетъ быть взята на прямой BF вездѣ, гдѣ хочешь, можно положить, что она взята въ центрѣ H; и тогда выдетъ $y = o$, $x = -g$ и $H (= 2ay \sin. (q - m)) + (2cx + e) \cos. (q - m) = 2a(y \sin. (q - m)$

(33) *Я положу ординату* соотвѣтственную абсциссѣ BF параллельною *другой* асимптотѣ, *сирѣчь я* сдѣлаю $q = 2m$; отъ чего *я* имѣю

$$E = G = 0,$$
$$F = 2a(\sin. m^2 + \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2);$$
$$H = 2a(y \sin. m - \frac{b^2}{g^2}(x+g)\cos. m);$$
$$I = 2a(y \sin. m + \frac{b^2}{g^2}(x+g)\cos. m),$$
$$K = a(y^2 - \frac{b^2}{g^2}(x^2 + 2gx)).$$

Положивъ сїе *я* примѣчаю, что по мѣрѣ какъ T прибавляется, V убывать должна, не сдѣлавшись однакожъ нулемъ; сему условїю удовлетворишь, уравнивъ V дроби, которая бы знаменателемъ имѣла T, а числителемъ нѣкое постоянное количество. И тогда преобразованное уравненїе обратится въ сїе $FTV = K$, и H, I должны быть равны нулю; изъ чего найдется $y = 0$, $x = -g$ и $K = ah^2$. Но $\sin. m^2 = \frac{b^2}{g^2 + b^2}$, $\cos. m^2 = \frac{g^2}{g^2 + b^2}$; слѣдовательно $F = a . \frac{4b^2}{g^2 + b^2}$ и $TV = \frac{g^2 + b^2}{4}$. Въ семъ уравненїи гиперболы при асимптотахъ количество $\frac{g^2 + b^2}{4}$ называется *степенью* или *возвышенїемъ гиперболы.*

$+ \frac{c}{a}(x + \frac{e}{2c})\cos.(q - m)) = 2a(y \sin.(q - m) - \frac{b^2}{g^2}(x+g)\cos.(q - m))) = 0$; и преобразованное уравненїе перемѣнится въ сїе $EV^2 + FTV + K = 0$.

Положимъ, что ордината V параллельна другой асимптотѣ, то есть, что $q = 2m$; будетъ $E (= a \sin.(q - m)^2 + c . \cos.(q - m)^2) = a \sin. m^2 + c . \cos. m^2 = G = 0$. $F(= 2a \sin. m \sin.(q - m) - 2c \cos. m \cos.(q - m)) = 2a \sin. m^2 - 2c \cos. m^2 = 2a(\sin. m^2 - \frac{c}{a}\cos. m^2) = 2a(\sin. m^2 + \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2)$ и $K(= ay^2 + cx^2 + ex) = a(y^2 + \frac{c}{a}(x^2 + \frac{e}{c}x) = a(y^2 - \frac{b^2}{g^2}(x^2 + 2gx)) = ah^2$, и наконецъ преобразованное уравненїе обратится въ $TV = -\frac{b^2}{2(\sin. m^2 + \frac{b^2}{g^2}\cos. m^2)} = -\frac{b^2}{2(\frac{b^2}{g^2 + b^2} + \frac{b^2}{g^2} . \frac{g^2}{g^2 + b^2})} = -\frac{g^2 + b^2}{4}$, которое показываетъ, что V означавшая ординату MN здѣсь означаетъ ординату mN; и потому естьли ординату mN принять за положительную, то уравненїе приметъ сей видъ $TV = \frac{g^2 + b^2}{4}$, гдѣ ясно видно, что по мѣрѣ какъ T увеличивается, V убываетъ и можетъ учиниться меньше всякой по произволенїю данной величины, никогда не сдѣлавшись однакожъ нулемъ, какъ то свойство самой вещи требуетъ.

(34). Вообразимъ себѣ какую нибудь прямую усѣченную съ той и другой стороны асимптотами, и положимъ, какъ и прежде, $y = o$ и $x = -g$; то преобразованное уравненіе приметъ слѣдующій видъ $V^2 + \frac{1}{E} T V + \frac{K}{E} = o$, гдѣ $\frac{K}{E}$ равно произведенію корней или произведенію частей упомянутой прямой, содержащихся между асимптотою BF и двумя вѣтьвями кривой. И естьли оная упомянутая прямая будетъ перпендикулярна къ оси, то $q - m = 90^\circ$, $E = a$ и сіе произведеніе $= h^2$. Я обращаюсь теперь къ свойствамъ параболы.

(35) Въ сей кривой линеи [по причинѣ что $c = o$] уравненіе $FT - H = o$ сдѣлается $2a(T\,\text{fin}.m - y)\,\text{fin}.(q-m) - e.\text{cof}.(q-m) = o$, которое не можетъ имѣть мѣста при всякой величинѣ угла $q - m$, буде e не будетъ нуль (*); изъ чего заключить должно, что парабола центра не имѣетъ [ибо въ сей кривой e не равно нулю]. Тоже самое уравненіе есть и уравненіе служащее къ опредѣленію діаметра; и потому оно должно имѣть мѣсто при всякой величинѣ количества T; изъ чего получится $2a\,\text{fin}.m.\,\text{fin}(q-m) = o$, $2ay\,\text{fin}.(q-m) + e.\text{cof}.(q-m) = o$ и наконецъ $\text{fin}.m = o$; сіе послѣднее уравненіе показываетъ, что всякой діаметръ параболы есть параллеленъ оси, а второе даетъ $\frac{\text{fin}.q}{\text{cof}.q} = -\frac{e}{2ay}$. Когда $K = o$ [то есть когда точка B на кривой находится], то уравненіе $\frac{\text{fin}.q}{\text{cof}.q} = -\frac{e}{2ay}$ дастъ $[\text{fin}.q^2 = \frac{e^2}{4a^2y^2}(1 - \text{fin}.q^2)$ и$]\,\text{fin}.q^2 (= \frac{e^2}{4a^2y^2 + e^2}) \left[= \frac{e^2}{-\frac{4a^2.ex}{a} + e^2}\right] = \frac{e}{e - 4ax}$.

(*) Ибо, когда по причинѣ что оное уравненіе тоже значитъ, что и сіе $2a(T\,\text{fin}.m - y)\,\text{tang}.(q-m) - e = o$, положимъ, что должно имѣть мѣсто подобное. другое $2a(T\,\text{fin}.m - y)\,\text{tang}.(q'-m) - e = o$; то выдетъ $2a(T\,\text{fin}.m - y)(\text{tang}.(q'-m) - \text{tang}.(q-m)) = o$, и какъ множитель $\text{tang}.(q'-m) - \text{tang}.(q-m)$ не можетъ быть $= o$, то множитель $2a(T\,\text{fin}.m - y)$ долженъ быть $= o$, а потому такъ же и e должно быть $= o$.

Послѣ сего преобразованное уравненiе обратится въ $V^2 = \frac{1}{E} T$, гдѣ $\frac{1}{E} = \frac{-e}{a\, sin.\, q^2} [= -e : \frac{ae}{e - 4ax}] = 4x - \frac{e}{a}$. (*)

Но $-\frac{e}{a}$, или параметръ оси, есть четырекратный разстоянiя отъ вершины кривой линеи до фокуса; равнымъ образомъ и параметръ дiаметра есть четырекратный разстоянiя отъ вершины дiаметра до фокуса. (**)

(36) Я не приемлю болѣе Mm за удвоенную ординату, но полагаю ее хордою пресѣченною дiаметромъ BF; въ семъ положенiи имѣемъ всегда $m = 0$ и преобразованное уравненiе обратится въ сiе

$$V^2 - \frac{2ay\, sin.\, q + e\, .\, cos.\, q}{a\, sin.\, q^2} V + \frac{ET}{a\, sin.\, q^2} = 0,$$

гдѣ $\frac{eT}{a\, sin.\, q^2}$ есть произведенiе корней NM и Nm; почему естьли

(*) Здѣсь F и G равны нулю, потому что $c = 0$ и $m = 0$, а $H = 0$ потому что $\frac{sin.\, q}{cos.\, q} = -\frac{e}{2ay}$. Но авторъ приступилъ къ свойствамъ координатъ дiаметра опять не показавъ, какъ можно опредѣлить положенiе ихъ. Мы здѣсь сiе покажемъ.

Сначала въ уравненiи параболы $Y^2 = -\frac{e}{a} X$ сдѣлаемъ $-\frac{e}{a} = p$; что будетъ третья пропорцiональная къ абсциссѣ X и ординатѣ Y, и называется параметромъ оси; отъ чего уравненiе $\frac{sin.\, q}{cos.\, q} = -\frac{e}{2ay}$ обратится въ сiе $tang.\, q = \frac{p}{2y}$; и поелику точка B находится на кривой и x, y суть координаты оси, оное обратится еще въ слѣдующее $tang.\, q\ (= \frac{y^2}{x} : 2y) = \frac{y}{2x}$.

Теперь сдѣлай $AT = AD = x$ (черт. 2) и проведи BT; я говорю, что оная BT будетъ параллельна ординатамъ MN; ибо $tang.\, BTD = \frac{BD}{DT} = \frac{y}{2x} = tang.\, q$. И такъ положенiе ординатъ дiаметра BF опредѣлено.

(**) Ибо здѣсь параметръ дiаметра есть $\frac{1}{E}$, или $4x - \frac{e}{a} = 4x + p$, гдѣ p параметръ оси, и по строенiю въ 17 членѣ предложенному разстоянiе отъ вершины дiаметра до фокуса или радiусъ векторъ параболы $= x + \frac{p}{4}$. Мы ниже будемъ имѣть случай изъяснить сiе безъ помощи онаго строенiя.

представимъ себѣ другую хорду $M'm'$ проходящую чрезъ ту же точку N и составляющую съ BF уголъ q', мы будемъ имѣть пропорцію

$$NM \,.\, Nm : NM' \,.\, Nm' = \mathrm{sin.}\, q'^2 : \mathrm{sin.}\, q^2.$$

Протянувъ двѣ касательныя μT, $\mu' t$ (черт. X.) встрѣчающіяся съ осью въ T и t, и взаимно пресѣкающіяся въ u, и означивъ уголъ μTA чрезъ q и $\mu' tA$ чрезъ q', мы получимъ $\pi\mu = \mu T \,\mathrm{sin.}\, q$, $\pi T = 2 A\pi = \mu T \mathrm{cos.}\, q$, $\pi'\mu' = \mu' t \,\mathrm{sin.}\, q'$, $\pi' t = 2 A\pi' = \mu' t \,\mathrm{cos.}\, q'$; откуда имѣемъ

$$\mu T = -\frac{e \,.\, \mathrm{cos.}\, q}{2a \,.\, \mathrm{sin.}\, q^2}, \quad \mu' t = -\frac{e}{2a} \,.\, \frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'^2}.$$

[Ибо уравненіе $\pi\mu = \mu T \,\mathrm{sin.}\, q$ даетъ $\overline{\pi\mu}^2 = \overline{\mu T}^2 \,\mathrm{sin.}\, q^2$, или $-\frac{e}{a} A\pi = \overline{\mu T}^2 \,\mathrm{sin.}\, q^2$, гдѣ поставляя на мѣсто $A\pi$ равную величину $\frac{\mu T \,\mathrm{cos.}\, q}{2}$, получишь $-\frac{e}{2a} \mu T \,\mathrm{cos.}\, q = \overline{\mu T}^2 \,\mathrm{sin.}\, q^2$, и наконецъ $\mu T = -\frac{e}{2a} \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q^2}$; такъ же докажется, что и $\mu' t = -\frac{e}{2a} \frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'^2}$.]
Но $Tt\, [= \frac{1}{2}(\pi T - \pi' t)] = \frac{\mu T \,\mathrm{cos.}\, q - \mu' t \,\mathrm{cos.}\, q'}{2} \left[= \frac{1}{2}\left(-\frac{e}{2a} \frac{\mathrm{cos.}\, q^2}{\mathrm{sin.}\, q^2} + \frac{e}{2a} \,.\, \frac{\mathrm{cos.}\, q'^2}{\mathrm{sin.}\, q'^2}\right)\right]$
$= \frac{e}{4a}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q'^2}{\mathrm{sin.}\, q'^2} - \frac{\mathrm{cos.}\, q^2}{\mathrm{sin.}\, q^2}\right) \left[= \frac{e}{4a} \frac{\mathrm{sin.}\, q^2 \,.\, \mathrm{cos.}\, q'^2 - \mathrm{cos.}\, q^2 \,\mathrm{sin.}\, q'^2}{\mathrm{sin.}\, q^2 \,.\, \mathrm{sin.}\, q'^2} = \right.$
$\left. \frac{e}{4a}\left(\frac{\mathrm{sin.}\, q \,\mathrm{cos.}\, q' + \mathrm{cos.}\, q \,.\, \mathrm{sin.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q \,.\, \mathrm{sin.}\, q'}\right)\left(\frac{\mathrm{sin.}\, q \,.\, \mathrm{cos.}\, q' - \mathrm{cos.}\, q \,\mathrm{sin.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q \,.\, \mathrm{sin.}\, q'}\right)\right] = \frac{e}{4a} \,.\, \frac{\mathrm{sin.}\,(q+q')}{\mathrm{sin.}\, q \,\mathrm{sin.}\, q'}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'} - \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q}\right)$;
слѣдовательно въ треугольникѣ Tut сдѣлавъ $\mathrm{sin.}\,(q+q') : Tt = \mathrm{sin.}\, q' : Tu = \mathrm{sin.}\, q : tu$, получимъ

$$Tu = \frac{e}{4a \,\mathrm{sin.}\, q}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'} - \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q}\right), \quad tu = \frac{e}{4a \,\mathrm{sin.}\, q'}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'} - \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q}\right)$$

и слѣдственно $\mu u \left[= \mu T - Tu = -\frac{e}{2a} \,.\, \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q^2} - \frac{e}{4a \,\mathrm{sin.}\, q}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'} - \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q}\right)\right] = -\frac{e}{4a \,\mathrm{sin.}\, q}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q} + \frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'}\right)$, $\mu' u \left[= \mu' t + tu = -\frac{e}{2a} \,.\, \frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'^2} \right.$ $\left. + \frac{e}{4a \,\mathrm{sin.}\, q}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'} - \frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q}\right)\right] = -\frac{e}{4a \,\mathrm{sin.}\, q'}\left(\frac{\mathrm{cos.}\, q}{\mathrm{sin.}\, q} + \frac{\mathrm{cos.}\, q'}{\mathrm{sin.}\, q'}\right)$; и такъ $\mu u : \mu' u = \mathrm{sin.}\, q' : \mathrm{sin.}\, q$; откуда удобно можно заключить, что есть ли оныя касательныя параллельны хордамъ Mm, $M'm'$, мы будемъ имѣть

$$NM \,.\, Nm : NM' \,.\, Nm' = \overline{\mu u}^2 : \overline{\mu' u}^2 . \text{(*)}$$

(*) Но чтобы избѣгнуть ѳеоріи касательныхъ, то надлежитъ токмо вмѣсто касательныхъ μT, $\mu' t$ провести при концахъ μ, μ' діаметровъ тѣ прямыя, чрезъ кои мы во 2мъ примѣчаніи къ члену 35му опредѣлили положеніе ординатъ сихъ діаметровъ и кои онымъ ординатамъ параллельны: углы означенные авторомъ чрезъ q и q' здѣсь будутъ углы координатъ, и все

(37) Положимъ что BF (черт. IX и VIII) проходитъ чрезъ фокусъ. и въ преобразованномъ уравненіи сдѣлаемъ $q = 180°$; оное, по причинѣ что сдѣлается $E = G - a\,\text{ſin.}\,m^2$, $F = 2a\,\text{ſin.}\,m^2$, $H = 2ay\,\text{ſin.}\,m - e.\,\text{coſ.}\,m = I$, обратится въ $V + T = \frac{2ay\,\text{ſin.}\,m - e\,\text{coſ.}\,m}{a\,\text{ſin.}\,m^2}$. Но естьли полагая H фокусомъ, означимъ чрезъ r' радіусъ векторъ BH и чрезъ r радіусъ векторъ противоположенной, то получимъ $V + T = r + r'$, $y = r'\,\text{ſin.}\,m$; чего ради $r - r' [= V + T - 2r' = V + T - \frac{2y}{\text{ſin.}\,m}] = \frac{-e.\,\text{coſ.}\,m}{a\,\text{ſin.}\,m^2} = \frac{e}{2a}\left(\frac{1}{1 + \text{coſ.}\,m} - \frac{1}{1 - \text{coſ.}\,m}\right)$.

Сверьхъ того естьли приведемъ себѣ на память, что два радіуса вектора не иначе могутъ разниться между собою, какъ токмо знакомъ сопровождающимъ $\text{coſ.}\,m$, и что положивъ $m = 0$, долженъ r' быть четверть параметра, а r безконеченъ; то увидимъ, что изъ преднайденнаго уравненія непосредственно должно выдти

$$r = -\frac{e}{2a}\,\frac{1}{1 - \text{coſ.}\,m} \text{ и } r' = -\frac{e}{2a}\,\frac{1}{1 + \text{coſ.}\,m}. \quad (*)$$

---

* прочее, имъ предложенное, останется во всей своей силѣ, кромѣ только заключенія, которое здѣсь выразить надлежитъ такъ: откуда удобно заключить можно, что естьли оныя направленія μu, $\mu' u$ ординатъ діаметровъ, чрезъ точки μ, μ' проходящихъ, будутъ параллельны хордамъ Mm, $M'm'$, мы будемъ имѣть

$$NM.\,Nm : NM'.\,Nm' = \overline{\mu u}^2 : \overline{\mu' u}^2.$$

(*) Но сей способъ находить полярное уравненіе параболы имѣетъ тѣже неудобства, что и употребленный авторомъ способъ находить полярныя уравненія еллипсиса и гиперболы; чего для мы здѣсь предложимъ другой, и вопервыхъ дадимъ опредѣленіе фокусу параболы.

Фокусомъ параболы называется такая на оси находящаяся точка, чрезъ которую проходящая ордината, двукратно взятая, равняется третьей пропорціональной соотвѣтствующей абсциссы и ординаты, или все тоже параметру.

Чтобы послѣ сего опредѣленія фокусу найти мѣсто его, положи $Y = \frac{p}{2}$ и поставь на мѣсто Y въ уравненіе параболы $Y^2 = pX$; чрезъ что получишь $X = \frac{p}{4}$.

Теперь чтобы найти выраженіе радіуса вектора FM (черт. VI), я примѣчаю, что $FP = X - \frac{p}{4}$, когда $X > \frac{p}{4}$, и $= \frac{p}{4} - X$, когда $X < \frac{p}{4}$;

Наконецъ двѣ вѣтви параболы, которыя безконечно простираются, имѣютъ ли асимптоты, или нѣтъ? я говорю, нѣтъ, ибо для сего надлежитъ, чтобы въ преобразованномъ уравненіи положивъ T безконечно великимъ, выходило V равно нулю и TV количеству постоянному; чего здѣсь не получается, понеже изъ $G = o$, имѣемъ ſin. $m = o$ и $F = o$. (*)

откуда я нахожу $\overline{FM}^2 (= \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2) = Y^2 + (\pm X \mp \frac{p}{4})^2 = pX + (\pm X \mp \frac{p}{4})^2 = X^2 + \frac{pX}{2} + (\frac{p}{4})^2 = X^2 + 2 \cdot \frac{p}{4} \cdot X + (\frac{p}{4})^2$, и наконецъ $r (= FM) = X + \frac{p}{4}$.

Откуда слѣдуетъ, что третья пропорціональная абсциссы и ординаты діаметра чрезъ точку M проходящаго, или все тоже, параметръ сего діаметра есть четырекратный радіуса вектора, или разстоянія вершины діаметра до фокуса.

Ибо когда по найденному выше $\frac{V^2}{T} = \frac{I}{G} = 4X - \frac{e}{a}$, то поставивъ p на мѣсто $-\frac{e}{a}$, получишь $\frac{V^2}{T} = 4X + p$, что и есть четырекратная величина радіуса вектора r.

Наконецъ чтобы найти полярное уравненіе параболы, я примѣчаю, что PF или $\pm X \mp \frac{p}{4} = \mp r \operatorname{coſ.} \theta$, гдѣ θ уголъ AFM; откуда нахожу $X = \frac{p}{4} - r \operatorname{coſ.} \theta$; но $r = X + \frac{p}{4}$, слѣдовательно $r = \frac{p}{2} - r \operatorname{coſ.} \theta$, $r (1 + \operatorname{coſ.} \theta) = \frac{p}{2}$ и $r = \frac{p}{2(1 + \operatorname{coſ.} \theta)}$.

(*) Или лучше: Понеже мы показали, что для асимптотъ надлежитъ быть какъ $G = o$, такъ и $I = o$; но здѣсь изъ того что $G = o$ выходитъ ſin. $m = o$, и потому $I = -e$; что само себѣ противорѣчитъ, слѣд. парабола асимптотъ не имѣетъ.

О нѣкоторомъ общемъ свойствѣ кривыхъ линей всѣхъ порядковъ.

(38) Ежели имѣешь кривую линею втораго порядка съ двумя прямыми AB, MN (черт. XI) взаимно пресѣкающимися, которой уравненіе между AP, $= X$, и PM, $= Y$, можетъ быть представлено такъ $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX = 0$ (*); то AP и PB будутъ два корня сего уравненія разрѣшеннаго въ разсуждени X, и PM, PN два корня того же уравненія разрѣшеннаго въ разсужденіи Y. И чтобы опредѣлить положеніе прямой AB, то надлежитъ въ ономъ уравнени положить $Y = 0$; что дастъ $cX^2 + eX = 0$, и корни сего послѣдняго уравненія, $X = 0$ и $X = -\frac{e}{c}$, будутъ служить ко опредѣленію той и другой изъ точекъ A и B, и будетъ PB [$=$ AB $-$ AP] $= -\frac{e}{a} - X$ и AP. BP [$= (-\frac{e}{c} - X)X$] $= \frac{eX + cX^2}{c}$. (**) Но по свойству уравненій коли-

(*) Хотя въ уравненіи $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX = 0$ не достаетъ послѣдняго члена, однако оно не менѣе есть общее и принадлежащее ко всѣмъ кривымъ линеямъ втораго порядка, лишь бы только начало абсциссъ полагалося на самой кривой; ибо когда сіе положится, то по причинѣ что тогда $Y = 0$ долженъ сдѣлать и $X = 0$, общее уравненіе $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$ обратится въ преднаписанное авторомъ.

(**) У количества $\frac{eX + cX^2}{c}$ упущенъ знакъ — для того, что здѣсь разсуждается единственно токмо о содержаніи произведеній MP. NP и AP. BP. Въ прочемъ естьли бы авторъ сдѣлалъ чертежъ, какой сдѣлать предписываетъ уравненіе, то бы въ произведеніи AP. BP знака — и не вышло. Въ самомъ дѣлѣ, поелику изъ положенія $Y = 0$, выходитъ $X = 0$ и $X = -\frac{e}{c}$, то слѣдуетъ, что прямую AB отъ точки A надлежитъ взять въ лѣвую сторону, какъ учинено (въ черт. 3), и сдѣлавъ сіе, будешь уже имѣть $AB = \frac{e}{c}$; потомъ взявъ положительную абсциссу AP, $= X$, выдетъ произведеніе AP. BP $= (\frac{e}{c} + X)X = \frac{eX + cX^2}{c}$, которому соотвѣтствующее произведеніе ординатъ есть MP. NP, и такъ далѣе.

чество $\frac{c X + e X^2}{a}$ есть произведенїе двухъ величинъ количества Y; слѣдовательно $MP . NP : AP . BP = c : a$; откуда произходитъ предложенїе, которое мы доказали выше другимъ образомъ.

(39) Естьли будетъ кривая линея третьяго порядка (черт. XII) и уравненїе ея представится такъ:

$$aY^3 + (bX + c)Y^2 + (dX^2 - eX + f)Y + gX^3 + hX^2 + iX = o,$$

то AP, BP, DP будутъ корни сего уравненїя разрѣшеннаго въ разсужденїи X, а MP, OP, NP корни того же уравненїя разрѣшеннаго въ разсужденїи Y; и естьли сдѣлаешь $Y = o$, то выдетъ уравненїе $gX^3 + hX^2 + iX = o$ и три корня онаго, $X = o$, $X = -\frac{h}{2g} - \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$, $X = -\frac{h}{2g} + \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$, будутъ служить ко опредѣленїю точекъ A, B, D, и будетъ имѣть $BP = X + \frac{h}{2g} + \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$, $DP = X + \frac{h}{2g} - \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$ (*); откуда выдетъ $AP. BP. DP = \frac{gX^3 + hX^2 + iX}{g}$. Но по свойству уравненїй количество $\frac{gX^3 + hX^2 + iX}{a}$, взятое съ противнымъ знакомъ, равно произведенїю корней уравненїя разрѣшеннаго въ разсужденїи Y, то есть равно MP. OP. NP; слѣдовательно

$$MP . OP . NP : AP . BP . DP = g : a.$$

(*) Изъ чертежа приложеннаго авторомъ сего совсѣмъ произвести не можно, развѣ у выраженїя линеи DP не принимать въ разсужденїе знакъ; но и тогда останется неудобство состоящее въ томъ, что большая величина $-\frac{h}{2g} - \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$ изображаетъ меньшую линею AB, а меньшая величина $-\frac{h}{2g} + \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$ изъявляетъ большую линею AD. Всѣ сїи неудобства уничтожатся взятїемъ приличнаго уравненїю чертежа, какъ то мы учинили въ предъидущемъ примѣчанїи.

О кривыхъ линеяхъ вообще какого ниесть порядка.

(40) Но не останавливаясь болѣе на сихъ частныхъ случаяхъ, станемъ разсматривать кривыя линеи всѣхъ порядковъ, какъ то кривыя порядка n; и естьли въ уравненіе оныхъ поставимъ величины полученныя изъ 1 и 2 уравненія [член. 20], то будемъ имѣть уравненіе такого же вида, какъ и предложенное или данное, и которое мы можемъ изобразить такъ:

$$V^n + \alpha V^{n-1} + \beta V^{n-2} + \gamma V^{n-3} + \ldots + \varsigma V + \tau = 0,$$

гдѣ $\alpha = a1T + b1$, $\beta = a2T^2 + b2T + c2$, $\gamma = a3T^3 + b3T^2 + c3T + d3$, $\ldots \tau = anT^n + bnT^{n-1} + cnT^{n-2} + \ldots + tn$.

Причемъ должно помнить, что во всякомъ таковомъ уравненіи, каково есть предъидущее, предстоящее втораго члена съ противнымъ знакомъ, то есть $-\alpha$, равно суммѣ корней; предстоящее третьяго члена, то есть β, равно суммѣ произведеній корней взятыхъ по два; предстоящее четвертаго члена съ противнымъ знакомъ, то есть $-\gamma$, равно суммѣ произведеній корней взятыхъ по три; и такъ далѣе до послѣдняго члена τ, которой съ противнымъ знакомъ, буде n есть не четное число, и съ тѣмъ же, буде четное, равенъ произведенію всѣхъ корней.

(41) Называется *центромъ* кривой линеи точка, которою всякая прямая, чрезъ нея проходящая, разсѣкается такимъ образомъ, что части оной прямой содержащіяся между сею точкою и различными вѣтвями кривой линеи съ одной стороны, равны суть частямъ содержащимся между тою же самою точкою и вѣтвями кривой съ другой стороны, каждая каждой. И дабы ордината V проходящая чрезъ сію точку удовлетворяла совершенно сему условію, надлежитъ, чтобы она опредѣлялася уравне-

нїемъ, котораго всѣ члены четной степени; что всегда произойдетъ, хотя бы число n было четное или не четное, когда уравнишь нулю предстоящїя членовъ четныхъ, по мѣсту ими занимаемому, то есть когда сдѣлаешь $\alpha = 0$, $\gamma = 0$. и такъ далѣе. Въ первомъ случаѣ уравненїе обратится въ сїе

$$V^n + \beta V^{n-2} + \ldots\ldots + \rho V^2 + \tau = 0,$$

котораго всѣ члены суть четной степени. Въ другомъ же случаѣ, то есть когда n число нечетное, уравненїе обратится въ слѣдующее

$$V^n + \beta V^{n-2} + \ldots\ldots \varsigma V = 0,$$

кое раздѣленное на V даетъ другое, котораго всѣ члены будутъ четной степени. И такъ въ томъ и другомъ случаѣ разрѣшенное уравненїе дастъ $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$ корней сего вида $V^2 = \psi$; откуда для V получатся равныя величины по ту и другую сторону центра. Уравненїя же $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ и такъ далѣе, должны имѣть мѣсто при всякой величинѣ угла $q - m$, какую бы ему ни дать.

(42) *Дїаметры* раздѣляются на роды: Всякая линея, въ разсужденїи которой сумма корней положительныхъ равна суммѣ отрицательныхъ, есть дїаметръ перваго рода. Свойство его опредѣлится чрезъ уравненїе $\alpha = 0$, которое будучи первой степени, показываетъ, что сей дїаметръ есть прямая линея. Всякая линея, въ разсужденїи которой сумма произведенїй положительныхъ корней, взятыхъ по два, равна суммѣ произведенїй отрицательныхъ, есть дїаметръ втораго рода. Свойство его опредѣлится чрезъ уравненїе $\beta = 0$, которое будучи второй степени, показываетъ, что сей дїаметръ есть кривая линея втораго порядка. Всякая линея, въ разсужденїи которой сумма произведенїй положительныхъ корней, взятыхъ по три, равна суммѣ произведенїй отрицательныхъ, есть дїаметръ третьяго рода. Свойство его опредѣлится чрезъ уравненїе $\gamma = 0$, которое будучи третьей степени, показываетъ, что сей дїаметръ есть кривая линея третьяго порядка; и такъ далѣе.

Что же принадлежитъ до *дїаметра совершеннаго*, то есть такого, которой бы имѣлъ сколько ординатъ положительныхъ, столько же и отрицательныхъ, равныхъ *каждая каждой*; то преобразованное уравненїе надлежитъ обратить въ такое, которое бы другихъ, кромѣ четной степени, членовъ не имѣло. И ежели между синусами и косинусами угловъ m и $q-m$ возможно будетъ найти нѣкую взаимность, отъ коей бы, по постановленїи сихъ угловъ во всѣ члены, произошелъ въ членахъ нечетной степени множитель, одинъ или многїе; то по уравниванїи каждаго изъ сихъ множителей нулю, оные члены неминуемо истребятся, и построится столько дїаметровъ, сколько будетъ множителей. Могло бы случиться, что отъ нѣкоторыхъ изъ сихъ уравниванїй нулю, уничтожилися и члены четной степени; то естьли бы уничтожилися всѣ, то бы уравниванїе множителя нулю не служило къ построенїю дїаметра. Когда уравненїе есть четной степени, то вопросъ о опредѣленїи совершенныхъ дїаметровъ разрѣшается чрезъ тѣ же самыя уравненїя, что и вопросъ о опредѣленїи центровъ, съ тою разностїю, что въ первомъ уравненїя $\alpha=o$, $\gamma=o$ и такъ далѣе, должны быть справедливы по всей протяженности количества T, то есть должны имѣть мѣсто, какой бы величины количество T ни было; вмѣсто того въ вопросѣ о опредѣленїи центровъ, оныя уравненїя должны имѣть мѣсто, какой бы величины уголъ $q-m$ ни былъ.

О кривыхъ линеяхъ третьяго порядка.

(43) Чтобы приложить сїи начала къ кривымъ линеямъ третьяго порядка, коихъ общее уравненїе можетъ быть представлено такъ

$$aY^3+(bX+c)Y^2+(dX+eX+f)Y+gX^3=hX^2+iX+k=o,$$

мы учинимъ въ сїе уравненїе вставливанїя предписываемыя членомъ зомъ [то есть произведемъ слѣдующее вычисленїе

$$Y = V\,\text{ſin.}\,(q-m) + T\,\text{ſin.}\,m - y$$

$$Y = V\text{ſin.}\mu + T\text{ſin.}m - y,\; Y^2 = V^2\text{ſin.}\,\mu^2 + 2TV\text{ſin.}\mu\text{ſin.}m + T^2\text{ſin.}\,m^2 - 2yV\text{ſin.}\mu - 2yT\text{ſin.}\,m + y^2$$

или, полагая $q - m = \mu$,

$$X = T\,\text{coſ.}\,m - V\,\text{coſ.}\,(q-m) + x\,.$$

$$X = T\text{coſ.}m - V\text{coſ.}\mu + x,\; X^2 = T^2\text{coſ.}m^2 - 2TV\text{coſ.}\mu\text{coſ.}m + V^2\text{coſ.}\mu^2 + 2xT\text{coſ.}m - 2xV\text{coſ.}\mu + x^2$$

$$aY^3 = +aV^3\,\text{ſin.}\,\mu^3 + 3aV^2T.\text{ſin.}\,\mu^2\,\text{ſin.}\,m + 3aVT^2\,\text{ſin.}\,\mu\,\text{ſin.}\,m^2 + aT^3\,\text{ſin.}\,m^3 - 3ayV^2\,\text{ſin.}\,\mu^2 - 6ayVT\text{ſin.}\,\mu\,\text{ſin.}\,m - 3ayT^2.\text{ſin.}\,m^2 + 3ay^2V\,\text{ſin.}\,\mu. + 3ay^2T\,\text{ſin.}\,m - ay^3$$

$$bXY^2 = -bV^3\text{ſin.}\mu^2\text{coſ.}\mu - 2bV^2T.\text{ſin.}\mu\text{coſ.}\mu\text{ſin.}m - bVT^2\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{ſin.}\,m^2 + 2byV^2\text{ſin.}\mu\text{coſ.}\mu + 2byVT.\text{coſ.}\mu\text{ſin.}m - by^2V\,\text{coſ.}\,\mu$$

$$+ bV^2T.\,\text{ſin.}\,\mu^2.\text{coſ.}m + 2bVT^2\text{ſin.}\mu\text{ſin.}m.\text{coſ}m + bT^3\text{ſin.}m^2.\,\text{coſ.}m - 2byVT\text{ſin}\,\mu.\text{coſ.}m - 2byT^2\text{ſin.}m.\text{coſ.}m + by^2T\text{coſ.}\,m$$

$$+ bxV^2\,\text{ſin}\,\mu^2 + 2bxVT\text{ſin.}\mu\,\text{ſin.}m + bxT^2\text{ſin.}m^2 - 2bxyV\,\text{ſin.}\,\mu - 2bxyT\,\text{ſin.}\,m + bxy^2$$

$$cY^2 = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; + cV^2\,\text{ſin.}\,\mu^2 + 2cVT\,\text{ſin}\,\mu\,\text{ſin.}\,m + cT^2\text{ſin.}m^2 - 2cyV\,\text{ſin.}\,\mu - 2cyT\,\text{ſin.}\,m + cy^2$$

$$dX^2Y = +dV^3\,\text{ſin.}\mu\text{coſ.}\mu^2 - 2dV^2T.\text{ſin.}\mu.\text{coſ.}\mu\text{coſ.}m + dVT^2\,\text{ſin}\,\mu\,.\,\text{coſ.}\,m^2 - 2dxV^2\text{ſin.}\mu\text{coſ}\,\mu + 2dxVT\text{ſin.}\mu\,\text{coſ.}m + dx^2V\,\text{ſin.}\,\mu$$

$$+ dV^2T.\,\text{coſ.}\mu^2.\,\text{ſin.}\,m - 2dVT^2\text{coſ.}\mu\text{ſin.}m.\text{coſ.}m + dT^3\text{ſin.}m.\,\text{coſ.}m^2 - 2dxVT\text{coſ.}\mu\text{ſin.}m + 2dxT^2\text{ſin.}m.\text{coſ.}m + dx^2T.\,\text{ſin}\,m$$

$$- dyV^2\,\text{coſ.}\,\mu^2 + 2dyVT.\text{coſ.}\mu\text{coſ.}m - dyT^2\text{coſ}\,m^2 + 2dxyV\,\text{coſ.}\,\mu - 2dxyT.\text{coſ.}m - dx^2y$$

$$eXY = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; + eVT\,\text{ſin.}\,\mu\,\text{coſ.}m + eT^2.\text{ſin.}m.\text{coſ.}m - eyT.\,\text{coſ.}\,m$$

$$- eV^2\text{ſin.}\,\mu.\,\text{coſ.}\,\mu - eVT.\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{ſin.}\,m + eyV.\,\text{coſ.}\,\mu$$

$$+ exV.\,\text{ſin.}\,\mu + exT\,\text{ſin.}\,m - exy$$

$$fY = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; fV\,\text{ſin.}\,\mu + fT.\,\text{ſin.}\,m - fy$$

$$gX^3 = -gV^3\text{coſ.}\,\mu^3 + 3gV^2T\,\text{coſ.}\,\mu^2\,\text{coſ.}\,m - 3gVT^2\,\text{coſ.}\,\mu.\text{coſ.}m^2 + gT^3\,\text{coſ.}\,m^3 + 3gxV^2.\,\text{coſ.}\,\mu^2 - 6gxVT.\text{coſ.}\mu\text{coſ.}m + 3gxT^2.\text{coſ.}m^2 - 3gx^2V\,\text{coſ.}\,\mu + 3gx^2T.\,\text{coſ.}\,m + gx^3$$

$$hX^2 = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; hV^2\,\text{coſ.}\,\mu^2 - 2hVT\text{coſ.}\,\mu\,\text{coſ}\,m + hT^2.\text{coſ.}m^2 - 2hxV\,\text{coſ.}\,\mu + 2hxT.\text{coſ.}m + hx^2$$

$$iX = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; - iV\,\text{coſ.}\,\mu + iT.\,\text{coſ.}\,m + ix$$

$$k = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; + k\,]$$

Откуда произойдетъ преобразованное уравненїе

$$EV^3+(FT+G)V^2+(HT^2+IT+K)V+LT^3+MT^2+NT+P=0;$$

въ которомъ, полагая для краткости $q-m=\mu$,

$$E=a\sin.\mu^3-\sin.\mu\cos.\mu(b\sin.\mu-d\cos.\mu)-g\cos.\mu^3,$$

$$L=a\sin.m^3+\sin.m.\cos.m(b\sin.m+d\cos.m)+g\cos.m^3,$$

$$F=3a\sin.m.\sin.\mu^2+b\sin.\mu(\cos.m\sin.\mu-2\sin.m.\cos.\mu)$$
$$+d\cos.\mu(\sin.m.\cos.\mu-2\cos.m.\sin.\mu)+3g\cos.m.\cos.\mu^2.$$

$$H=3a\sin.m^2.\sin.\mu-b\sin.m(\sin.m.\cos.\mu-2\cos.m.\sin.\mu)$$
$$+d\cos.m(\cos.m.\sin.\mu-2\sin.m.\cos.\mu)-3g\cos.m^2\cos.\mu;$$

$$G=c\sin.\mu^2-e\sin.\mu\cos.\mu+h\cos.\mu^2-3(ay\sin.\mu^2-gx\cos.\mu^2)$$
$$+b\sin.\mu(x\sin.\mu+2y\cos.\mu)-d\cos.\mu(y\cos.\mu+2x\sin.\mu),$$

$$M=c\sin.m^2+e\sin.m.\cos.m+h\cos.m^2-3(ay\sin.m^2-gx\cos.m^2)$$
$$+b\sin.m(x\sin.m-2y\cos.m)-d\cos.m(y\cos.m-2x\sin.m),$$

$$I=2(c\sin.m\sin.\mu-h.\cos.m.\cos.\mu)-6(ay\sin.m.\sin.\mu+gx\cos.m.\cos.\mu)$$
$$+e(\cos.m.\sin.\mu-\sin.m.\cos.\mu)+2b(x\sin.m\sin.\mu+y(\sin.m.\cos.\mu$$
$$-\cos.m.\sin.\mu))+2d(y\cos.m\cos.\mu+x(\cos.m.\sin.\mu-\sin.m.\cos.\mu)),$$

$$K=3(ay^2\sin.\mu-gx^2\cos.\mu)-b(y^2\cos.\mu+2xy\sin.\mu)+(f-2cy)\sin.\mu$$
$$-(i+2hx)\cos.\mu+e(x\sin.\mu+y\cos.\mu)+d(x^2\sin.\mu+2xy\cos.\mu),$$

$$N=3(ay^2\sin.m+gx^2\cos.m)+b(y^2\cos.m-2xy\sin.m)+(f-2cy)\sin.m$$
$$+(i+2hx)\cos.m+e(x\sin.m-y\cos.m)+d(x^2\sin.m-2xy\cos.m),$$

$$P=-ay^3+(bx+c)y^2-(dx^2+ex+f)y+gx^3+hx^2+ix+k.$$

(44) Что бы найти центры кривыхъ линей третьяго порядка, то [поелику доказано было, что для сего надлежитъ уравнять нулю предстоящїя четныхъ членовъ преобразованнаго уравненїя $EV^3+(FT+G)V^2+(HT^2+IT+K)V+LT^3+MT^2+NT+P=0$], мы составимъ уравненїя

$$FT+G=0,\ LT^3+MT^2+NT+P=0,$$

изъ коихъ первое долженствуя имѣть мѣсто, какой бы величины уголъ μ ни былъ, даетъ

$$(3\,a \sin. m + b \cos. m)\,T + c - 3\,a\,y + b\,x = 0,$$
$$(3\,g \cos. m + d \sin. m)\,T + h + 3\,g\,x - d\,y = 0,$$
$$(b \sin. m + d \cos. m)\,2\,T + e - 2\,b\,y + 2\,d\,x = 0, \; (*)$$

которыя уравненія можно привести гораздо къ простѣйшему виду, дѣлая x и y нулями (**). И тогда, по исключеніи изъ сихъ уравненій количества T, получится

$$c\,(3\,g \cos. m + d \sin. m) = h\,(3\,a \sin. m + b \cos. m),$$
$$2\,c\,(b \sin. m + d \cos. m) = e\,(3\,a \sin. m + b \cos. m,$$

(*) Чтобы сіе яснѣе показать, поставимъ въ уравненіе $FT + G = 0$ на мѣсто F и G ихъ величины, и получивъ уравненіе $(3\,a \sin. m . \sin. \mu^2 + b \sin. \mu\,(\cos. m . \sin. \mu - 2 \sin. m \cos. \mu) + d \cos \mu\,(\sin. m . \cos. \mu - 2 \cos. m . \sin. \mu) + 3\,g \cos. m \cdot \cos. \mu^2)\,T + c \sin. \mu^2 - e \sin \mu \cos. \mu + h \cos. \mu^2 - 3\,(a\,y \sin. \mu^2 - g\,x \cos. \mu^2) + b \sin. \mu\,(x \sin. \mu + 2\,y \cos. \mu) - d \cos \mu\,(y \cos. \mu + 2\,x \sin \mu) = 0$, расположимъ оное въ разсужденіи угла μ; отъ чего будемъ имѣть

$$\left\{\begin{matrix} +3\,a\,T \sin. m \\ +b\,T \cos. m \\ +c \\ -3\,a\,y \\ +b\,x \end{matrix}\right\} \sin. \mu^2 + \left\{\begin{matrix} +3\,g\,T \cos. m \\ +d\,T \sin. m \\ +h \\ +3\,g\,x \\ -d\,y \end{matrix}\right\} \cos. \mu^2 + \left\{\begin{matrix} -2\,b\,T \sin. m \\ -2\,d\,T \cos. m \\ -e \\ +2\,b\,y \\ -2\,d\,x \end{matrix}\right\} \sin. \mu . \cos. \mu = 0.$$

Означимъ сіе уравненіе такимъ образомъ $A \sin. \mu^2 + B \cos. \mu^2 + C \sin \mu \cos \mu = 0$, и премѣнимъ его на сіе $A \operatorname{tang}. \mu + B \cot. \mu + C = 0$, или еще на слѣдующее $A \operatorname{tang}. \mu^2 + C \operatorname{tang} \mu + B = 0$, поставляя вмѣсто $\cot. \mu$ равную величину $\frac{1}{\operatorname{tang} \mu}$; и какъ сіе уравненіе должно быть справедливо при всякой величинѣ угла μ, то имѣетъ мѣсто подобное другое уравненіе $A \operatorname{tang}. \mu'^2 + C \operatorname{tang}. \mu' + B = 0$; вычтя одно изъ другаго, выдетъ $A\,(\operatorname{tang}. \mu^2 - \operatorname{tang}. \mu'^2) + C\,(\operatorname{tang}. \mu - \operatorname{tang}. \mu') = 0$, или $A\,(\operatorname{tang}. \mu + \operatorname{tang} \mu') + C = 0$, а потому такъ же выдетъ и подобное другое $A\,(\operatorname{tang}. \mu + \operatorname{tang}. \mu'') + C = 0$; вычтя одно изъ другаго, произойдетъ $A\,(\operatorname{tang} \mu' - \operatorname{tang} \mu'') = 0$; но какъ $\operatorname{tang}. \mu' - \operatorname{tang}. \mu''$ не можетъ быть $= 0$, то $A = 0$, а потому для уравненія $A\,(\operatorname{tang}. \mu + \operatorname{tang}. \mu') + C = 0$, и $C = 0$, и наконецъ для уравненія $A \operatorname{tang}. \mu^2 + C \operatorname{tang}. \mu + B = 0$, и $B = 0$. И такъ произойдутъ три уравненія авторомъ написанныя.

(**) Для сего стоитъ токмо линею BF, означенную чрезъ T, положить проходящею чрезъ начало A и точку B взять въ самомъ началѣ A, или все тоже, начало, которое всегда зависитъ отъ нашего произволенія, какъ координатъ X, Y, такъ и координатъ T, V, взять въ точкѣ H.

и слѣдовательно

$$\frac{\text{fin. } m}{\text{cof. } m} = \frac{bb - 3cg}{cd - 3ab} = \frac{be - 2cd}{2bc - 3ae}.$$

И такъ будемъ имѣть первое условное уравненїе

$$9aeg - 6bcg + 2b^2h - 6adh + 2cd^2 - bd^2e = 0;$$

другое же найдется поставляя въ уравненїе $LT^3 + MT^2 + NT + P = 0$ на мѣсто T, fin. m и cof. m ихъ величины.

(45) Что бы опредѣлить совершенные дїаметры тѣхъ же кривыхъ линей, надлежитъ положить $E = 0$ и $HT^2 + IT + K = 0$ [то есть надлежитъ уравнять нулю предстоящїя членовъ нечетной степени]; и поелику второе уравненїе должно быть справедливо [или имѣть мѣсто] при всякой величинѣ количества T; то изъ того выдетъ $H = 0$, $I = 0$ и $K = 0$ (*); первое изъ оныхъ уравненїй даетъ содержанїе fin. μ къ cof. μ чрезъ посредство уравненїя третьей степени; изъ чего слѣдуетъ, что сїи кривыя не болѣе могутъ имѣть, какъ токмо одинъ или три совершенные дїаметра. Естьли для примѣра мы возмемъ кривую, имѣющую уравненїе

$$Y^3 - X^3 + hX^2 + iX = 0,$$

то [поелику въ уравненїи $aY^3 + (bX + c)Y^2 + (dX^2 + eX + f)Y + gX^3 + hX^2 + iX + k = 0$, для сего надлежитъ положить $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$, $g = -1$ и $k = 0$] мы будемъ имѣть

$$[E =] \text{ fin. } \mu^3 + \text{cof. } \mu^3 = 0,$$

$$[H =] \text{ fin. } m^2 \,.\, \text{fin. } \mu + \text{cof. } m^2 \,.\, \text{cof. } \mu = 0,$$

$$[I =] (h - 3x) \text{ cof. } m \,.\, \text{cof. } \mu + 3y \text{ fin. } m \text{ fin. } \mu = 0 \text{ и}$$

$$[K =] 3(y^2 \text{ fin. } \mu + x^2 \text{cof. } \mu) - (i + 2hx) \text{ cof. } \mu = 0.$$

Здѣсь для $\frac{\text{fin. } \mu}{\text{cof. } \mu}$ найдется одна токмо дѣйствительная величина, а именно -1; оная поставленная въ слѣдующее уравненїе,

(*) Сїе докажется, такъ какъ доказано было въ предъидущемъ примѣчанїи относительно уравненїя $A \text{ tang. } \mu^2 + C \text{ tang. } \mu + B = 0$.

даетъ $\frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m} = \pm 1$; потомъ остальныя два уравненія дадутъ $h - 3x \mp 3y = 0$, $i + 2hx + 3(y^2 - x^2) = 0$, и условное уравненіе будетъ $h^2 + 3i = 0$.

О безконечныхъ вѣтвяхъ кривыхъ линей вообще какого нибудь порядка.

(46) Мы приступаемъ теперь ко изслѣдованію безконечныхъ вѣтвей кривыхъ линей всякаго порядка, и для того въ краткихъ словахъ приведемъ себѣ на память сказанное нами о безконечныхъ вѣтвяхъ кривыхъ линей втораго порядка, коихъ уравненіе мы представимъ такъ: $aY^2 + cX^2 + eX + f = 0$.

Чтобы опредѣлить безконечныя вѣтви, кои онѣ имѣть могутъ по направленію T, то въ преобразованномъ уравненіи, найденномъ въ членѣ 24мъ, надлежитъ положить $G = 0$ (*); изъ чего выдетъ $\frac{\sin. m^2}{\cos. m^2} = -\frac{c}{a}$, и что предзнаменуетъ двѣ без-

(*) Ибо, естьли по нѣкоторому направленію T имѣются вѣтви безконечныя, то уравненіе $EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0$ должествуетъ имѣть всегда мѣсто, какъ бы ни увеличить абсциссу T, и сверьхъ того, поелику сіе уравненіе есть общее и слѣдовательно заключающее въ себѣ всѣ случаи, кои же суть: или ордината V при такомъ увеличиваніи абсциссы T, можетъ превзойти всякую данную величину, или не можетъ превзойти всякую данную величину, оно при томъ же увеличиваніи абсциссы T должествуетъ имѣть равно мѣсто, какъ когда ордината V можетъ превзойти всякую данную величину, такъ и когда не можетъ превзойти всякую данную величину; но чтобы удовлетворить однимъ разомъ тому и другому случаю, не остается ничего инаго сдѣлать, какъ положить $G = 0$; ибо не положивъ $G = 0$, выдетъ въ послѣднемъ случаѣ равенство между величиною GT, которая можетъ превзойти всякую данную, и величиною $I - FV - \frac{EV^2 - HV + K}{T}$, которая не можетъ превзойти всякую данную; что нелѣпо. И такъ для вѣтвей безконечныхъ надлежитъ положить $G = 0$; и дѣйствительно изъ того выходитъ для гиперболы $\frac{\sin. m}{\cos. m} = -\frac{h}{g}$, для параболы $\frac{\sin. m}{\cos. m} = \mp 0$ и для еллипсиса $\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{h}{g}\sqrt{-1}$; то есть, что гипербола и парабола имѣютъ вѣтви безконечныя, первая по направленію параллельному асимптотамъ, а другая по направленію параллельному оси, и что еллипсисъ совсѣмъ вѣтвей безконечныхъ не имѣетъ, ни по какому направленію, какъ то свойство самой вещи требуетъ.

конечныя вѣтви, кромѣ случая въ которомъ $\frac{c}{a}$ есть количество положительное, и которой имѣетъ мѣсто въ еллипсисѣ и кругѣ. И естьли сіи безконечныя вѣтви имѣютъ асимптоты, то надобно чтобы количество V положенное нулемъ, дѣлало T безконечнымъ и TV постояннымъ. Означимъ сіе постоянное количество чрезъ r; преобразованное уравненіе, по поставленіи r вмѣсто TV, и по сдѣланіи $V = 0$, учинится $Fr + IT - K = 0$, гдѣ T не можетъ быть безконечно, буде I не будетъ равно нулю. И такъ будемъ имѣть сіи два уравненія $I = 0$, $Fr = K$ (*); изъ которыхъ полагая T одною изъ асимптотъ и V ординатою параллельною другой, и слѣдственно $q = 2m$, получимъ

$$\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{2cx + e}{2ay}, \quad -2(a \sin. m^2 - c \cos. m^2) r = ay^2 + cx^2 + ex + f.$$

Первое изъ сихъ уравненій соединенное съ симъ $\frac{\sin. m^2}{\cos. m^2} = -\frac{c}{a}$, даетъ $ay^2 + cx^2 + ex + \frac{e^2}{4c} = 0$; а такимъ образомъ, по при-

---

(*) На мѣстѣ автора я бы разсуждалъ такъ: и естьли сіи безконечныя вѣтви имѣютъ асимптоты, то надобно чтобы при безпредѣльномъ увеличиваніи абсциссы T, ордината V безпредѣльно убывала и могла бы учиниться меньше всякой по произволенію данной величины; что неминуемо послѣдуетъ, когда произведеніе TV будетъ количество постоянное. Назовемъ его буквою r, и преобразованное уравненіе обратимъ сначала въ сіе $EV^2 - HV + Fr - IT + K = 0$; потомъ чрезъ доводъ къ нелѣпости доказавъ, что $I = 0$, перемѣнимъ его на слѣдующее $EV^2 - HV + Fr + K = 0$; наконецъ чрезъ тотъ же доводъ доказавъ, что и $E = 0$ и $H = 0$, будемъ имѣть не два уравненія $I = 0$ и $Fr = K$, но четыре $I = 0$, $E = 0$, $H = 0$ и $Fr = -K$, изъ которыхъ ничего не предполагая, выдетъ $\frac{\sin. (q-m)^2}{\cos. (q-m)^2} = -\frac{c}{a} = \frac{\sin. m^2}{\cos. m^2}$, $(1 - \sin. m^2) \sin. (q-m)^2 = (1 - \sin. (q-m)^2) \sin. m^2$, $\sin. (q-m)^2 = \sin. m^2$, $q - m = m$ и $q = 2m$; то есть ничего не предполагая выдетъ ордината V параллельною другой асимптотѣ; что неминуемо и быть должно, какъ то изъ предъидущаго явствуетъ. И поелику $I = 2ay \sin. m - (2cx + e) \cos. m$, $F = 2a \sin. m \sin. (q-m) - 2c \cos. m \cos. (q-m)$, то будетъ $\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{2cx + e}{2ay}$, $2(a \sin. m^2 - c \cos. m^2) . r = -K = -(ay^2 + cx^2 + ex + f)$, и такъ далѣе, какъ то явствуетъ изъ предложеннаго авторомъ.

чинѣ что $\sin. m^2 = \frac{-c}{a-c}$, $\cos. m^2 = \frac{c}{a-c}$ и что слѣдственно $a \sin. m^2 - c \cos. m^2 = \frac{-2ac}{a-c}$, имѣемъ $\frac{4acr}{a-c} = f - \frac{e^2}{4c}$ или $r = (a-c)\frac{4cf-e^2}{16ac}$. Ясно видно, что когда $c = 0$, что есть случай параболу означающій, тогда безконечныя вѣтви асимптотъ не имѣютъ [ибо тогда произведеніе r вмѣсто того, чтобы быть опредѣленнымъ постояннымъ количествомъ, обращается въ $\frac{1}{0}$]; что заставило различать безконечные пути на два рода: одни суть тѣ, которые имѣютъ асимптоты, и называются *путями гиперболическими*, и другіе суть тѣ, которые не имѣютъ асимптотъ, и именуются *путями параболическими*.

(47) Изъ сихъ частныхъ случаевъ мы заключимъ вообще, что когда нѣкоторыя дѣйствительныя величины синусовъ и косинусовъ угловъ, которые входятъ въ вычисленіе, обращаютъ въ нуль предстоящее члена V^n, то по направленію V будетъ путь безконечной; такъ же будетъ путь безконечной по направленію T, когда изчезнетъ предстоящее члена T^n. Но для краткости мы будемъ разсматривать безконечные пути токмо по направленію T, и мы скажемъ: когда вставливанія уничтожатъ въ одно и тоже время предстоящія членовъ T^n, T^{n-1}, T^{n-2}, и такъ далѣе, то по направленію T будетъ столько безконечныхъ путей, сколько уничтожится сихъ членовъ. Все дѣло теперь состоитъ токмо въ разпознаніи сихъ безконечныхъ путей, которые суть параболическіе и которые гиперболическіе.

(48) Преобразованному уравненію степени n мы дадимъ слѣдующей видъ:

$$AT^n + (A1V + B)T^{n-1} + (A2V^2 + B1V + C)T^{n-2}$$
$$+ (A3V^3 + B2V^2 + C1V + D)T^{n-3} + \text{и проч.} = 0,$$

гдѣ вмѣсто TV поставивъ r, перемѣнимъ его на сей:

$$AT^n + BT^{n-1} + (A1r + C)T^{n-2} + (B1r + D)T^{n-3}$$
$$+ (A2r^2 + C1r + E)T^{n-4} + (B2r^2 + D1r + F)T^{n-5}$$
$$+ (A3r^2 + C2r^2 + E1r + G)T^{n-6} + \text{и проч.} = 0.$$

После сего я примѣчаю, что естьли кривая по направленію T имѣетъ n безконечныхъ путей, то уравненіе $A = 0$, которое относительно $\frac{\sin. m}{\cos. m}$ есть степени n, будетъ имѣть n дѣйствительныхъ корней; и естьли сіи пути суть гиперболическіе, то-поелику ордината V положенная нулемъ, должна учинить T количествомъ безконечнымъ, будетъ $B = 0$ (*); что послужитъ къ построенію асимптотъ, и преобразованное уравненіе обратится въ $A1\,r + C = 0$, изъ чего получится величина произведенія r. Здѣсь полагается, что $A = 0$ не дѣлаетъ $A1 = 0$; ибо тогда путь вмѣсто того, чтобы быть гиперболическимъ, будетъ параболической [потому что тогда, для уравненія $A1\,r + C = 0$, произведеніе r вмѣсто того, чтобы быть опредѣленнымъ и постояннымъ количествомъ, обращается въ $\frac{1}{0}$]. Но естьли $A = 0$ уничтожитъ весь второй членъ $(A1V + B)\,T^{n-1}$, то асимптоты путей гиперболическихъ опредѣлятся чрезъ уравненіе $C = 0$, и произведеніе r чрезъ уравненіе $B1\,r + D = 0$, или чрезъ $A2\,r^2 + C1\,r + E = 0$, естьли тоже самое уравниваніе A нулю уничтожитъ A1 и B, B1 и D. Естьли же уничтожая второй членъ, оно учинитъ нулями A2 и B1, то путь вмѣсто того, чтобы быть гиперболическимъ, будетъ параболической. Но былъ бы гиперболической, естьли бы второй и третей члены совсѣмъ изчезли, сирѣчь естьли бы $A = 0$ дѣлало нулями A1, B, A2, B1, C; и тогда уравненіе $D = 0$ служило бы къ построенію асимптотъ, и произведеніе r опредѣлилося бы чрезъ $C1\,r + E = 0$, и такъ далѣе. Сіи начала сдѣлаются еще яснѣе, когда приложатся къ кривымъ линеямъ третьяго порядка.

(*) Или лучше: поелику надобно, чтобы по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличиванія абсциссы T, ордината V безпредѣльно убывала и могла сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины, будетъ, чрезъ доводъ въ невозможности, $B = 0$.

О безконечныхъ вѣтвяхъ кривыхъ линей третьяго порядка.

(19) Въ преобразованномъ уравненіи, предложенномъ въ членѣ 43мъ, я сдѣлаю $TV = r$; отъ чего оное перемѣнится въ сіе

$$LT^3+MT^2+(Ir+N)T+Ir+P+EV^3+GV^2+(Fr+K)V=0.$$

И такъ чтобы найти безконечныя вѣтви по направленію T, надлежитъ положить $L=0$ и сіе уравненіе будучи третей степени, имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень дѣйствительный. Положимъ что они всѣ три суть дѣйствительные и между собою равные; L будетъ сего вида $(\alpha \sin. m+\beta \cos. m)^3$; такимъ образомъ, что [по сравненіи сего вида съ настоящимъ выраженіемъ $a \sin. m^3 + \sin. \cos. m (b \sin. m + d. \cos. m) + g \cos. m^3$] будемъ имѣть $a=\alpha^3$, $g=\beta^3$, $b=3\alpha^2\beta$, $d=3\alpha\beta^2$; и поелику отъ того $H[=3a \sin. m^2 \sin. \mu - b \sin. \mu (\sin. m. \cos. \mu - 2\cos. m \sin. \mu) + d \cos. m (\cos. m. \sin. \mu - 2\sin. m. \cos. \mu) - 3g\cos. m^2. \cos. \mu]$ сдѣлается $[3\alpha^3 \sin. m^2 \sin. \mu - 3\alpha^2\beta \sin. m(\sin. m. \cos. \mu - 2\cos. m. \sin. \mu) + 3\alpha\beta^2 \cos. m(\cos. m. \sin. \mu - 2\sin. m. \cos. \mu) - 3\beta^3 \cos. m^2. \cos. \mu =]$ $3(\alpha \sin. \mu - \beta \cos. \mu)(\alpha \sin. m+\beta. \cos. m)^2$, то положеніе $L=0$, дѣлаетъ и $H=0$; откуда слѣдуетъ, что естьли то же положеніе не уничтожитъ M, кривая будетъ имѣть токмо путь параболической. Но по учиненіи сокращенія, будетъ $M[=c. \sin. m^2 + e \sin. m. \cos. m + h \cos. m^2 - 3(ay \sin. m^2 - gx \cos. m^2) + b \sin. m(x \sin. m - 2y \cos. m) - d \cos. m(y \cos. m - 2x \sin. m) = c \sin. m^2 + h \cos. m^2 + e \sin. m. \cos. m - 3\alpha^3 y \sin. m^2 - 6\alpha^2\beta y \sin. m. \cos. m - 3\alpha\beta^2 y \cos. m^2 + 3\beta^3 x. \cos. m^2 + 6\alpha\beta^2 x \sin. m. \cos. m + 3\alpha^2\beta x \sin. m^2 = c \sin. m^2 + h \cos. m^2 + e \sin. m. \cos. m - 3\alpha y(\alpha \sin. m + \beta \cos. m)^2 + 3\beta x(\alpha \sin. m + \beta \cos. m)^2$, что по причинѣ $\alpha \sin. m + \beta \cos. m = 0$] $= c \sin. m^2 + h. \cos. m^2 + e \sin. m. \cos. m$; почему сіе количество уравненное нулю и соединенное съ $\alpha \sin. m + \beta \cos. m = 0$, даетъ условія, дабы M могло изчезнуть; и тогда преобразованное уравненіе, въ которомъ сдѣлаемъ V нулемъ (*), обратится въ

(*) Или лучше: и тогда преобразованное уравненіе, въ которомъ V по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличиванія T, должно учиниться меньше всякой по произволенію данной величины, обративъ сперва N въ нуль, обратится въ $Ir+P=0$.

$NT + Ir + P = 0$; и поелику $V = 0$ должно учинить T безконечным количеством, будетъ $N = 0$; что послужитъ къ построенію асимитотъ, а уравненіе $Ir + P = 0$ дастъ величину произведенія r. Но $N [= 3(ay^2 \sin. m + gx^2 \cos. m) + b(y^2 \cos. m - 2xy \sin. m) + (f - 2cy) \sin. m + (i + 2hx) \cos. m + 2(x \sin. m - y \cos. m) + d(x^2 \sin. m - 2xy \sin. m) = 3\alpha^3 y^2 \sin. m + 3\alpha^2 \beta y^2 \cos. m + 3\beta^3 x^2 \cos. m + 3\alpha\beta^2 x^2 \sin. m - 6\alpha^2 \beta xy \sin. m - 6\alpha\beta^2 xy \cos. m + (e \sin. m + 2h \cos. m)x - (2c \sin. m + e \cos. m)y + f \sin. m + i \cos. m = 3(\alpha y - \beta x)^2 (\alpha \sin. m + \beta \cos. m) + (e \sin. m + 2h \cos. m)x - (2c \sin. m + e \cos. m)y + f \sin. m + i \cos. m] = (e \sin. m + 2h \cos. m.)x - (2c \sin. m + e \cos. m)y + f \sin. m + i \cos. m$; чего ради уравненіе $N = 0$ будучи первой степени въ x и y, одинъ токмо можетъ дать путь гиперболической; или пушь будетъ параболической, естьли тоже положеніе уничтожитъ I.

(50) Положимъ паки три корня дѣйствительными, но токмо два изъ нихъ равными между собою; тогда L будетъ сего вида $(\alpha \sin. m + \beta \cos. m)^2 (\gamma \sin. m + \delta \cos. m)$, и будемъ имѣть $a = \alpha^2 \gamma$, $g = \beta^2 \delta$, $b = \alpha^2 \delta + 2\alpha\beta\gamma$, $d = \beta^2 \gamma + 2\alpha\beta\delta$; и поелику $H [= 3a \sin. m^2 \sin. \mu - b \sin. m(\sin. m \cos. \mu - 2 \cos. m \sin. \mu) + d \cos. m(\cos. m. \sin. \mu - 2 \sin. m. \cos. \mu) - 3g \cos. m^2 \cos. \mu]$ сдѣлается отъ того $[-3\alpha^2 \gamma \sin. m^2 \sin. \mu - (\alpha^2 \delta + 2\alpha\beta\gamma) \sin. m(\sin. m. \cos. \mu - 2 \cos. m. \sin. \mu) + (\beta^2 \gamma + 2\alpha\beta\delta) \cos. m(\cos. m \sin. \mu - 2 \sin. m. \cos. \mu) - 3\beta^2 \delta \cos. m^2 \cos. \mu = (3\alpha\gamma \sin. m. \sin. \mu - \alpha\delta \sin. m. \cos. \mu + 2\alpha\delta \cos. m \sin. \mu - 2\beta\gamma \sin. m. \cos. \mu + \beta\gamma \cos. m \sin. \mu - 3\beta\delta \cos. m \cos. \mu)\alpha \sin. m + 3\beta\gamma \cos. m \sin. \mu\, \alpha \sin. m - \beta\delta \cos. m. \cos. \mu\, \alpha \sin. m + (\beta\gamma \cos. m \sin. \mu - 2\beta\gamma \sin. m. \cos. \mu + 2\alpha\delta \cos. m \sin. \mu - 3\beta\delta \cos. m. \cos. \mu)\beta \cos. m = ((3\alpha\gamma \sin. m + 2\alpha\delta \cos. m + \beta\gamma \cos. m) \sin. \mu - (3\beta\delta \cos. m + 2\beta\gamma \sin. m + \alpha\delta \sin. m) \cos. \mu)\alpha \sin. m + ((3\alpha\gamma \sin. m + 2\alpha\delta \cos. m + \beta\gamma \cos. m) \sin. \mu - (3\beta\delta \cos. m + 2\beta\gamma \sin. m + \alpha\delta \sin. m) \cos. \mu)\beta \cos. m] = (\alpha \sin. m + \beta \cos. m)((3\alpha\gamma \sin. m + 2\alpha\delta \cos. m + \beta\gamma \cos. m) \sin. \mu - (3\beta\delta \cos. m + 2\beta\gamma \sin. m + \alpha\delta \sin. m) \cos. \mu)$; чего ради положеніе $\alpha \sin. m + \beta \cos. m = 0$, учинитъ $H = 0$; откуда слѣдуетъ, что естьли тоже положеніе не уничтожитъ M, кривая будетъ имѣть токмо путь параболической; вмѣсто того простой корень $\gamma \sin. m + \delta \cos. m = 0$ уравненія $L = 0$, которой не можетъ

H сдѣлать нулемъ, дастъ всегда путь гиперболической. Но естьли корень $\alpha \sin.m + \beta \cos.m = 0$, которой непосредственно дѣлаетъ H нулемъ; уничтожитъ сверьхъ того M, то надлежитъ положить $N = 0$; что будучи уравненіе второй степени въ y и x, предзначаетъ двѣ безконечныя вѣтви, которыя будутъ гиперболическія, буде I не учинится нулемъ; иначе же оныя вѣтви будутъ параболическія. Могло бы случиться, что два корня уравненія $N = 0$ будутъ мнимые; и въ таковомъ случаѣ для уравниванія $\alpha \sin.m + \beta \cos.m$ нулю кривая не имѣла бы путей безконечныхъ, хотя бы сіе положеніе и уничтожало M.

(51) Естьли изъ трехъ корней уравненія $L = 0$ два суть мнимые, а одинъ дѣйствительной; то, поелику уравниваніе сего простаго дѣйствительнаго корня нулю не можетъ учинить H нулемъ, будетъ вѣтвь гиперболическая, опредѣляющаяся уравненіемъ $M = 0$, которое въ y и x есть токмо первой степени. Наконецъ естьли три корня суть дѣйствительные и не равные, то для каждаго изъ нихъ будетъ безконечной гиперболической путь.

О раздѣленіи кривыхъ линей третьяго порядка на главные роды.

(52) Возмемъ первое преобразованное уравненіе (член. 43), и сдѣлаемъ въ ономъ E или L нулемъ; выдутъ уравненія третьей степени имѣющія по крайней мѣрѣ одинъ корень дѣйствительной, и потому имѣется по крайней мѣрѣ одно положеніе способное въ предложенномъ уравненіи уничтожить членъ содержащій въ себѣ Y^3 или членъ содержащій въ себѣ X^3; чего ради чрезъ уравненіе $(bX + c)Y^2 + (dX^2 + eX + f) + gX^3 + hX^2 + iX + k = 0$ можно представить всѣ уравненія кривыхъ линей третьяго порядка. Я разрѣшу оное, и изъявивъ чрезъ PN, PM (черт. XIII) двѣ величины Y и чрезъ ρ ирраціональную часть сихъ величинъ, я получу

$$PN = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)} + \rho,\quad PM = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)} - \rho;$$

и такимъ образомъ 2ρ будетъ величина прямой MN содержащейся между двумя вѣтвями кривой. Вообразимъ другую кривую, пресѣкающую всѣ MN на двѣ равныя части; она будетъ имѣть ординату

$$Pn = PM + \rho = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}.$$

И такъ сїя другая кривая по свойству вопроса есть гипербола или парабола [когда $b = o$] (*). Въ первомъ случаѣ мы

(*) Сїе явствуетъ изъ послѣдняго примѣчанїя къ члену 24му, ибо положивъ $Pn = Z$, авторово уравненїе обратится въ $dX^2 + 2bXZ + eX + 2cZ + f = o$ или въ сїе $X^2 + \frac{2b}{d}XZ + \frac{e}{d}X + \frac{2c}{d}Z + \frac{f}{d} = o$, гдѣ множители суммы членовъ вышшей степени $X^2 + \frac{2b}{d}XZ$ суть X и $X + \frac{2b}{d}Z$, то есть дѣйствительные и неравные между собою; въ случаѣ же $b = o$, оные множители суть X и X, то есть дѣйствительные и равные между собою.

Въ прочемъ представивъ уравненїе такъ $XZ + \frac{d}{2b}X^2 = -\frac{e}{2b}X - \frac{c}{b}Z - \frac{f}{2b}$, положи $Z + \frac{d}{2b}X = z$; будетъ $Z = z - \frac{d}{2b}X$ и $zX = -\frac{e}{2b}X - \frac{c}{b}(z - \frac{d}{2b}X) - \frac{f}{2b} = \frac{dc - be}{2b^2}X - \frac{c}{b}z - \frac{f}{2b}$ или $zX - \frac{dc - be}{2b^2}X = -\frac{c}{b}z - \frac{f}{2b}$; положи $z - \frac{dc - be}{2b^2} = u$, будетъ $z = u + \frac{dc - be}{2b^2}$ и $Xu = -\frac{c}{b}(u + \frac{dc - be}{2b^2}) - \frac{f}{2b}$ или $(X + \frac{c}{b})u = \frac{bce - dc^2 - fb^2}{2b^3}$; наконецъ положи $X + \frac{c}{b} = t$ и $\frac{bce - dc^2 - fb^2}{b^3} = a$, будетъ $ut = \frac{a}{2}$, что есть уравненїе гиперболы при асимптотахъ и то самое, которое авторъ безъ всякаго довода ниже сего написалъ.

Но чтобы показать самое строенїе, чрезъ которое отъ уравненїя кривой $Z = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}$ можно будетъ достигнуть до уравненія гиперболы при асимптотахъ, то уравненїе $(X + \frac{c}{b})u = \frac{bce - dc^2 - fb^2}{2b^3}$ умножъ на нѣкоторое неопредѣленное количество q, чему причина окажется ниже сего, и отъ чего будешь имѣть $(qX + q\frac{c}{b})u = \frac{bce - dc^2 - fb^2}{2b^3}q$; потомъ положивъ $qX + q\frac{c}{b} = t$, $\frac{bce - dc^2 - fb^2}{b^3}q = a$, опиши по возвышенїю $\frac{a}{2}$ между какими нибудь асимптотами AM и AN (черт. 4) гиперболу EF такъ, чтобы, полагая $Ap = t$, $pn = u$, было $Ap . pn = \frac{a}{2}$; послѣ чего на асимптотъ AM возми $AB = q\frac{c}{b}$, и параллельно pn или

возмемъ за линею абсциссъ асимптоту гиперболы, и означивъ чрезъ t абсциссу Ap и чрезъ $\frac{a}{2t}$, гдѣ a есть количество постоянное,

---

другой асимптотѣ AN проведи $BC = \frac{dc - be}{2b^2}$, и параллельно AM протяни CQ; отъ чего на продолженной np отсѣчется $pQ = \frac{dc - be}{2b}$, и какъ $z = u + \frac{dc - be}{2b^2}$, то будетъ $Qn = z$; наконецъ на продолженной асимптотѣ AN отъ пресѣченія ея D съ продолженною QC возми $DG = \frac{dc}{2b^2}$ и чрезъ точку C проведи GCP; я говорю что Pn будетъ $= Z$, ибо по причинѣ что $DC = q\frac{c}{b}$, $CQ = Bp = t - q\frac{c}{b} = qX$ и что треугольники DGC и CPQ суть подобные, будетъ $PQ = \frac{d}{2b}X$ и $Pn = z - \frac{d}{2b}X = Z$; но чтобы ординатѣ Z соотвѣтствовала пристойная абсцисса X, то сострой треугольникъ HKL, у котораго бы уголъ K былъ равенъ взятому за уголъ координатъ SPn ($=$ CGD) кривой линеи третьяго порядка, и стороны KH, KL были равны $\frac{dc}{2b^2}$ и $\frac{c}{b}$, потомъ опредѣливъ сторону HL ($= s$), уравняй ее $\frac{qc}{b}$; отъ чего найдется $q = \frac{bs}{c}$; и сдѣлавъ уголъ асимптотъ MAN равный дополненію угла H треугольника HKL, получится $AB = DC = \frac{c}{b} \cdot \frac{bs}{c}$, $CQ = X \cdot \frac{bs}{c}$ и $CG = \frac{c}{b}$, и посему для пропорціи $DC\left(= \frac{c}{b} \cdot \frac{bs}{c}\right) : CQ\left(= X \cdot \frac{bs}{c}\right) = CG\left(= \frac{c}{b}\right) : CP$, выдетъ $CP = X$, то есть ординатѣ Z ($= Pn$) будетъ соотвѣтствовать пристойная абсцисса X ($=$ CP), коя имѣетъ точку C началомъ.

И такъ естьли возмется отъ начала линеи третьяго порядка на оси абсциссъ $CG = \frac{c}{b}$, изъ G протянется GN параллельно ординатѣ Pn, на оной параллельной GN отсѣчется $GD = \frac{dc}{2b^2}$ и $DA = \frac{dc - be}{2b^2}$ и протянется изъ D чрезъ C прямая DCQ и изъ A къ оной параллельная AM, то въ углѣ MAN по возвышенію $\frac{bce - dc^2 - fb^2}{2b^3} \cdot \frac{bs}{c}$ описанная гипербола EF удовлетворитъ уравненію $Z = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}$; въ самомъ дѣлѣ, когда u ($= pn = Pn + PQ - pQ$) $= Z + \frac{d}{2b}X - \frac{dc - be}{2b^2}$ и $t\left(= Ap = DC + CQ = s + \frac{bs}{c}X\right) = \frac{bs}{c}\left(X + \frac{c}{b}\right)$, то уравненіе $ut\left(= \frac{a}{2}\right) = \frac{bce - dc^2 - fb^2}{2b^3} \cdot \frac{bs}{c}$ сдѣлается $\left(Z + \frac{d}{2b}X - \frac{dc - be}{2b^2}\right)\left(X + \frac{c}{b}\right) = \frac{bce - dc^2 - fb^2}{2b^3}$, то есть то же самое что и $Z = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}$.

Откуда само собою уже слѣдуетъ, что $bX + c$ къ t есть въ содержаніи постояннòмъ, ибо $t = \frac{bs}{c}\left(X + \frac{c}{b}\right)$ и $bX + c : t = c : s$.

соотвѣтствующую ординату pn, которая другой асимптотѣ параллельна и находится на направленіи PN, коея положенiе зависитъ отъ нашего произволенія, мы будетъ имѣть для ординатъ двухъ вѣтвей кривой линеи третьяго порядка pN и pM сіи выраженія $\frac{\alpha}{2t} + \rho$ и $\rho - \frac{\alpha}{2t}$, изъ коихъ когда одно возмется положительно, другое должно быть взято отрицательно; а такимъ образомъ означая чрезъ t и u новыя координаты кривой линеи третьяго порядка, для уравненія ея мы получимъ сіе $(u - \frac{\alpha}{2t} - \rho)(u - \frac{\alpha}{2t} + \rho) = 0$ или слѣдующее $u^2 - \frac{\alpha u}{t} + \frac{\alpha^2}{4t^2} - \rho^2$, въ которомъ

$$\rho^2 = \left(\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}\right)^2 - \frac{gX^3 + hX^2 + iX + k}{bX + c}.$$

Но Pn разнится отъ pn на ординату Pp асимптоты; и асимптота, какъ прямая линея, не иную какую величину ординатою имѣть можетъ, какъ сего вида $\beta X + \gamma$, гдѣ β и γ суть количества постоянныя; сверьхъ того можно положить еще что $bX + c$ къ t есть въ содержаніи постоянномъ; слѣдовательно уравненіе кривой линеи третьяго порядка можетъ принять напослѣдокъ слѣдующій видъ:

$$tu^2 - \alpha u = g' t^3 + h' t^2 + i' t + k' \quad (*).$$

(53) Когда b есть нуль, то кривая разсѣкающая прямыя MN на двѣ равныя части, будетъ парабола [что ясно]. Но

(*) Въ самомъ дѣлѣ, когда $Pn = pn + \beta X + \gamma$, $pn = \frac{\alpha}{2t}$ и $Pn = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}$, то $\frac{\alpha}{2t} = -\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)} - (\beta X + \gamma)$, $\frac{\alpha^2}{4t^2} = \left(\frac{dX^2 + eX + f}{2(bX + c)}\right)^2 + \left(\frac{dX^2 + eX + f}{(bX + c)}\right)(\beta X + \gamma) + (\beta X + \gamma)^2$, и уравненіе $u^2 - \frac{\alpha u}{t} + \frac{\alpha^2}{4t^2} - \rho^2 = 0$ обратится въ сіе $u^2 - \frac{\alpha u}{t} + \left(\frac{dX^2 + eX + f}{bX + c}\right)(\beta X + \gamma) + \frac{gX^3 + hX^2 + iX + k}{bX + c} + (\beta X + \gamma)^2 = 0$; и какъ $bX + c = \frac{t \cdot c}{s}$ и $X = \frac{c(t - s)}{bs}$, то очевидно, что оное должно принять авторомъ предначертанный видъ, гдѣ g', h', i', k', такъ какъ α и s, суть постоянныя.

какъ въ предложенномъ уравненіи можно еще уничтожить членъ gX^3 и оное представить подъ симъ видомъ

$$(dY+h)X^2+(eY+i)X+cY^2+fY+k=0;$$

то взявъ Y за абсциссу и X за ординату, сіе уравненіе не иное что будетъ какъ токмо частной случай того, которое мы теперь разсматривали; и потому чрезъ тѣже преобразованія мы обратимъ оное въ сей видъ

$$tu^2-\alpha u=g't^2+h't+i'.$$

Уравненіе будетъ еще простѣе, когда b и c въ одно время равны нулю.

(54) Но когда b, c и d въ одно время равны нулю, то предложенное уравненіе обратится въ сіе $(eX+f)Y+gX^3+hX^2+iX+k=0$, и довлѣетъ токмо положить $Y=u$, $X+\frac{f}{e}=t$, дабы привести его къ слѣдующему виду $tu=g't^3+h't^2+i't+k'$.

(55) Воспомянувъ выраженіе ординаты Pn, увидишь, что естьли b и d или c и f въ одно время равны нулю, то линея, пресѣкающая MN на двѣ равныя части, будетъ прямая; и взявъ сію самую прямую за ось абсциссъ, соотвѣтствующія ординаты будутъ ρ и $-\rho$ и уравненіе сдѣлается $u^2=\rho^2$; почему довлѣетъ токмо сдѣлать $X=t$, дабы въ первомъ случаѣ, гдѣ $\rho^2=\frac{(eX+f)^2}{4c^2}-\frac{1}{c}(gX^3+hX^2+iX+k)$, предложенное уравненіе возпріяло сей видъ $u^2=g't^3+h't^2+i't+k'$, и во второмъ, гдѣ $\rho^2=\frac{(dX+e)^2}{4b^2}-\frac{1}{b}(gX^2+hX+i+\frac{k}{X})$, слѣдующій $tu^2=g't^3+h't^2+i't+k'$.

(56) Наконецъ когда b, c, d и e въ одно время равны нулю, то предложенное уравненіе естественно приметъ сей видъ $u=g't^3+h't^2+i t+k'$.

Изъ всѣхъ сихъ подробностей, въ которыя мы вошли, слѣдуетъ, что уравненія кривыхъ линей третьяго порядка могутъ быть

приведены къ слѣдующимъ четыремъ видамъ:

$$tu^2 - \alpha u = \psi,\ tu = \psi,\ u^2 = \psi \text{ и } u = \psi;$$

$$\text{гдѣ } \psi = g't^3 + h't^2 + i't + k',$$

ибо $tu^2 = \psi$ заключается въ первомъ. (*)

(*) Сіе есть токмо первѣйшее раздѣленіе кривымъ линеямъ третьяго порядка, кое учинилъ Нютонъ, въ сочиненіи своемъ Enumeratio linearum tertii ordinis; дальнѣйшее же, изъ сего имъ произведенное, основано на свойствѣ вѣтвей безконечныхъ и купно опредѣленномъ пространствѣ сими кривыми линеями заключаемомъ, и даетъ для нихъ 72 вида. Славный Ейлеръ въ сочиненіи своемъ, Introductio in Analysin infinitorum, примѣчая что по Нютонову способу можно бы было принять еще большее число видовъ сихъ кривыхъ линей, учинилъ другое имъ раздѣленіе основанное на свойствѣ и числѣ асимптотъ и получилъ 16 главныхъ родовъ. Но сіи подробности паче любопытныя, нежели полезныя, не совмѣстны съ планомъ сего сочиненія; и того ради авторъ симъ заключаетъ теорію алгебраическихъ кривыхъ линей, и приступаетъ къ теоріи кривыхъ поверьхностей, прейдя теорію трансцендентныхъ кривыхъ линей; потому что знаніе наше объ оныхъ кривыхъ по сіе время ничего еще систематическаго не имѣетъ, и не иное что есть какъ сборъ отрывокъ, едва кукую либо связь между собою имѣющихъ. Между тѣмъ послѣ въ IV главѣ, коя предметомъ имѣетъ способъ предѣловъ, авторъ предлагаетъ, вмѣсто поясняющихъ сей способъ примѣровъ, почти все что извѣстно о сихъ кривыхъ линеяхъ

О кривыхъ поверьхностяхъ.

(57) Да будетъ кривая линея EZH (черт. XIV) отнесенная къ своей оси AC чрезъ посредство перпендикулярныхъ ординатъ ZQ, HC; весь чертежъ AEHC учинившій цѣлое обращеніе около оси AC произведетъ тѣло называемое *тѣломъ вращенія.* Откуда раждается вопросъ, которой для разрѣшенія предложить себѣ можно: дано уравненіе кривой линеи EZH, найти уравненіе поверьхности описанной сею кривою во время ея обращенія около оси AC? На сей конецъ на плоскости, коея положеніе дано, и кою я полагаю соединившеюся съ плоскостію круга HBID, я протяну CD, коея бы положеніе такъ же было извѣстно; потомъ изъ какой нибудь точки Z кривой поверхности на плоскость, данное положеніе имѣющую, я опущу перпендикулярную ZM, и изъ точки M на прямую BD перпендикулярную MP; наконецъ я означу CP чрезъ X, PM чрезъ Y; MZ чрезъ Z, радіусъ CH (= CB) чрезъ r, и свойство кривой поверьхности опредѣлится чрезъ уравненіе между трема координатами X, Y и Z.

Естьли EZH будетъ линея прямая и тѣло конусъ прямой; то означивъ высоту его чрезъ H, мы будетъ имѣть $HM : Z = r : H$; но $HM = CH - CM = r - \sqrt{X^2 + Y^2}$; слѣдовательно $r(H - Z) = H\sqrt{X^2 + Y^2}$, что есть уравненіе поверьхности прямаго конуса.

Естьли EZH будетъ кривая линея втораго порядка, коея уравненіе можно представить такъ: $a\overline{ZQ}^2 + c\overline{CQ}^2 + eCQ + f = 0$; то уравненіе поверьхности будетъ $a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eZ + f = 0$.

Такимъ же образомъ найдутся уравненія поверьхностей тѣлъ вращенія и вышшихъ порядковъ.

(58) Мы полагали, что данная поверьхность есть поверьхность тѣла вращенія; но и во всякомъ другомъ положеніи, пусть Z (черт. XV) будетъ точка какой ниесть

кривой поверьхности; изъ оной на непремѣнную плоскость, кою я полагаю изображенною плоскостїю листа и на коей воображаю ось AC, данное положенїе имѣющую, я опущу перпендикулярную ZM и проведу потомъ MP перпендикулярно къ оси AC: свойство кривой поверьхности опредѣлится чрезъ взаимное отношенїе имѣющееся между тремя координатами AP ($=x$), PM($=y$) и MZ ($=z$). Положивъ сїе, естьли какая нибудь поверьхность пресѣчется плоскостїю, то произойдетъ отъ того сѣченїе, которое будетъ имѣть нѣкую кривизну; вопрошается сїя кривизна вообще для какого нибудь сѣченїя?

(59) Я положу, что оное проходитъ чрезъ точку Z и что BE есть общее его сѣченїе съ плоскостїю MAC; изъ точки M на BE я опущу перпендикулярную MN и протяну ZN, которая такъ же будетъ перпендикулярна къ BE; потомъ я положу $AB = h$, уголъ $CBE = m$ и уголъ MNZ, которой есть наклоненїе плоскости ZBE къ MAC, $= n$.
Прямоугольные треугольники BPO, MNO мнѣ дадутъ $1 : \text{tang.}\, m = x - h : PO$, и слѣдственно $MO = y - (x - h)\, \text{tang}\, m$, $\text{coſ.}\, m : 1 = x - h : BO$, $1 : \text{coſ.}\, m = MO : MN$, $1 : \text{ſin.}\, m = MO : ON$, и слѣдственно $BN = BO + ON \left[= \frac{x-h}{\text{coſ.}\, m} + y\, \text{ſin.}\, m - \frac{(x-h)\, \text{ſin.}\, m^2}{\text{coſ.}\, m} = y\, \text{ſin.}\, m + (x-h) \left(\frac{1 - \text{ſin.}\, m^2}{\text{coſ.}\, m}\right)\right] = y\, \text{ſin.}\, m + (x-h)\, \text{coſ.}\, m$. Сверьхъ того прямоугольной треугольникъ ZNM дастъ

$$\text{coſ.}\, n : 1 = MN : ZN = \frac{y\, \text{coſ.}\, m - (x-h)\, \text{ſin.}\, m}{\text{coſ.}\, h},$$

$$1 : \text{tang.}\, n = MN : MZ = (y\, \text{coſ.}\, n - (x-h)\, \text{ſin.}\, m)\, \text{tang.}\, n.$$

И такъ означивъ чрезъ t и u координаты BN и NZ сѣченїя, будемъ имѣть

$$t = y\, \text{ſin.}\, m + (x-h)\, \text{coſ.}\, m,\ u\, \text{coſ.}\, n = y\, \text{coſ.}\, m - (x-h)\, \text{ſin.}\, m.$$

Теперь естьли первое уравненїе умножимъ на $\text{coſ.}\, m$, а другое на $\text{ſin.}\, m$ [и взаимно], и потомъ вычтемъ одно изъ другаго [и приложимъ одно къ другому]; то будемъ имѣть $t\, \text{coſ.}\, m - u\, \text{ſin.}\, m\, \text{coſ.}\, n = x - h$, $[t.\, \text{ſin.}\, m + u\, \text{coſ.}\, m\, \text{coſ.}\, n = y\, (\text{ſin.}\, m^2 + \text{coſ.}\, m^2)]$, и слѣд-

ственно $x = h + t\cos. m - u\sin. m . \cos. n$, $y = t\sin. m + u\cos. m \cos. n$, и сверьхъ того $z = u\sin. n$. (*)

Поставь сіи величины количествъ x, y и z въ уравненіе кривой поверьхности, и будешь имѣть уравненіе, чрезъ которое опредѣлится кривизна сѣченія.

(60) Мы возмемъ для примѣра поверьхность прямаго конуса, коея уравненіе есть $r\,(H - Z) = H\sqrt{X^2 + Y^2}$, и положимъ $Z = z$, $Y = y$ и $X = x - i$ [гдѣ i есть разстояніе отъ начала A до центра основанія конуса]; потомъ вмѣсто z, y и x поставимъ ихъ величины, и будемъ имѣть $X^2 + Y^2$ [$= (h - i)^2 + 2(h-i)(t\cos. m - u\sin. m . \cos. n) + t^2\cos. m^2 - 2tu\sin. m . \cos. m . \cos n + u^2\sin. m^2\cos n^2 + t^2\sin. m^2 + 2tu\sin. m . \cos. m . \cos n + u^2\cos. m^2 . \cos n^2$] $= (h - i)^2 + 2(h - i)(t\cos. m - u\sin. m . \cos. n) + t^2 + u^2\cos. n^2$, $(H - Z)^2 = H^2 - 2Hu\sin. n + u^2\sin. n^2$; откуда [поставляя въ уравненіе $H\sqrt{X^2 + Y^2} = r(H - z)$ или $H^2(X^2 + Y^2) = r^2(H - Z)^2$] получимъ $H^2t^2 + (H^2\cos. n^2 - r^2\sin. n^2)u^2 + 2H^2(h - i)t . \cos. m + (2Hr^2\sin. n - 2H^2(h - i)\sin. m \cos. n)u + H^2((h-i)^2 - r^2) = 0$. (**) Но поелику положеніе оси и начало абсциссъ совершенно зави-

---

*) Здѣсь не безполезно замѣтить, что въ найденныхъ трехъ уравненіяхъ $x = h + t\cos. m - u\sin. m . \cos. n$, $y = t\sin. m + u\cos. m \cos. n$ и $z = u\sin n$ ни какой перемѣны не послѣдуетъ, когда будетъ x и меньше h, какъ то удобно всякой удостовѣрить себя можетъ.

(**) Подобнымъ образомъ найдется уравненіе коническаго сѣченія, когда вмѣсто прямаго конусъ будетъ косой. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ уголъ ZMN (черт. тотъ же), которой здѣсь не есть прямой, чрезъ μ, мы будемъ имѣть $\sin. (\mu + n) : MN = \sin. \mu : ZN = \frac{(y\cos. m - (x - h)\sin. m)\sin. n}{\sin. (\mu + n)}$ и потому такъ же $u\sin. (\mu + n) = y\cos. m . \sin. \mu - (x - h)\sin. m . \sin. \mu$; что соединивъ съ уравненіемъ $t = y\sin. m + (x - h)\cos. m$, кое остается непремѣнно, получимъ $x = h + t\cos. m - u\sin. m . \frac{\sin. (\mu + n)}{\sin. \mu}$, $y = t\sin. m + u\cos. m\frac{\sin. (\mu + n)}{\sin. \mu}$, и напослѣдокъ $z = \frac{u\sin. n}{\sin. \mu}$.

Теперь возмемъ уравненіе поверьхности косаго конуса $H^2(X^2 + Y^2) = (H - Z)^2r^2$, которое будетъ тоже самое, что и уравненіе прямаго ко-

ситъ отъ нашего произволенія, то мы положимъ $(h-i)^2 = r^2$ или $h-i = \pm r$, $m = 90^\circ$ или $\text{cos}.m. = 0$, и преднайденное уравненіе сдѣлается $H^2 t^2 - (r^2 \text{sin}.n^2 - H^2 \text{cos}.n^2) u^2 + (r \text{sin}.n + H \text{cos}.n) 2Hru = 0$; что есть общее уравненіе всѣхъ коническихъ сѣченій. Изъ онаго, по причинѣ что $r \text{sin}.n^2 - H^2 \text{cos}.n^2 = (r \text{sin}.n + H \text{cos}.n)(r \text{sin}.n - H \text{cos}.n)$, слѣдуетъ, что естьли $r \text{sin}.n - H \text{cos}.n = 0$, что предзначаетъ, что ZN параллельна противоположенному косому боку конуса, то сѣченіе будетъ парабола и уравненіе ея будетъ $t^2 + 4r \text{cos}.n.u = 0$. Что же принадлежитъ до другихъ случаевъ, то мы общему уравненію дадимъ слѣдующій видъ $t^2 = \frac{r^2 \text{sin}.n^2 - H^2 \text{cos}.n^2}{H^2}\left(u^2 - \frac{H}{r \text{sin}.n \pm H \text{cos}.n} \cdot 2ru\right)$, и удобно будетъ усмотрѣть, что уравненіе принадлежитъ къ еллипсису, когда $r \text{sin}.n$ меньше $H \text{cos}.n$, или все тоже, когда $\text{tang}.n < \frac{H}{r}$, въ которомъ случаѣ направленіе падаетъ совсѣмъ внѣ круга, которой есть основаніе конуса; тоже уравненіе принадлежитъ къ гиперболѣ, когда $r \text{sin}.n > H \text{cos}.n$, и тогда направленіе пресѣкаетъ основаніе конуса (*).

нуса, лишь бы только ордината Z была протянута параллельно оси конуса, и поставимъ въ него вмѣсто X, Y и Z равныя величины $h - i + t \text{cos}.m - u.\text{sin}.m \frac{\text{sin}.(\mu+n)}{\text{sin}.\mu}$ $(= x - i)$, $t \text{sin}\, m + u \text{cos}\, m \frac{\text{sin}.(\mu+n)}{\text{sin}.\mu}$ $(= y)$ и $u \frac{\text{sin}.n}{\text{sin}.\mu}$ $(= z)$; отъ чего будемъ имѣть подобное найденному авторомъ уравненіе: $H^2 t^2 + \frac{1}{\text{sin}.\mu^2}(H^2 \text{sin}.(\mu+n)^2 - r^2 \text{sin}.n^2) u^2 + 2H^2(h-i) t \text{cos}.m + \frac{1}{\text{sin}.\mu}(2H^2 r^2 \text{sin}.n - 2(h-i)\text{sin}.m\,\text{sin}.(\mu+n))u + H^2((h-i)^2 - r^2) = 0$, гдѣ ординаты u такъ же между собою параллельны, какъ и въ прямомъ конусѣ (ибо чрезъ посредство 10. и 16 предложеній XI книги Евклидовыхъ Елементовъ всякой удобно въ томъ удостовѣрить себя можетъ) но не перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ абсциссамъ t.

(*) Весь сей членъ требуетъ поясненія, которое мы, купно съ распространеніемъ предложеннаго авторомъ о прямомъ конусѣ къ косому, здѣсь и сдѣлаемъ.

И такъ чтобы показать возможность положенія $(h-i)^2 = r^2$ или $h - i = \pm r$, и $m = 90^\circ$. или $\text{cos}.m = 0$, представимъ себѣ прямой или косой конусъ KHL (черт. 5), разсѣченный такъ нибудь плоскостію, не параллельною основанію конуса, и положимъ, что BE есть общее пресѣченіе сея плоскости съ плоскостію основанія конуса; то вопервыхъ, дабы

уголъ m, былъ прямой и слѣдственно $\cos m = 0$, стоитъ токмо изъ центра F основанія конуса опустить на BE перпендикулярную линею AC и принять ее за ось x; ибо тогда изъ какой нибудь точки Z, взятой на коническомъ сѣченіи, протянувъ къ оси параллельную линею ZM, изъ точки M на AC и BE опустивъ перпендикулярныя MP и MN, и Z съ N соединивъ прямою ZN, получимъ строеніе предполагаемое авторомъ и нами въ предъидущемъ примѣчаніи, съ тою самою разностію, что уголъ CBE ($= m$) здѣсь вмѣсто остраго есть прямой, и по тому означивъ AP чрезъ x, FP чрезъ X, AF чрезъ i, такъ чтобы было $X = x - i$, PM чрезъ y или Y, MZ чрезъ z или Z, AB чрезъ h, BN чрезъ t и NZ чрезъ u, найдемъ уравненіе, которое нашелъ авторъ и мы въ предъидущемъ примѣчаніи, безъ членовъ, сопровождаемыхъ $\cos m$. И хотя здѣсь $h > x$, однако отъ того въ уравненіи ни какой разности не произойдетъ, какъ то изъ предъидущаго примѣчанія явствуетъ.

Потомъ, что бы было $(h - i)^2 = r^2$ или $h - i = \pm r$, проведи къ основанію конуса KL касательную RS, параллельную пресѣченію BE, и по ту сторону онаго пресѣченія BE, по которую плоскость коническаго сѣченія между вершиною и оси ваши мъ конуса проходитъ и поверьхность его пресѣкаетъ, и послѣ того отъ вершины конуса въ точку касанія протяни прямую HR; оная находясь на поверьхности конуса, пресѣчетъ коническое сѣченіе въ нѣкоторой точкѣ B′; чрезъ сію точку B′ протяни B′E′ и A′B′F′ параллельно RS, или BE, и AFB, и разсѣки конусъ проходящею чрезъ B′E′ и A′B′F′ плоскостію; сѣченіе ея K′L′ будетъ параллельное основанію конуса и слѣдственно кругъ; причемъ B′E′ будетъ общее пресѣченіе плоскости коническаго сѣченія и плоскости круга K′L′, ибо B′E′ находится на плоскости круга K′L′ и будучи прикосновенна въ точкѣ B′ къ коническому сѣченію и параллельна BE, находится такъ же и на плоскости коническаго сѣченія; продолжи MZ до пресѣченія въ M′ съ плоскостію круга K′L′, и NZ до пресѣченія въ N′ съ B′E′, соедини M′ съ N′ прямою M′N′, которая будетъ параллельна MN и слѣдственно перпендикулярна къ B′E′, опусти изъ M′ на A′B′F′ перпендикулярную M′P′, и наконецъ отнеси поверьхность конуса къ плоскости круга K′L′; тогда будетъ Z или $z =$ ZM′, Y или $y =$ M′P′, X $=$ F′P′, $x =$ A′P′, $i =$ A′F′, $h =$ A′B′, $m =$ F′B′E′, $t =$ B′N′, $u =$ ZN′, $n =$ Z′N′M′, H $=$ HF′ и $r =$ B′F′; а такимъ образомъ по причинѣ параллельныхъ A′B′F′ къ AFB и B′E′ къ BE или RS, будетъ уголъ m ($=$ F′B′E′) $=$ FRS и слѣдовательно прямой, и по причинѣ $i - h =$ FB′ ($= r$) выдетъ само собою $h - i = -r$.

И какъ ордината ZN′ означающая u, имѣетъ противное положеніе съ ординатою ZN, прежде означавшею u, то въ преднайденномъ авторомъ

уравненiи надлежитъ и придать знакъ —, и уравненiе его сдѣлается

$$H^2 t^2 - (r^2 \sin. n^2 - H \cos. n^2) u^2 - (r \sin. n + H \cos n)\, 2 H r u = 0.$$

Такъ же и преднайденное наше уравненiе въ случаѣ косаго конуса учинится

$$H^2 t^2 - \frac{1}{\sin. \mu^2}(r^2 \sin. n^2 - H^2 \sin. (\mu + n)^2) u^2 - \frac{1}{\sin. \mu}(r \sin. n + H \sin. (\mu + n))\, 2 H r u = 0.$$

При чемъ не безполезно замѣтить, что естьли въ плоскости коническаго сѣченiя протянется BB′ параллельно ZN′, ZQ параллельно B′E′, то абсцисса t (= B′N′) сдѣлается ординатою QZ и ордината u (= ZN′) абсциссою B′Q; а такимъ образомъ то и другое изъ послѣднихъ уравненiй будетъ уравненiе коническаго сѣченiя между координатами B′Q и QZ, которыя въ случаѣ прямаго конуса суть взаимно перпендикулярныя, а въ случаѣ косаго косоугольныя, какъ то удобно всякой усмотрѣть можетъ.

Теперь представимъ себѣ плоскость HTU, чрезъ вершину конуса проходящую и коническому сѣченiю параллельную, и положимъ TU и T′U′ общими пресѣченiями оной съ основанiемъ конуса KL и кругомъ K′L′; то протянувъ общее ея пресѣченiе HT′T съ плоскостiю HRF, будетъ, для параллельныхъ плоскостей HFT, ZMN и HTU, ZNE, общее пресѣченiе HT однѣхъ изъ нихъ параллельно общему пресѣченiю ZN другихъ, и потому выдетъ уголъ HT′F′ (= HTF) = ZNM = ZN′M′ = n; такъ же для параллельныхъ линей HF, ZM и FT, MN, будетъ и уголъ HF′T (= HFT), которой въ прямомъ конусѣ есть прямой, а въ косомъ косой = ZMN = ZM′N′ = прямому или = μ; чего ради изъ треугольника HF′T′ выдетъ F′T′ = $\frac{H \cos. n}{\sin. n}$ или = $\frac{H \sin. (\mu + n)}{\sin. n}$. Положивъ сiе, я примѣчаю, что прямая TU, которую авторъ направленiемъ назвалъ, можетъ или касаться къ основанiю конуса или падать со всѣмъ внѣ онаго, или наконецъ пресѣкать сiе основанiе; откуда заключаю, что имѣются три случая:

1) Пусть касается; будетъ FT равна радiусу основанiя и F′T′ = r; слѣдовательно $r \sin. n = H \cos. n$, когда конусъ прямой, или $r \sin. n = H \sin. (\mu + n)$, когда конусъ косой; отъ чего преднайденное уравненiе въ прямомъ конусѣ сдѣлается $H^2 t^2 = (r \sin. n + H \cos. n)\, 2 H r u = (H \cos. n + H \cos. n)\, 2 H r u = 4 H^2 r \cos. n . u$ или $t^2 = 4 r \cos. n . u$, что есть уравненiе параболы между перпендикулярными координатами B′Q и QZ; такъ же преднайденное уравненiе и въ косомъ конусѣ учинится $H^2 t^2 = \frac{1}{\sin. \mu}(H \sin. (\mu + n) + H \sin. (\mu + n))\, 2 H r u = 4 H^2 r \frac{\sin. (\mu + n)}{\sin. \mu} . u$ или $t^2 = 4 r . \frac{\sin. (\mu + n)}{\sin. \mu} u$; что паки есть уравненiе параболы, съ тою токмо разностiю, что вмѣсто перпендикулярныхъ, между косоугольными координатами B′Q и QZ. И такимъ образомъ когда направленiе касается къ основанiю конуса, коническое сѣченiе будетъ парабола.

2) Пусть направленіе падаетъ внѣ основанія конуса; будетъ FT больше радіуса основанія конуса и $F'T' > r$; слѣдовательно $r \sin. n < H \cos. n$, когда конусъ прямой, или $r \sin. n < H \sin. (\mu + n)$, когда конусъ косой; почему предиайденное уравненіе въ прямомъ конусѣ должно принять сей видъ $H^2 t^2 + (H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2) u^2 - (H \cos. n + r \sin. n) 2 H r u = 0$, или слѣдующій $t^2 = \frac{H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2} \left(\frac{2 H r}{H \cos. n - r \sin. n} . u - u^2\right)$, гдѣ положивъ $\frac{H r}{H \cos. n - r \sin. n} = g$ и $\frac{H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2} = \frac{k^2}{g^2}$, получимъ $t^2 = \frac{k^2}{g^2} (2 g u - u^2)$, что есть уравненіе еллипсиса между перпендикулярными координатами $B'Q$ и QZ; такъ же преднайденное уравненіе въ косомъ конусѣ должно принять сей видъ

$t^2 = \frac{H^2 \sin. (\mu + n)^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2 \sin. \mu^2} \left(\frac{2 H r \sin. \mu}{H \sin. (\mu + n) - r \sin. n} u - u^2\right)$, гдѣ положивъ $\frac{H r \sin. \mu}{H \sin. (\mu + n) - r \sin. n} = g$ и $\frac{H^2 \sin. (\mu + n)^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2 \sin. \mu^2} = \frac{k^2}{g^2}$, получимъ

$t^2 = \frac{k^2}{g^2} (2 g u - u^2)$, что паки есть уравненіе еллипсиса съ тою токмо разностію, что вмѣсто перпендикулярныхъ, между косоугольными координатами $B'Q$ и QZ. И такимъ образомъ, когда направленіе падаетъ совсѣмъ внѣ основанія конуса, коническое сѣченіе будетъ еллипсисъ.

Здѣсь могутъ быть произведены нѣкоторыя слѣдствія, а именно: Когда $n = 0$, то уравненіе еллипсиса какъ въ прямомъ, такъ и косомъ конусѣ обращается въ уравненіе круга $t^2 = 2 r u - u^2$, представляющее тотъ самой кругъ, которой на чертежѣ чрезъ $K'L'$ означенъ.

И когда предстоящее $\frac{H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2}$ или $\frac{H^2 \sin. (\mu + n)^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2 \sin. \mu^2} = 1$, то такъ же уравненіе еллипсиса въ прямомъ и косомъ конусѣ обращается въ уравненіе круга: въ прямомъ конусѣ, по причинѣ что $\frac{H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2}{H^2} = 1$ даетъ $H^2 - H^2 \cos. n^2 + r^2 \sin. n^2 = 0$, $(H^2 + r^2) \sin. n^2 = 0$ и слѣдственно $n = 0$, оное уравненіе круга представляетъ кругъ $K'L'$; но въ косомъ конусѣ, по причинѣ что $\frac{H^2 \sin. (\mu + n) \sin. n^2}{H^2 \sin. \mu^2} = 1$ не дѣлаетъ $n = 0$, и что уравненіе круга, равно принадлежитъ какъ къ кругу такъ и къ еллипсису при равныхъ сопряженныхъ діаметрахъ онаго, уравненіе $t^2 = \frac{2 H r \sin. \mu}{H \sin. (\mu + n) - r \sin. n} u - u^2$ можетъ представлять кругъ и еллипсисъ.

Чтобы узнать когда оно представляетъ кругъ и когда еллипсисъ, я примѣчаю, что въ кругѣ координаты должны быть перпендикулярныя, а въ еллипсисѣ при равныхъ сопряженныхъ діаметрахъ косоугольныя; откуда я заключаю, что уравненіе $t^2 = \frac{2 H r \sin. \mu}{H \sin. (\mu + n) - r \sin. n} u - u^2$ тогда токмо пред-

ставляетъ кругъ, когда координаты B′Q и QZ будутъ перпендикулярныя, и что во всякомъ другомъ случаѣ оно представляетъ еллипсисъ. Но когда координаты B′Q и QZ могутъ быть перпендикулярныя? я примѣчаю, что когда координаты B′Q и QZ будутъ перпендикулярныя, то и ZN будетъ перпендикулярна къ BE и HT перпендикулярна къ TU; и какъ TU перпендикулярна къ AT, то TU и слѣдовательно плоскость коническаго сѣченія будетъ перпендикулярна къ плоскости HRT, которая чрезъ ось конуса проходитъ и сверьхъ того, для 11 предложенія XI книги Евклидов. Елемен. чрезъ перпендикуляръ, изъ H на плоскость основанія опущенный. И такъ изъ всего сего я заключаю, что уравненіе $t^2 = \frac{2Hr.\sin\mu}{H\sin.(\mu+n) - r.\sin.n}\,u - u^2$ тогда представляетъ кругъ, при всѣхъ прочихъ тѣхъ же обстоятельствахъ, когда конусъ разсѣчется перпендикулярно къ плоскости HRT проходящей чрезъ ось конуса и перпендикуляръ изъ вершины на основаніе опущенный.

Согласно съ симъ условіемъ перемѣнимъ 5 чертежъ на 6 й, гдѣ плоскость сѣченія B′ZB перпендикулярна къ плоскости KHD, проходящей чрезъ ось конуса и перпендикуляръ HG, изъ вершины H на основаніе опущенный; будетъ уголъ HF′D′ (= HFD) = ZMN = μ и BB′D′ (= B′BF) = ZNM = n; потомъ въ треуг. HF′G′ выдетъ HG′ = $H\sin.\mu$, FG′ = $H\cos.\mu$, и потому означивъ уголъ HB′D′ чрезъ φ и HD′B′ чрезъ ω, получишь $\text{tang.}\,\varphi = \frac{H\sin.\mu}{r + H\cos.\mu}$, $\text{tang.}\,\omega = \frac{H\sin.\mu}{r - H\cos.\mu}$; по положенію же $H^2\sin.(\mu+n)^2 - r^2\sin.n^2 = H^2\sin.\mu^2$, и что даетъ $H^2\sin.\mu^2 - H^2(\sin.\mu^2\cos.n^2 + 2\sin.\mu.\cos.\mu.\sin.n.\cos.n + \cos.\mu^2\sin.n^2) + r^2\sin.n^2 = H^2(1-\cos.n)^2\sin.\mu^2 - H^2\cos.\mu^2\sin.n^2 + r^2\sin.n^2 - 2H^2\sin.\mu\cos.\mu\sin.n.\cos.n = 0$, или $(H^2\sin.\mu^2 - H^2\cos.\mu^2 + r^2)\sin.n^2 = 2H^2\sin.\mu.\cos.\mu.\sin.n.\cos.n$ или $\text{tang.}\,n = \frac{2H^2\sin.\mu\cos.\mu}{H^2\sin.\mu^2 - H^2\cos.\mu^2 + r^2}$; чего ради $\text{tang.}(\varphi + n)\left(= \frac{\text{tang}\,\varphi + \text{tang}\,n}{1 - \text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,n}\right) =$

$$\frac{H\sin.\mu}{r + H\cos.\mu} + \frac{2H^2\sin\mu\cos.\mu}{H^2\sin\mu^2 - H^2\cos.\mu^2 + r^2} : 1 - \frac{H\sin\mu}{r + H\cos.\mu}\,.\,\frac{2H^2\sin.\mu.\cos.\mu}{H^2\sin.\mu^2 - H^2\cos.\mu^2 + r^2} =$$

$$\frac{H^3\sin\mu^3 - H^2\sin.\mu.\cos.\mu^2 + Hr^2\sin\mu + 2H^2r\sin.\mu.\cos\mu + 2H^3\sin\mu.\cos\mu^2}{H^2r\sin\mu^2 - H^2r\cos.\mu^2 + r^3 + H^3\sin\mu^2\cos.\mu - H^3\cos\mu^3 + Hr^2\cos\mu - 2H^3\sin\mu^2.\cos.\mu} =$$

$$\frac{H^3\sin.\mu^3 + H^3\sin.\mu.\cos.\mu^2 + 2H^2r\sin.\mu.\cos.\mu + Hr^2\sin.\mu}{H^2r\sin.\mu^2 - H^2r\cos\mu^2 + r^3 - H^3\cos.\mu^3 - H^3\sin.\mu^2\cos\mu + Hr^2\cos.\mu} =$$

$$\frac{H\sin.\mu\,(H^2(\sin.\mu^2 + \cos.\mu^2) + 2Hr\cos.\mu + r^2)}{H^2r\sin.\mu^2 - H^2r\cos.\mu^2 + r^3 - H^3\cos.\mu(\cos.\mu^2 + \sin.\mu^2) + Hr^2\cos.\mu} =$$

$$\frac{H\sin.\mu\,(H^2 + 2Hr\cos.\mu + r^2.)}{H^2r - H^2r\cos.\mu^2 - H^2r\cos.\mu^2 + r^3 - H^3\cos.\mu + Hr^2\cos.\mu} =$$

$$\frac{H\sin.\mu\,(H^2 + 2Hr\cos.\mu + r^2.)}{H^2r + 2Hr^2\cos.\mu + r^3 - H^3\cos.\mu - 2H^2r\cos.\mu^2 + Hr^2\cos.\mu - 2Hr^2\cos.\mu} =$$

$$\frac{H\sin.\mu\,(H^2 + 2Hr\cos.\mu + r^2)}{r(H^2 + 2Hr\cos.\mu + r^2) - H\cos.\mu(H^2 + 2Hr\cos.\mu + r^2)} = \frac{H\sin.\mu}{r - H\cos.\mu}$$; и посе-

му уголъ ω, коего $\text{tang.} = \frac{H \sin. \mu}{r - H \cos. \mu}$, равенъ суммѣ угловъ $\phi + n$. И такъ сѣченіе *антипараллельное*, при всѣхъ прочихъ тѣхъ же обстоятельствахъ, есть всегда кругъ.

3) Наконецъ пусть направленіе пресѣкаетъ основаніе конуса; будетъ FT меньше радіуса основанія конуса и $F'T' < r$; слѣдовательно $r \sin. n > H \cos. n$, когда конусъ прямой, или $r \sin. n > H \sin. (\mu + n)$, когда конусъ косой; посему и проч.

Предъ симъ вышло $h - i = - r$; но могло бы выдти $h - i = + r$, и именно сіе выдетъ, когда за начало вмѣсто A или A' возмется по другую сторону центра F или F' какая нибудь точка a или a'; но тогда, по причинѣ противнаго положенія величинъ h и i съ тѣмъ, которое онѣ имѣли въ строеніи предполагаемомъ авторомъ и нами, уравненіе $H^2 t^2 + (H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2) u^2 + 2H^2 (h - i) t \cos. m + (2Hr^2 \sin. n - 2H^2 (h - i) \sin. m. \cos. n) u + H^2 ((h - i)^2 - r^2) = 0$ перемѣнится, и будетъ $H^2 t^2 + (H^2 \cos. n^2 - r^2 \sin. n^2) u^2 - 2 H^2 (h - i) t. \cos. m + (2 H r^2 \sin. n + 2 H^2 (h - i) \sin. m. \cos. n) u + H^2 ((h - i)^2 - r^2) = 0$; однако вмѣсто $h - i$ и m поставивъ $+ r$ и 90°, и придавъ n знакъ —, наконецъ выдетъ опять тоже уравненіе $H^2 t^2 - (r^2 \sin. n^2 - H^2 \cos. n^2) u^2 - (r \sin. n + H \cos. n) 2 H r u = 0$.

Такъ же и подобное нами найденное уравненіе въ косомъ конусѣ перемѣнится, и наконецъ выдетъ опять тоже уравненіе $H^2 t^2 - \frac{1}{\sin. \mu^2} (r^2 \sin. n^2 - H^2 \sin. (\mu + n)^2) u^2 - \frac{1}{\sin. \mu} (r \sin. n + H \sin. (\mu + n)) 2Hru = 0$.

(61) Мы возмемъ для другаго примѣра сфероидъ еллиптической. Поелику уравненіе производящаго его еллипсиса можетъ быть представлено такъ $\overline{ZQ}^2 + c\,\overline{CQ}^2 = b^2$, то уравненіе еллипсоида будетъ $X^2 + Y^2 + c Z^2 = b^2$, и сдѣлавъ $Z = z$, $Y = y$, $X = x - i$, мы получимъ уравненіе $(h - i)^2 - b^2 + 2(h - i) \cos. m. t - 2(h - i) \sin. m. \cos. n. u + t^2 + (c \sin. n^2 + \cos. n^2) u^2 = 0$, въ которомъ можно положить $h - i = b$ и $\cos. m. = 0$ (*), и которое отъ того обратит-

(*) Чтобы уразумѣть сіе, надлежитъ сперва знать, что такое значитъ величина b; на сей конецъ уравненіе еллипсиса $ZQ^2 + c CQ^2 = b^2$ представимъ такъ $U^2 + c T^2 = b^2$, или еще такимъ образомъ U^2

ся въ слѣдующее

$$t^2 = (c\,\sin.n^2 + \cos.n^2)\left(\frac{2b\cos.n}{c\sin.n^2+\cos.n^2}u - u^2\right),$$

кое есть уравненіе еллипсиса, по крайней мѣрѣ когда сѣченіе не параллельно плоскости круга HBID, которой въ случаѣ раздѣленія имъ сфероида на двѣ равныя части *екваторомъ* называется, ибо когда сѣченіе параллельно плоскости сего екватора, тогда $\sin.n = 0$, $\cos.n = 1$ и $t^2 = 2bu - u^2$; что есть уравненіе круга.

Случай же, въ которомъ сѣченіе перпендикулярно къ плоскости екватора и въ которомъ $\sin.n = 1$ и $\cos.n = 0$, *кажется отсюда исключается* (*); но тогда $y\cos.m - (x-h)\sin.m = 0$.

$= c\left(\frac{b^2}{c} - T^2\right)$, и означивъ чрезъ g и k оси его, мы будемъ имѣть $c = \frac{k^2}{g^2}$, $\frac{b^2}{c} = g^2$ и $b = k$; откуда слѣдуетъ, что b есть одна изъ осей еллипсиса, и именно та, которая описываетъ наибольшій изъ круговъ сфероида, и потому, чтобы было $h - i = b$, ничего болѣе не остается какъ токмо взять на окружности сего круга какую нибудь точку B (черт. 7), и протянувъ въ оной къ нему касательную BE и чрезъ центръ C прямую ACB, разсѣчь сфероидъ BFB′ плоскостію BZb, чрезъ BE проходящею; ибо изъ какой нибудь точки Z сѣченія опустивъ на плоскость упомянутаго круга перпендикулярную ZM и изъ M на BE и ACB перпендикулярныя MN и MP, и соединивъ N съ Z прямою ZN, которая такъ же перпендикулярна къ BE, будетъ Z или z = ZM, Y или y = PM, X = CP, x = AP, i = AC, h = AB, m = HBE, t = BN, u = NZ и n = MNZ и слѣдственно выдетъ $m = 90°$, $h - i = b$; и чего ни въ какомъ другомъ случаѣ получить не можно. И такъ явствуетъ, что авторъ предпайденное общее уравненіе чрезъ положеніе $h - i = b$ обратилъ въ частной случай.

(*) Не кажется, а дѣйствительно изъ уравненія $t^2 = (c\sin.n^2 + \cos.n^2)\left(\frac{2b\cos.n}{c\sin.n^2+\cos.n^2}u - u^2\right)$, произшедшаго послѣ положенія $\cos.m = 0$ и $h - i = b$, сей случай исключается, ибо оное уравненіе въ семъ случаѣ обращается въ сіе $t^2 = -cu^2$, кое показываетъ, что всякой абсциссѣ u соотвѣтствуетъ мнимая ордината t: то есть, что въ семъ случаѣ совсѣмъ нѣтъ сѣченія; и дѣйствительно въ семъ случаѣ вмѣсто сѣченія будетъ

$y = t\,\text{ſin.}\,m + x(-h)\,\text{coſ.}\,m,\ z = u,$ и потому $x = h + t\,\text{coſ.}\,m,\ y =$

токмо касательная къ еллипсоиду плоскость, какъ то явствуетъ изъ предъидущаго примѣчанія. Между тѣмъ и послѣ сего положенія ни какой бы случай не имѣлъ изключенія, естьлибы авторъ вмѣсто уравненія для еллипсиса $\overline{QZ}^2 + c\overline{CQ}^2 = b^2$ взялъ сіе $QZ^2 + c\overline{CQ}^2 + eCQ = b^2$ (черт. XIV). Въ самомъ дѣлѣ изъ онаго для сѣченія еллипсоида произойдетъ слѣдующее уравненіе $(h-i)^2 - b^2 + 2(h-i)\,t\,\text{coſ.}\,m + t^2 - (2(h-i)\,\text{ſin.}\,m\,\text{coſ.}\,n - e\,\text{ſin.}\,n)\,u + (c\,\text{ſin.}\,n^2 + \text{coſ.}\,n^2)\,u^2 = 0$, и положивъ $m = 90^\circ$ и $h - i = b$, выдетъ сіе $t^2 = (c\,\text{ſin.}\,n^2 + \text{coſ.}\,n^2)\left(\frac{2\,b\,\text{coſ.}\,n - e\,\text{ſin.}\,n}{c\,\text{ſin.}\,n^2 + \text{coſ.}\,n^2}\,u - u^2\right)$, гдѣ сдѣлавъ $n = 90$, получишь $t^2 + c\,u^2 + e\,u = 0$; что есть уравненіе еллипсиса, взявъ u со знакомъ —. Но дабы уразумѣть, что здѣсь можно положить $m = 90^\circ$ и $h - i = b$, то надлежитъ сперва знать, что значитъ b. На сей конецъ означивъ чрезъ p какую ниесть ординату еллипсиса, сфероидъ производящаго, и чрезъ q соотвѣтствующую абсциссу, отнесемъ еллипсисъ къ взаимному сихъ линей пресѣченію, какъ началу; сего для, означая чрезъ T и U новыя координаты, будетъ $U^2 = \frac{k^2}{g^2}(g^2 - (q+T)^2) = \frac{k^2}{g^2}(g^2 - q^2) - \frac{k^2}{g^2}(2\,q\,T + T^2) = p^2 - \frac{k^2}{g^2}(2\,q\,T + T^2)$ или $U^2 + \frac{k^2}{g^2}T^2 + \frac{2\,k^2}{g^2}\,q\,T = p^2$; и посему въ уравненіи $\overline{QZ}^2 + c\,\overline{CQ}^2 + eCQ = b^2$ полагая $QZ = U$ и $CQ = T$, по способу неопредѣленныхъ предстоящихъ выдетъ $c = \frac{k^2}{g^2}$, $e = \frac{2\,k^2}{g^2}\,q$ и $b = p$; откуда слѣдуетъ, что b можетъ значить всякую ординату еллипсиса, лишь бы только q была соотвѣтствующая абсцисса, отъ центра взятая.

Положивъ сіе представимъ себѣ еллиптической сфероидъ KFL (черт. 8) разсѣченный какъ ниесть плоскостію, коея общее пресѣченіе съ плоскостію екватора пусть будетъ BE, чрезъ центръ C сего екватора до онаго общаго пресѣченія проведемъ какъ ниесть прямую ACB и чрезъ ось CF и ACB вообразимъ проходящую плоскость, коея общее пресѣченіе съ плоскостію сѣченія сфероида пусть будетъ BB′B″.

Отнесемъ сперва сфероидъ къ плоскости екватора KL; и на сей конецъ взявъ какую ниесть точку Z на сѣченіи его, опустимъ изъ оной на плоскость екватора перпендикулярную ZM, и изъ M на BE и ACB перпендикулярныя MN и MP, и соединимъ N съ Z прямою ZN; будетъ Z или $z = ZM$, Y или $y = PM$, $X = CP$, $x = AP$, $i = AC$, $h = AB$, $m = HBE$, $t = BN$, $u = NZ$ и $n = MNZ$, и общее уравненіе между t и u, какъ то выше примѣтили, выдетъ $(h-i)^2 - b^2 + 2(h-i)\,t\,\text{coſ.}\,m$

$t \sin. m$, $z = u$; чего ради дѣлая въ уравненіе еллипсоида

$+ t^2 - (2(h-i)\sin.m\cos.n - e\sin.n)u + (c\sin.n^2 + \cos.n^2)u^2 = 0$, гдѣ, какъ то видно, дабы уголъ m былъ прямой, стоитъ токмо по произволенію чрезъ C протянутую прямую ACB протянуть перпендикулярно къ BE; но чтобы было $h - i = b$, того не довольно, ибо величина b могущая означать всякую ординату еллипсиса, никогда не можетъ быть больше полуоси или радіуса еккатора CQ, а $h - i$ напротивъ того здѣсь больше сего радіуса; и такъ отнесемъ сфероидъ къ плоскости K′L′, параллельной KL и проходящей чрезъ точку B′, въ коей прямая BB′B″ пресѣкаетъ поверхность сфероида и периметръ сѣченія его; почему замѣтивъ, что B′E′, параллельная BE, есть общее пресѣченіе плоскости сѣченія съ плоскостію K′L′, что ZM′ отсѣченная отъ ZM, есть перпендикуляръ изъ Z на плоскость K′L′ опущенный, что M′N′ и M′P′ параллельныя MN и MP, суть перпендикуляры, изъ M′ на B′E′ и A′C′B′ опущенные, будетъ Z или $z =$ M′Z, Y или $y =$ M′P′, X $=$ C′P′, $x =$ A′P′, $i =$ A′C′, $h =$ A′B′, $m =$ H′B′E′, $t =$ B′N′, $u =$ N′Z и $n =$ M′N′Z, и уравненіе между t и u выдетъ тоже самое; и какъ b можетъ означать всякую ординату производящаго сфероидъ еллипсиса, лишь бы только для q была взята соотвѣтствующая абсцисса, то полагая CC′ $= q$, будетъ $h - i$ ($=$ C′B′) $= b$, и уравненіе сдѣлается $t^2 = (c\sin.n^2 + \cos.n^2)\left(\frac{b\cos.n - e\sin.n}{c\sin.n^2 + \cos.n^2}u - u^2\right)$, буде въ тоже время и $m = 90°$.

Но лучше сфероидъ отнести къ плоскости K″L″ параллельной KL и проходящей чрезъ точку B″, въ которой прямая BB′B″ пресѣкаетъ другой разъ поверхность сфероида и периметръ сѣченія его, потому что тутъ удобнѣе будетъ произвести частные случаи. И такъ отнесемъ сфероидъ къ плоскости K″L″; для сего продолжимъ MZ до пресѣченія въ M″ съ плоскостію K″L″ и NZ до пресѣченія въ N″ съ прямою B″E″, коя есть общее пресѣченіе плоскости K″L″ съ сѣченіемъ сфероида, соединимъ M″ съ N″ прямою M″N″ и проведемъ A″B″C″ параллельно ABC и M″P″ параллельно MP; будетъ ZM″ перпендикулярна къ плоскости K″L″, M″N″ перпендикулярна къ B″E″ и M″P″ перпендикулярна къ A″B″C″, и для того Z или $z =$ ZM″, Y или $y =$ M″P″, X $=$ C″P″, $x =$ A″P″, $i =$ A″C″, $h =$ A″B″, $m =$ H″B″E″, $t =$ B″N″, $u =$ N″Z и $n =$ M″N″Z, и какъ b можетъ означать всякую ординату еллипсиса, лишь бы только для q была взята соотвѣтствующая абсцисса, то полагая CC″ $= q$, будетъ $i - h$ ($=$ C″B″) $= b$, или $h - i = -b$, и уравненіе, по причинѣ что u означающая здѣсь N″Z, имѣетъ противное положеніе съ u означавшей прежде NZ, сдѣлается $t^2 = (c\sin.n^2 + \cos.n^2)\left(\frac{b\cos.n + e\sin.n}{c\sin.n^2 + \cos.n^2}u - u^2\right)$.

надлежащія вставливанія, получимъ уравненіе сѣченія (*)

$$(h-i)^2-b^2+2(h-i)\cos.m\,t+t^2+cu^2=0,$$

въ которомъ не можно въ одно и тоже время положить $(h-i)^2=b^2$ и $\cos.m=0$ [ибо отъ того оное обращается въ $t^2=-cu^2$]. Естьли положимъ токмо $h-i=-b$, то будемъ имѣть $u^2=\frac{1}{c}(2b\cos.m.\ t-t^2)$ (**); положивъ же токмо $\cos.m=0$, будемъ имѣть $t^2+cu^2=b^2-(h-i)^2$; что сдѣлается $t^2+cu^2=b^2$, когда $h=i$, и даетъ еллипсисъ подобной еллипсису производителю. Мы подробнѣе изъяснимъ ѳеорію кривыхъ поверьхностей въ приложеніяхъ дифференціальнаго изчисленія (***).

(*) Нѣтъ нужды дѣлать для сего другія вставливанія, а довлѣетъ токмо взять общее авторомъ выше найденное уравненіе $(h-i)^2-b^2+2(h-i)\cos.m.t-2(h-i)\sin.m.\cos.n.u+t^2+(c\sin.n^2+\cos.n^2)u^2=0$, и положить въономъ $n=90°$; отъ чего и обратится въ $(h-i)^2-b^2+2(h-i)\cos.mt+t^2+cu^2=0$.

(**) Авторъ положилъ $h-i=-b$, а не $=+b$, для того, чтобы сдѣлать первой членъ $\frac{2b\cos.m}{c}t$ второй части уравненія $u^2=\frac{1}{c}(2b\cos.m.t-t^2)$ положительнымъ; но сей членъ и безъ того могъ бы быть положительнымъ: стоитъ токмо сопровождающему его $\cos.m$ придать знакъ $-$; что и неминуемо сдѣлать должно, потому что, дабы въ случаѣ $n=90°$ у автора могло быть сѣченіе сфероида, уголъ m ($=$ HBE) долженъ быть тупой, какъ то всякой удобно усмотрѣть можетъ, когда тщательно разсмотритъ (черт. 7). Въ прочемъ можно положить $h-i=-b$; и тогда получится сѣченіе на томъ же чертежѣ чрезъ B′b′Z′E′ представленное, и гдѣ уголъ m ($=$ HB′E′) останется острымъ.

(***) Но сія подробность изъясненная авторомъ въ приложеніяхъ дифференціональнаго изчисленія, относится не къ сей части Геометріи, которая въ сей главѣ разсматривается, но къ другой такъ называемой *трансцендентной*. Сюда же относящаяся подробность, коя упущена авторомъ, состоитъ въ слѣдующемъ:

1) Въ общемъ и предварительномъ о кривыхъ поверьхностяхъ познаніи, и раздѣленіи оныхъ на безпрерывныя, или правильныя, и прерывныя, или неправильныя, потомъ на алгебраическія и трансцендентныя.

2) Вѣ перемѣнѣ координатѣ алгебраическихѣ кривыхѣ поверьхностей, и раздѣленіи оныхѣ поверьхностей на порядки; куда относится и предложенное авторомѣ о пресѣченіи кривыхѣ поверьхностей плоскостями.

3) Вѣ раздѣленіи крывыхѣ поверьхностей каждаго порядка на главные роды и изложеніи свойствѣ принадлежащихѣ симѣ родамѣ.

И наконецѣ 4) во взаимномѣ пресѣченіи кривыхѣ поверьхностей кривыми поверьхностями; откуда раждаются кривыя линеи двоякую кривизну имѣющія. Мы вѣ концѣ сея книги постараемся подать о сихѣ предметахѣ понятіе, поколику будетѣ вѣ нашей возможности. Притомѣ, поелику авторѣ приступивѣ отѣ кривыхѣ линей кѣ кривымѣ поверьхностямѣ, прешелѣ взаимное пресѣченіе кривыхѣ линей сѣ кривыми линеями, мы начнемѣ послѣднююизѣ упомянутыхѣ нами статей онымѣ кривыхѣ линей кривыми линеями пресѣченіемѣ, которое непосредственно ведетѣ кѣ геометрическому алгебраическихѣ уравненій строенію, предложенному авторомѣ особеннымѣ способомѣ вѣ слѣдующей статьѣ сей первой главы.

О мѣстахъ геометрическихъ.

(62) На прямой AB (черт. XVI) я возму $AP = X$, протяну $PM = Y$, какой иместь уголъ съ AP составляющую, къ оной MP или MM′ проведу безчисленное множество параллельныхъ, каковы суть NN′; и естьли точки M, M′, N, N′ и такъ далѣе, принадлежатъ къ кривой линеи, коея свойство дано будетъ чрезъ уравненіе между Y и X, то сія кривая будетъ то, что называется *мѣстомъ* неопредѣленнаго уравненія. Все обращается въ сей вопросъ: дано уравненіе между двумя перемѣнными количествами Y и X, опредѣлить кривую, которая бы могла построить оное [или лучше, которая бы удовлетворила оному]. Мы для примѣра возмемъ уравненіе второй степени $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$. Поставь въ оное вмѣсто Y и X ихъ величины получаемыя изъ 1 и 2 го уравненій члена 20 го; и естьли за второй членъ преобразованнаго уравненія возмется $\frac{FT - H}{E} V$, то сдѣлай $F = 0$ и $H = 0$, дабы ординаты были при діаметрѣ, а потомъ $q = 90°$, что бы сей діаметръ былъ ось. И симъ образомъ получится простѣйшее и удобнѣйшее къ построенію уравненіе кривой линеи.

(63) Но будетъ кратче, когда въ 1 и 2 мъ уравненіяхъ положишь сперва $q = 90°$, которыя чрезъ то сдѣлаются

$$(X - x)\,\text{ſin.}\,n = T\,\text{ſin.}\,(m + n) + V\,\text{coſ.}\,(m + n)$$
$$(Y + y)\,\text{ſin.}\,n = T\,\text{ſin.}\,m + V\,\text{coſ.}\,n,$$

и вмѣсто того, что бы чинить новыя вставливанія, можно будетъ употребить преобразованное уравненіе члена 23 го, поставляя $\frac{\text{ſin.}\,(m+n)}{\text{ſin.}\,n}$, $\frac{\text{coſ.}\,(m+n)}{\text{ſin.}\,n}$, $\frac{\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,n}$, $\frac{\text{coſ.}\,m}{\text{coſ.}\,n}$ вмѣсто $\text{coſ.}\,m$, $-\text{coſ.}(q - m)$, $\text{ſin.}\,m$ и $\text{ſin.}\,(q - m)$ (*). И такъ, полагая для краткости $m + n =$

(*) Въ самомъ дѣлѣ, когда въ уравненіяхъ $(X - x)\,\text{ſin.}\,n = T.\text{ſin.}\,(m + n) - V\,\text{ſin.}\,(m + n - q)$ и $(Y + y)\,\text{ſin.}\,(m + n) = V\,\text{ſin.}\,q + \frac{\text{ſin.}\,m}{\text{ſin.}\,n}$ (T ſin. (m + n)

μ, изъ уравненій $H = 0$ и $F = 0$, получишь сіи два

$$(2ay - bx - d).\text{cof.}\,m. + (by - 2cx - e)\,\text{cof.}\,\mu = 0\,;$$

$$2a\,\text{fin.}\,m.\,\text{cof.}\,m + b(\text{cof.}\,m.\,\text{fin.}\,\mu + \text{fin.}\,m.\,\text{cof.}\,\mu) + 2c\,\text{fin.}\,\mu\,\text{cof.}\,\mu = 0.$$

Пусть $\text{cof.}\,m = \beta\,\text{cof.}\,\mu$, $\text{fin.}\,m = \gamma\,\text{fin.}\,\mu$; γ и β опредѣлятся чрезъ слѣдующія два уравненія $\beta = -\frac{by - 2cx - e}{2ay - bx - d}$, $2a\beta\gamma + b(\beta + \gamma) + 2c = 0$. Потомъ будешь имѣть $\beta^2\,\text{cof.}\,\mu^2 + \gamma^2\,\text{fin.}\,\mu^2 = 1$; откуда удобно будетъ извлечь $\text{cof.}\,\mu = \pm\sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2}}$ и $\text{fin.}\,\mu = \pm\sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \gamma^2}}$ чрезъ что извѣстны будутъ углы m и n. Сдѣлай $K = 0$, на тотъ конецъ, чтобы B была одна изъ точекъ кривой; потомъ на прямой BF, какъ оси (черт. XVII), опиши коническое сѣченіе $EV^2 + GT^2 - IT^2 = 0$, коего координаты $BN, = T$, и $NM, = V$, суть перпендикулярныя между собою; и протянувъ AE, съ

$-V\,\text{fin.}\,(m + n - q))$ сдѣлаешь $q = 90°$, то первое обратится въ $X - x = T\frac{\text{fin.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n} + V\frac{\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, или въ сіе $X = T\frac{\text{fin.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n} + V.\frac{\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n} + x$, а другое сдѣлается $Y + y = \frac{V}{\text{fin.}\,(m+n)} + \frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n}\left(T + \frac{V.\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,(m+n)}\right) = T.\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n} + V\left(\frac{1}{\text{fin.}\,(m+n)} + \frac{\text{fin.}\,m.\,\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,(m+n)\,\text{fin.}\,n}\right) = T.\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n} + V\left(\frac{\text{fin.}\,n + \text{fin.}\,m.\,\text{cof.}\,m.\,\text{cof.}\,n - \text{fin.}\,m^2.\,\text{fin.}\,n}{\text{fin.}\,(m+n)\,\text{fin.}\,n}\right) = T.\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n} + V\left(\frac{(1 - \text{fin.}\,m^2)\,\text{fin.}\,n + \text{fin.}\,m.\,\text{cof.}\,m.\,\text{cof.}\,n}{\text{fin.}\,(m+n)\,\text{fin.}\,n}\right) = T.\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n} + V.\frac{\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,n}$, или будетъ $Y = T.\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n} + V.\frac{\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,n} - y$; но когда въ тѣхъ же уравненіяхъ положено было $n = 90°$, тогда вышло $X = T\,\text{cof.}\,m - V\,\text{cof.}\,(q - m) + x$, и $Y = T.\,\text{fin.}\,m + V\,\text{fin.}\,(q - m) - y$, такъ что гдѣ въ сихъ послѣднихъ стоитъ $\text{cof.}\,m$, $-\text{cof.}\,(q - m)$, $\text{fin.}\,m$, $\text{fin.}\,(q - m)$, тамъ въ первыхъ находится $\frac{\text{fin.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, $\frac{\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, $\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n}$, $\frac{\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,n}$; слѣдовательно, когда въ уравненіе $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$ учинены уже вставливанія, полагая $n = 90°$, то для учиненія вставливаній полагая $q = 90°$, довлѣетъ токмо сдѣлать то, что предписываетъ авторъ. И поелику полагая $n = 90°$, было $H = (2ay - bx - d)\,\text{fin.}\,(q - m) - (by - 2cx - e)\,\text{cof.}\,(q - m)$ и $F = 2a\,\text{fin.}\,m.\,\text{fin.}\,(q - m) + b\,(\text{cof.}\,m.\,\text{fin.}\,(q - m) - \text{fin.}\,m.\,\text{cof.}\,(q - m)) - 2c\,\text{cof.}\,m.\,\text{cof.}\,(q - m)$, то полагая $q = 90°$, выйдетъ $H = (2ay - bx - d)\frac{\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,n} + (by - 2cx - e)\frac{\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, $F = 2a\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n}.\frac{\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,n} + b\left(\frac{\text{fin.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}.\frac{\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,n} + \frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n}.\frac{\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}\right) + \frac{2c\,\text{fin.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}.\frac{\text{cof.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, и по причинѣ что H и F равны нулю и $m + n = \mu$, произойдутъ два уравненія авторомъ найденныя.

BE составляющую уголъ m, и MP съ AE дѣлающую уголъ n, будетъ, какъ то ясно видно, $AP = X$, $PM = Y$, и слѣдственно кривая, нами описанная, есть мѣсто предложеннаго уравненія. (*).

(*) Здѣсь авторъ, которой въ одно время не полагаетъ $n = 90°$ и $q = 90°$, могъ бы сіе сдѣлать безъ всякаго сомнѣнія, какъ то мы ясно показали во второмъ примѣчаніи къ члену 24му; и тогда координаты y и x, вмѣсто того, чтобы быть неопредѣленными, были бы, такъ какъ и уголъ m, опредѣленныя. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ m опредѣляется чрезъ уравненіе $F = 0$, которое для $n = 90°$ и въ тоже самое время для $q = 90°$, сдѣлается $2(a-c)\,\text{ſin.}\,m.\,\text{coſ.}\,m + b(\text{coſ.}\,m^2 - \text{ſin.}\,m^2) = 0$, или $(a-c)\,\text{ſin.}\,2m + b\,\text{coſ.}\,2m = 0$ или $\text{tang.}\,2m = -\frac{b}{a-c}$, и по причинѣ что $\text{tang.}\,2m = \frac{2\,\text{tang.}\,m}{1-\text{tang.}\,m^2}$, даетъ $\text{tang.}\,m = \frac{a-c+\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{b}$, что пусть $= r$; координаты же y и x опредѣляются изъ уравненій $H = 0$ и $K = 0$, изъ коихъ первое для $n = 90°$ и въ то же самое время для $q = 90°$, сдѣлается $(2ay - bx - d)\,\text{coſ}\,m - (by - 2cx - e)\,\text{ſin.}\,m = 0$, или $\text{tang.}\,m = \frac{2ay-bx-d}{by-2cx-e}$, или $r(by - 2cx - e) = 2ay - bx - d$, а другое останется непремѣнно $ay^2 - bxy + cx^2 - dy + ex + f = 0$.

Но со всѣмъ тѣмъ сей способъ опредѣлять кривую линею, которая бы удовлетворяла данному уравненію, не весьма удобенъ для самаго дѣла, ибо влечетъ за собою длинности. Мы въ примѣчаніи къ члену 52му предназначили другой удобнѣйшій, приложивъ его къ одному частному случаю; чего ради здѣсь для полнаго его уразумѣнія, приложимъ еще къ другому случаю, которой въ прочемъ самъ по себѣ достопримѣчателенъ.

Разстояніе CR (черт. 9) непремѣнной точки C до прямой AB дано, и разстоянія MP, NQ и такъ далѣе безчисленнаго множества другихъ точекъ M, N и такъ далѣе до той же прямой AB къ разстояніямъ ихъ MC, NC и такъ далѣе до точки C суть въ постоянномъ содержаніи линей a и b; вопрошается найти мѣсто оныхъ точекъ?

Изъ какой нибудь одной изъ сихъ точекъ M опусти на продолженную, естьли то нужно, RC перпендикуляръ MT, и означивъ RT чрезъ x, MT чрезъ y и CR чрезъ c, получишь $MP = x$, $CT = c - x$ и $CM = \sqrt{y^2 + c^2 - 2cx + x^2}$, и для предполагаемаго свойства $MP : MC = a : b$ будешь имѣть $a^2y^2 + (a^2 - b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0$, гдѣ надлежитъ различить три случая: или $a = b$, или $a > b$, или наконецъ $a < b$. Въ

первомъ случаѣ найденное уравненіе сдѣлается $y^2 = 2cx - c^2 = (x - \frac{c}{2})2c$; и положивъ $x - \frac{c}{2} = z$, обратится въ $y^2 = 2cz$; что явно есть уравненіе параболы. Въ другихъ же случаяхъ тоже уравненіе приметъ сей видъ $a^2y^2 + (\pm a^2 \mp b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0$, или слѣдующій $+\frac{a^2y^2}{\pm a^2 \mp b^2} = x^2 + \frac{2a^2cx}{\pm a^2 \mp b^2} \pm \frac{a^2c^2}{\pm a^2 \mp b^2}$; дополни $x^2 \mp \frac{2a^2c}{\pm a^2 \mp b^2}x$ квадратомъ отъ $\frac{a^2c}{\pm a^2 \mp b^2}$, выдетъ $\frac{a^4c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} \mp \frac{a^2y^2}{\pm a^2 \mp b^2} = (\frac{a^2c}{\pm a^2 \mp b^2} \mp x)^2 \pm \frac{a^2c^2}{\pm a^2 \mp b^2}$, или $\frac{a^4c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} \mp \frac{a^2y^2}{\pm a^2 \mp b^2} = (x \mp \frac{a^2c}{\pm a^2 \mp b^2})^2 \pm \frac{a^2c^2}{\pm a^2 \mp b^2}$; положи $\frac{a^2c}{\pm a^2 \mp b^2} \mp x = z$ или $x \mp \frac{a^2c}{\pm a^2 \mp b^2} = z$, будетъ $\mp\frac{a^2y^2}{\pm a^2 \mp b^2} = z^2 + \frac{a^2c^2}{\pm a^2 \mp b^2} - \frac{a^4c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} = z^2 - \frac{a^2b^2c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2}$ и $y^2 = \mp(\frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2})(z^2 - \frac{a^2b^2c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2}) = \pm(\frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2})(\frac{a^2b^2c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} - z^2)$, такъ что положивъ $\frac{a^2b^2c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} = g^2$ и $\frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2} = \frac{b^2}{g^2}$, оное уравненіе сдѣлается $y^2 = \pm\frac{b^2}{g^2}(g^2 - z^2)$, что явно есть уравненіе еллипсиса и гиперболы.

Теперь для учиненія геометрическаго строенія въ первомъ случаѣ отъ R на RS (черт. 9) возьми $RG = \frac{c}{2}$, и на RS, какъ оси, параметромъ $2c$ опиши проходящую чрезъ вершину G параболу mGMN; оная будетъ то мѣсто, въ которомъ MP = CM; сирѣчь въ которомъ MP : CM = $a : a$ или $b : b$. Ибо означивъ RT чрезъ x и MT чрезъ y, будетъ $TG = x - \frac{c}{2} = z$, и для свойства параболы $y^2 = 2cz$, $y^2 = 2c(x - \frac{c}{2})$ или $y^2 - 2cx + c^2 = 0$; что есть то самое уравненіе, которое даетъ заданный вопросъ въ семъ первомъ случаѣ.

При чемъ точка C, какъ отстоящая отъ вершины G параболы на $\frac{1}{4}$ параметра $2c$, есть фокусъ параболы, и прямая AB, какъ отстоящая отъ фокуса C на половину того параметра, есть то, что *направленіемъ* ея называется.

Потомъ въ другихъ двухъ случаяхъ на RS отъ R до F (черт. 10) возьми $RF = \frac{c}{\pm a^2 \mp b^2}$, въ первомъ надъ линеею AB, а въ другомъ подъ оною; и на RS, какъ направленіи первой оси, осями g и h опиши въ первомъ еллипсисъ, а въ другомъ гиперболу mMM′, такъ чтобы центръ ихъ былъ въ точкѣ F; оный еллипсисъ, въ одномъ случаѣ, и оная гипербола, въ другомъ, будетъ то мѣсто, въ которомъ MP . MC или M′P . M′C = $a : b$. Ибо, означивъ RT чрезъ x, TM чрезъ

y, будетъ FT въ одномъ случаѣ $= \frac{a^2 c}{a^2 - b^2} - x = z$, а въ другомъ $= x + \frac{a^2 c}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 c}{-a^2 + b^2} + x = z$, или въ томъ и другомъ $= \frac{a^2 c}{\pm a^2 \mp b^2} \mp x$, и для свойства еллипсиса и гиперболы $y^2 = \pm \frac{b^2}{g^2}(g^2 - z^2) = \pm \frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2}\left(\frac{a^2 b^2 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} - z^2\right)$, выдетъ $y^2 = \pm \frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2}\left(\frac{a^2 b^2 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} - x^2 \pm \frac{2 a^2 c x}{\pm a^2 \mp b^2} - \frac{a^4 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2}\right)$, или $y^2 = \pm \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}\left(-\frac{(\pm a^2 \mp b^2) a^2 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} \mp x^2 + \frac{2 a^2 c x}{\pm a^2 \mp b^2}\right)$, или $a^2 y^2 = -a^2 c^2 \mp (\pm a^2 \mp b^2) x^2 + 2 a^2 c x$ или $a y^2 + (a^2 - b^2) x^2 - 2 a^2 c x + a^2 c^2 = o$; что есть то самое уравненїе, которое даетъ заданный вопросъ, какъ въ случаѣ $a > b$, такъ и въ случаѣ $a < b$.

Естьли же PM въ еллипсисѣ продолжится въ верьхъ, а въ гиперболѣ въ низъ, до другаго пресѣченїя въ M′, и означится RT′ чрезъ x и T′M′ чрезъ y; то будетъ FT′ въ еллипсисѣ $= x - \frac{a^2 c}{a^2 - b^2}$, а въ гиперболѣ $= x - \frac{a^2 c}{b^2 - a^2} = x - \frac{a^2 c}{-a^2 + b^2}$ или въ томъ и другомъ случаѣ $x - \frac{a^2 c}{\pm a^2 \mp b^2}$; и потому въ общее уравненїе $y^2 = \pm \frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2}\left(\frac{a^2 b^2 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} - z^2\right)$ вмѣсто z^2 поставивъ $\left(x - \frac{a^2 c}{\pm a^2 \mp b^2}\right)^2$, выдетъ въ еллипсисѣ $a^2 y^2 + (a^2 - b^2) x^2 - 2 a^2 c x + a^2 c^2 = o$, а въ гиперболѣ $a^2 y^2 + (a^2 - b^2) x^2 + 2 a^2 c x + a^2 c^2 = o$, какъ и быть должно, поелику RT′ въ еллипсисѣ есть положительная абсцисса, а въ гиперболѣ отрицательная.

Поелику же $\frac{a^2 b^2 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} = g^2$, и $\frac{\pm a^2 \mp b^2}{a^2} = \frac{b^2}{g^2}$, то будетъ $g = \frac{a b c}{\pm a^2 \mp b^2}$ и $h = \frac{b c}{\sqrt{\pm a^2 \mp b^2}}$; откуда, по причинѣ что $CF = \frac{a^2 c}{\pm a^2 \mp b^2} \mp c = \frac{b^2 c}{\pm a^2 \mp b^2}$, выдетъ $CG = \pm \frac{a b c}{\pm a^2 \mp b^2} \mp \frac{b^2 c}{\pm a^2 \mp b^2}$, $CS = + \frac{a b c}{\pm a^2 \mp b^2} + \frac{b^2 c}{\pm a^2 \mp b^2}$ и $CG \times CS = \frac{\pm a^2 b^2 c^2 \mp b^4 c^2}{(\pm a^2 \mp b^2)^2} = \frac{b^2 c^2}{\pm a^2 \mp b^2} = h^2$; слѣдовательно точка C есть фокусъ. И сего ради въ сходствїе съ параболою прямая AB *направленїемъ еллипсиса* или *гиперболы* называется.

И какъ $\frac{b^2 c}{\pm a^2 \mp b^2} : \frac{a b c}{\pm a^2 \mp b^2} = \frac{a b c}{\pm a^2 \mp b^2} : \frac{a^2 c}{\pm a^2 \mp b^2}$, то будетъ CF : FG = FG · FR; чрезъ сїе извѣстнымъ дѣлается, какъ по данному еллипсису или гиперболѣ опредѣлить направленїе того или другаго изъ сихъ коническихъ сѣченїй.

Изъ рѣшенія сего предложеннаго нами вопроса слѣдуетъ рѣшеніе другаго, а именно: по данному фокусу C и направленію AB (черт. 9) описать коническое сѣченіе, которое бы проходило чрезъ данную точку M? Ибо для сего стоитъ токмо изъ M опустить на направленіе AB перпендикуляръ MP и провести CM, по содержанію линей MP и CM описать надлежащее коническое сѣченіе.

Отсюда слѣдуетъ рѣшеніе еще сего вопроса: по данному фокусу описать коническое сѣченіе, которое бы проходило чрезъ три данныя точки? Но для онаго вопроса потребно сперва знать слѣдующую лемму:

Естьли изъ какой нибудь коническаго сѣченія точки N (черт. 9) чрезъ фокусъ C протянется прямая NC*m*, и еще чрезъ другую точку M другая NMK до пресѣченія съ направленіемъ въ K; то линея CK, изъ фокуса до онаго пресѣченія протянутая, раздѣлитъ уголъ MC*m* на двѣ равныя части. Ибо, по причинѣ NQ : MP = CN.CM и NQ : MP = NK MK, будетъ CN·CM = NK:MK, и проведши ML параллельно NC*m*, выдетъ NK: MK = CN: LM; чего ради CM = LM, и уголъ *m*CK (= CLM) = MCK. И сіе равно справедливо, когда въ случаѣ гиперболы другая точка возмется гдѣ нибудь на противоположенной гиперболѣ.

Положивъ сіе, пусть C фокусъ и M, N, O (черт. 11) три данныя точки, чрезъ кои коническое сѣченіе проходить надлежитъ; изъ M и O чрезъ C протяни прямыя MC*m*, OC*o*, такъ же и чрезъ N прямыя MNA, ONB; потомъ соедини C съ N прямою CN и раздѣли углы NC*m* NC*o* прямыми CA, CB пополамъ; точки A и B, въ коихъ онѣ съ MNA и ONB пресѣкутся, будутъ находиться на направленіи коническаго сѣченія; что очевидно изъ предъидущей леммы. И такъ ничего болѣе не остается сдѣлать, какъ по данному фокусу и направленію описать коническое сѣченіе, которое бы проходило чрезъ какую нибудь одну изъ данныхъ точекъ, что удобно уже учинить можно.

И сіе равно справедливо, когда въ случаѣ гиперболы одна изъ данныхъ точекъ должна находиться на противоположенной гиперболѣ.

О строеніи опредѣленныхъ уравненій.

(64). Пусть будетъ опредѣленное уравненіе четвертой степени

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0.$$

Я уничтожу два первые члена, полагая

(1) . . . . . . $x^2 + bx = ay$, и я получу

(2) . . . . . . $y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{c}{a}x^2 - dx - af = 0$;

коего уравненія мѣсто есть парабола, еллипсисъ или гипербола, смотря потому, что b^2 равенъ, меньше или больше нежели ac. Откуда слѣдуетъ, что чрезъ параболу [поелику первое уравненіе $x^2 + bx = ay$ принадлежитъ къ параболѣ] и другое коническое сѣченіе всегда можно построить предложенное уравненіе [то есть $x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0$]. Поставь во 2^e уравненіе вмѣсто x^2 равную ему величину $ay - bx$, 1) въ членъ $-\frac{b^2x^2}{a^2}$, 2) въ членъ $\frac{c}{a}x^2$ и 3) въ оба оные члена $\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{c}{a}x^2$, будешь имѣть три уравненія

(3) . . . . . . $y^2 - \frac{b^2}{a}y + \frac{c}{a}x^2 + (\frac{b^3}{a^2} - d)x - af = 0$,

(4) . . . . . . $y^2 + cy - \frac{b^2}{a^2}x^2 - (\frac{bc}{a} + d)x - af = 0$,

(5) . . . . . . $y^2 + (c - \frac{b^2}{a})y - (d + \frac{bc}{a} - \frac{b^3}{a^2})x - af = 0$,

изъ коихъ первое принадлежитъ къ еллипсису, которой сдѣлается кругомъ, когда будетъ $c = a$ и уголъ координатъ x, y прямой; другое принадлежитъ къ гиперболѣ, которая обратится въ

(*) Строеніе уравненій первой и второй степени авторъ здѣсь преходитъ; да и я такъ же прейду оное, потому что по истинному понятію, какое объ Алгебрѣ имѣть надлежитъ, упомянутое строеніе совершенно принадлежитъ къ той части сея науки, которая простою Алгеброю называется.

прямоугольную, когда будетъ $b = a$, и наконецъ третіе принадлежитъ къ параболѣ (*).

Найдутся еще два уравненія, отнимая 1^е отъ 5го, и потомъ прилагая его къ оному 5 му:

(*) Все сіе явствуетъ изъ послѣдняго нашего примѣчанія къ члену 24му; ибо, что первое уравненіе принадлежитъ къ еллипсису, другое къ гиперболѣ и третіе къ параболѣ, то послѣ упомянутаго примѣчанія сіе очевидно; но что при прямомъ углѣ координатъ для $c = a$ и $b = a$, первое и второе уравненія будутъ принадлежать къ кругу и прямоугольной гиперболѣ, то потому:

Выше видѣли, что уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$, которое принадлежитъ къ еллипсису, когда c положительное, или къ гиперболѣ, когда c отрицательное, обращается въ сихъ двухъ случаяхъ въ слѣдующее $Y^2 = \frac{b^2}{g^2}(2gX \mp X^2)$, гдѣ $\frac{b^2}{g^2} = \frac{c}{a}$, когда c положительное, или $= -\frac{c}{a}$, когда c отрицательное; но ясно видно, что положивъ $h = g$, уравненіе $Y^2 = \frac{b^2}{g^2}(2gX \mp X^2)$ будетъ принадлежать къ кругу или прямоугольной гиперболѣ; чего ради, поелику $h = g$ дѣлаетъ $\pm c = a$, такъ же и уравненіе $aY^2 + cX^2 + eX = 0$, въ случаѣ $\pm c = a$, будетъ принадлежать къ кругу или прямоугольной гиперболѣ. Возми онаго уравненія преобразованное $EV^2 + FTV + GT^2 - HV - IT + K = 0$, которое можно почитать за общее уравненіе всѣхъ кривыхъ линей втораго порядка; и поелику въономъ $E = a \sin.(q-m)^2 + c.\cos.(q-m)^2$, $G = a \sin.m^2 + c \cos.m^2$ и $F = 2a \sin.m.\sin.(q-m) - 2c \cos.m.\cos.(q-m)$, то для $+c = a$ и $q = 90°$ будетъ $E = a$, $G = 0$ и $F = 0$, и потому преобразованное уравненіе круга при прямомъ углѣ координатъ V и T сдѣлается $V^2 + T^2 - \frac{H}{a}V - \frac{IT}{a} + \frac{K}{a} = 0$, которое есть того же вида, что и уравненіе (3) ..... $y^2 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{b^2}{a}y + (\frac{b^3}{a^2} - d)x - af = 0$, въ случаѣ $c = a$. Такъ же для $-c = a$, $q = 90°$ и $m = 90°$, будетъ $E = -a$, $G = a$ и $F = 0$, и потому преобразованное уравненіе прямоугольной гиперболы сдѣлается $V^2 - T^2 + \frac{H}{a}V + \frac{I}{a}T - \frac{K}{a} = 0$, которое есть того же вида, что и уравненіе (4) .... $y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + cg - (\frac{bc}{c} + d)x - af = 0$; въ случаѣ $b = a$. Слѣд. и проч.

(6) . . . . $y^2 - x^2 + (c + a - \frac{b^2}{a})y + (-d - b - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2})x - af = 0$,

(7) . . . . $y^2 + x^2 + (b - d - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2})x + (c - a - \frac{b^2}{a})y - af = 0$.

изъ коихъ первое даетъ прямоугольную гиперболу, а другое кругъ, когда уголъ координатъ x и y есть прямой.

(65) Чтобы разрѣшить опредѣленное уравненіе помощію онаго круга и параболы, коея уравненіе есть $x^2 + bx = ay$, то на прямой AG (черт. XVIII) возьми, по ту и другую сторону точки A, $AP = x$, $AD = \frac{1}{2}b$ и на перпендикулярѣ къ AP, $PM = y$; чрезъ точку D проведи параллельно PM прямую CDR, на которой возьми $DC = \frac{b^2}{4a}$; потомъ на сей прямой, какъ оси опиши параболу, которая бы имѣла параметромъ a и вершиною точку C. Естьли она пройдетъ чрезъ точку M, то по причинѣ что $CR = \frac{b^2}{4a} + y$ и что $RM = \frac{1}{2}b + x$, будешь имѣть $(\frac{1}{2}b + x)^2 = a(\frac{b^2}{4a} + y)$ или $bx + x^2 = ay$, что есть уравненіе 1е.

Учинивъ сіе, проведи чрезъ точку A параллельную къ PM, на которой возьми $AB = \frac{a-c}{a} + \frac{2b}{2a}$, естьли оная AB падаетъ по туже сторону, по которую PM, или $AB = \frac{c-a}{2} - \frac{b^2}{2a}$, естьли падаетъ въ противную; потомъ параллельно AP, но въ противную сторону, протяни BK, на которой въ первомъ случаѣ возьми $BE = \frac{1}{2}d - \frac{b}{2a}(a-c) - \frac{b^3}{2a^2}$, или въ другомъ $= \frac{1}{2}d + \frac{b}{2a}(a-c) + \frac{b^3}{2a^2}$, и сверьхъ того протяни еще $EA = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{BE}^2}$, которая для краткости пусть будетъ $= m$. Тогда, замѣтивъ, что BE и AP долженствуютъ имѣть знаки противныя, удобно увидишь, что выраженіе $EM = \sqrt{(BE + AP)^2 + (PM - AB)^2}$, по постановленіи вмѣсто $x^2 + y^2$ равной величины, получаемой изъ 7 го уравненія, сдѣлается $EM = \sqrt{m^2 + af}$. Наконецъ принявъ EM за радіусъ, изъ центра E опиши кругъ; и естьли онъ встрѣтится съ параболою въ точкахъ M, M′, M″, M‴, и изъ оныхъ на продолженную по ту и другую сторону прямую DA

опустишь перпендикуляры MP, M′P′, M″P″, M‴P‴, то линеи AP, AP′, AP″, AP‴ будутъ корни опредѣленнаго четвертой степени уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, протянувъ EM, EM′, и проч., будешь имѣть $\overline{EM}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mM}^2$, $\overline{EM'}^2 = \overline{Em'}^2 + \overline{m'M'}^2$, и проч., которыя уравненія, по причинѣ EM = EM′ — ~~и проч.~~; не иное что суть какъ сїе,

$$y^2 + x^2 + (c - a - \tfrac{b^2}{a})y + (b - d - \tfrac{bc}{a} + \tfrac{b^3}{a^2})x - af = 0,$$

кое соединенное съ $x^2 + bx = ay$ даетъ уравненїе четвертой степени

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0.$$

(66) Тотъ же способъ можетъ служить и къ построенїю уравненїй третьей степени, когда для сего оное возвысится въ четвертую, чрезъ умноженїе на приличествующїй множитель. Пусть предложено будетъ построить слѣдующее третьей степени уравненїе

$$x^3 - hx^2 + apx + a^2q = 0;$$

умножь его на $x + h$, чтобы вышло уравненїе четвертой степени

$$x^4 + (ap - h^2)x^2 + a(aq + hp)x + a^2hq = 0,$$

въ которомъ втораго члена не достаетъ, и сравнивъ оное съ общимъ уравненїемъ четвертой степени, найдешь $b = 0$, и потому AD = 0 и DC = 0; изъ чего заключить должно, что точки A и D соединяются съ вершиною C параболы въ одну точку, и что точка B падаетъ на точку K. Притомъ будетъ AB и $CK = \frac{a-c}{2}$, BE или $KE = \frac{1}{2}d$, $m = \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + d^2}$ и $EM = \sqrt{m^2 + af}$. И продолжая далѣе сравниванїе двухъ уравненїй четвертой степени, найдешь

$CK = \frac{a}{2} - \frac{p}{2} + \frac{b^2}{2a}$, $KE = \frac{q}{2} + \frac{bp}{2a}$, $m = \sqrt{\overline{CK}^2 + \overline{KE}^2}$ и $EM = \sqrt{m^2 - hq}$; откуда извлечешь слѣдующее строенїе:

Проведи чрезъ C (черт. XIX) перпендикуляръ къ оси, на которомъ взявъ $CF = h$, протяни изъ точки F параллельную къ сей оси, которая да встрѣтится съ параболою въ точкѣ A. На срединѣ хорды CA возставь неопредѣленной перпендикуляръ, которой да встрѣтится съ осью въ точкѣ G. Возьми отъ G къ C, $GK = \frac{1}{2}p$ и на перпендикулярѣ къ оси, проведенномъ изъ K и встрѣчающемся съ OG въ H, $HE = \frac{1}{2}q$, потомъ изъ E, какъ центра, радіусомъ EA опиши окружность круга. Оная да пресѣчетъ параболу въ точкахъ M, и естьли изъ сихъ точекъ опустишь на ось перпендикуляры, каковые суть MQ, они будутъ корни уравненія третьей степени. Что же касается до $AD = h$, то оная принадлежитъ къ уравненію четвертой степени, произходящему отъ умноженія уравненія третьей степени на множитель $x + h$. Теперь все дѣло состоитъ токмо въ томъ, чтобы доказать, что $EA = \sqrt{m^2 - hq}$. Но поелику a параметръ параболы, будетъ $CD = \frac{b^2}{a}$, и по причинѣ что $CO = \frac{1}{2}CA$, $CL = \frac{b^2}{2a}$ и перпендикуляръ LO къ оси равенъ $\frac{b}{2}$; слѣдовательно, по причинѣ что $OL^2 = CL \cdot LG$, $LG = \frac{1}{2}a$ и $CK = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$; наконецъ подобные треугольники CLO, GKH даютъ $KH = \frac{bp}{2a}$ и $KE = \frac{bp}{2a} + \frac{1}{2}q$, и потому $EA = \sqrt{(h - \frac{1}{2}q - \frac{bp}{2a})^2 + (\frac{b^2}{2a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p)^2}$ $[= (h^2 - hq + \frac{q^2}{4} - \frac{b^2p}{a} + \frac{bpq}{2a} + \frac{b^2p^2}{4a^2} + \frac{b^4}{4a^2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2p}{2a} - \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4})^{\frac{1}{2}} = (\frac{q^2}{4} + \frac{bpq}{2a} + \frac{b^2p^2}{4a^2} + \frac{a^2}{4} - \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2p}{a} + \frac{b^4}{4a^2} - hq)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\frac{q}{2} + \frac{bp}{2a})^2 + (\frac{a}{2} - \frac{p}{2} + \frac{b^2}{2a})^2 - hq}] = \sqrt{m^2 - hq}$.

(67) Вопросъ о трехчастномъ разсѣченіи угла ведетъ къ уравненію третьей степени. Ибо естьли означишь чрезъ s синусъ или косинусъ угла, которой раздѣлить надлежитъ, чрезъ r радіусъ и чрезъ x синусъ или косинусъ трети того угла, то получишь изъ формулъ члена 8го уравненіе $4x^3 - 3r^2x = \mp r^2s$, которое сравненное съ предъидущимъ даетъ $h = 0$, $ap = -\frac{3r^2}{4}$, $a^2q = \pm\frac{r^2s}{4}$, и по причинѣ $h = 0$, будетъ $EM = m = CE$; и такъ кругъ пройдетъ чрезъ вер-

шину параболы. И естьли изъ трехъ точекъ, въ коихъ парабола кругомъ пресѣкается, на ось CD опустишь перпендикуляры, то оные будутъ корни уравненія третей степени.

Сіе уравненіе принадлежитъ къ случаю, *неразрѣшимымъ* называемому, ибо по причинѣ что $r > s$, $\frac{1}{27}\left(\frac{3r^2}{4}\right)^3 > \frac{1}{4}\frac{r^4 s^2}{16}$. Откуда слѣдуетъ, что неразрѣшимый случай уравненій третей степени разрѣшается посредствомъ круга; и означивъ чрезъ A дугу, коея синусъ или косинусъ s, найдешь, по причинѣ что A, $A + 2\pi$, $A + 4\pi$, гдѣ π полуокружность, имѣютъ одинаковые синусы и косинусы, слѣдующіе три корня уравненія третей степени $4x^3 - 3r^2 x = \mp r^2 s$: ſin. $\frac{A}{3}$, ſin. $\frac{A + 2\pi}{3}$, ſin. $\frac{A + 4\pi}{3}$, когда $r^2 . s$ имѣетъ знакъ —, или сіи: coſ. $\frac{A}{3}$, coſ. $\frac{A + 2\pi}{3}$, coſ. $\frac{A + 4\pi}{3}$, когда тотъ же членъ имѣетъ знакъ +. (*)

(*) Можетъ быть изъ того, что $s =$ ſin. или coſ. A, ſin. или coſ. $(A + 2\pi)$, ſin. или coſ. $(A + 4\pi)$, и что x, какъ третія часть той дуги, которой синусъ или косинусъ есть s, $=$ ſin. или coſ. $\frac{A}{3}$, ſin. или coſ. $\frac{A + 2\pi}{3}$, ſin. или coſ. $\frac{A + 4\pi}{3}$, иной подумаетъ, что для x можетъ быть безчисленное множество величинъ, поелику синусъ или косинусъ s принадлежитъ безчисленному множеству дугъ; но сіе сомнѣніе тотчасъ уничтожится, естьли возмешь еще нѣсколько дугъ, какъ напримѣръ $A + 6\pi$, $A + 8\pi$, $A + 10\pi$, коихъ синусъ или косинусъ есть s же; ибо ſin. или coſ. $\frac{A + 6\pi}{3} =$ ſin. или coſ. $\left(\frac{A}{3} + 2\pi\right) =$ ſin. или coſ. $\frac{A}{3}$, ſin. или coſ. $\frac{A + 8\pi}{3} =$ ſin. или coſ. $\left(\frac{A + 2\pi}{3} + 2\pi\right) =$ ſin. или coſ. $\frac{A + 2\pi}{3}$, ſin. или coſ. $\frac{A + 10\pi}{3} =$ ſin. или coſ. $\left(\frac{A + 4\pi}{3} + 2\pi\right) =$ ſin. или coſ. $\frac{A + 4\pi}{3}$, то есть $=$ точно тѣмъ же величинамъ.

Наконецъ для объясненія сего рѣшенія примѣромъ, пусть предложено уравненіе $x^3 - 3x = 1$, принадлежащее къ случаю неразрѣшимому; сравни его съ найденнымъ выше, преобразованнымъ въ сей видъ $x^3 - \frac{3r^2}{4}x = \mp \frac{r^2 s}{4}$, и будешь имѣть $\frac{3r^2}{4} = 3$, $r = 2$ и $s = 1$; потомъ поелику послѣдній членъ въ предложенномъ уравненіи имѣетъ знакъ +, получишь $s =$ coſ A $= 1$ и, по причинѣ что $r = 2$, A $= 60°$; и такъ три корня предложеннаго уравненія будутъ coſ. 20°, coſ. 140° и coſ. 260°, взявъ за радіусъ число 2.

И симъ образомъ оные корни представляются въ видѣ дѣйствительномъ.

(68) Вопросъ о удвоенiи куба или двухъ среднихъ пропорцiональныхъ ведетъ такъ же къ уравненiю третьей степени. Ибо означивъ чрезъ a и b два данныя числа и чрезъ x, y среднiя пропорцiональныя между ими, получишь $\div a:x:y:b$; откуда $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, и исключивъ y, будешь имѣть $x^3 = a^2 b$. Сравнивая сiе уравненiе съ общимъ уравненiемъ третьей степени, получишь $h = o$, $p = o$ и $q = -b$; и по сему кругъ пройдетъ чрезъ вершину параболы и радiусомъ будетъ имѣть $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Сей вопросъ и предложенной предъ симъ о трехчастномъ разсѣченiи угла, со временъ еще Платона были въ великой славѣ; Геометры сего училища были увѣрены, что не возможно разрѣшить оныхъ, употребляя токмо кругъ и прямую линею.

(69). Дано уравненiе шестой степени

$$x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 - fx + g + o,$$

требуется построить его посредствомъ кривой линеи третьяго порядка и одного коническаго сѣченiя.

Пусть $x^3 - mx^2 - nx + q = -pxy$ уравненiе кривой линеи третьяго порядка; возвысивъ обѣ части онаго во вторую степень, я нахожу сiе

$$x^6 - 2mx^5 + (m^2 - 2n)x^4 + 2(mn + q)x^3 + (n^2 - 2mq)x^2 - 2nqx + q^2 = p^2 x^2 y^2,$$

которое сравненное съ даннымъ даетъ

$$m = \tfrac{b}{2},\ q = \sqrt{g},\ n = \tfrac{f}{2\sqrt{g}},\ \text{и слѣдственно}$$

$$x^6 - 2mx^5 - 2nqx + q^2 = x^6 - bx^5 - fx + g =$$
$$p^2 x^2 y^2 - (m^2 - 2n)x^4 - 2(mn + q)x^3 - (n^2 - 2mq)x^2.$$

Вставливая сiю величину въ данное уравненiе и раздѣляя на x^2, обратишь его въ сiе

$$p^2 y^2 + (c + 2n - m^2)x^2 + (d - 2mn - 2q)x + e + 2mq - n^2 = o,$$

которое будетъ принадлежать къ кругу, естьли $c + 2n - m^2$, или $c + \frac{f}{2g} - \frac{b^2}{4}$ есть количество положительное и равное p^2.

Когда уравненіе шестой степени не имѣетъ втораго члена, то можно его построить посредствомъ первой кубической параболы и одного коническаго сѣченія. Въ самомъ дѣлѣ естьли возмешь для уравненія кубической параболы сіе $x^3 = a^2 y$, и въ данное уравненіе, въ которомъ полагается что не достаетъ втораго члена, вмѣсто x^6, x^4, x^3 поставишь ихъ величины $a^4 y^2$, $a^2 xy$, $a^2 y$, то оное обратится въ слѣдующее

$$y^2 + \frac{cx + d}{a^2} y + \frac{ex^2 - fx + g}{a^4} = 0.$$

(70) Пусть предложено построить уравненіе $x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + cx^{2n-3} +$ и проч. $= 0$, употребляя параболу $x^n = \beta y^m$; гдѣ n и m суть числа цѣлыя и положительныя, и $n > m$. Поставь въ предложенное уравненіе вмѣсто x^{2n}, x^{2n-1}, x^{2n-2}, x^{2n-3} ипр. ихъ величины $\beta^2 y^{2m}$, $\beta y^m x^{n-1}$, $\beta y^m x^{n-2}$, $\beta y^m x^{n-3}$ ипроч., и будешь имѣть $\beta^2 y^{2m} + \beta y^m (ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-2} + cx^{n-3}$ + и пр.$)$ $+ a'x^{n-1} + b'x^{n-2} + c'x^{n-3} +$ ипр. $= 0$, которое есть нижшей степени противу предложеннаго. Но безполезно бы было войти въ большую подробность о семъ родѣ разрѣшенія опредѣленныхъ уравненій, и мы заключимъ сію главу разсмотрѣніемъ кривой линеи, которой уравненіе

$$x^n = \beta y^m.$$

(71) Чтобы провести касательную къ сей параболѣ, возьми (члем. 19) на линеи x другую абсциссу X, и естьли оная абсцисса соотвѣтствуетъ ординатѣ Y, то будешь имѣть $X^n = \beta Y^m$; но

$$X^n - x^n = (X^{n-1} + X^{n-2} x + X^{n-3} x^2 + \text{ипр.})(X - x),$$

$$Y^m - y^m = (Y^{m-1} + Y^{m-2} y + Y^{m-3} y^2 + \text{ипр.})(Y - y);$$

слѣдовательно $\left[\text{поелику } Y^m - y^m = \frac{X^n - x^n}{\beta}\right]$,

$$\frac{X-x}{Y-y}=\frac{\beta(Y^{m-1}+Y^{m-2}y+Y^{m-3}y^2+\text{и пр.})}{X^{n-1}+X^{n-2}x+X^{n-3}x^2+\text{и пр.}},$$

которое выраженіе, когда сдѣлаешь $X=x$ и $Y=y$, перемѣнится въ сіе $\frac{m\beta y^{m-1}}{nx^{n-1}}$. Почему умноживъ оное на y, получишь подкасательную $\frac{mx.\beta y^m}{nx^n}=\frac{mx}{n}$.

И такъ (черт. XX) поелику m есть меньше n, подкасательная PT всегда меньше нежели $AP=x$; и поелику $x=0$, дѣлаетъ PM или $y=0$, парабола, какой бы степени ни была, всегда пройдетъ чрезъ точку A, потомъ отъ прямой BC отдалится болѣе и болѣе до безконечности, обращаясь къ ней своею вогнутостію. Но мы разсмотрѣли токмо одну изъ вѣтвей сей кривой линеи, которая находится въ углѣ BAD; почему что бы разсмотрѣть оную кривую со всею подробностію, мы различимъ три слѣдующіе случая: 1) Пусть n число четное, а m нечетное; тогда корень степени n изъ x^n есть $\pm x$, а корень степени m изъ x^m есть $+y$; слѣдовательно, поелику x можетъ быть положительное или отрицательное, когда y есть токмо положительное, одна изъ вѣтьей кривой должна простираться еще въ углѣ DAC; такимъ образомъ, что естьли параллельно BC протянешь MM′, то будешь имѣть KM = KM′. 2) Пусть n и m числа нечетныя; тогда количества x и y могутъ имѣть, то и другое, знакъ $+$, или то и другое знакъ $-$; откуда слѣдуетъ, что парабола въ семъ случаѣ должна имѣть еще вѣтвь AM″ въ углѣ EAC, совершенно подобную первой вѣтви, но въ противномъ положеніи. 3) Пусть n число нечетное, а m четное; тогда корень степени n изъ x^n есть $+x$, а корень степени m изъ y^m есть $\pm y$; слѣдовательно парабола должна простираться въ углѣ BAE такимъ образомъ, что естьли параллельно DE проведешь MPM‴, то будешь имѣть PM = PM‴. Наконецъ случай въ которомъ n и m суть

четныя, можетъ быть приведенъ къ одному изъ трехъ другихъ, ибо извлекая квадратной корень столько разъ, сколько можно будетъ, достигнешь къ уравненію, въ коемъ одинъ изъ показателей будетъ число нечетное. (*)

(*) Подобнымъ образомъ разсматривая уравненіе $x^n y^m = \beta$, которое есть общее уравненіе всѣхъ гиперболъ отнесенныхъ къ ихъ асимптотамъ, найдешь всѣ виды, которые оныя гиперболы имѣть могутъ.

ГЛАВА II.

О способѣ неопредѣленныхъ предстоящихъ.

(72) Декарту же мы обязаны и за способъ неопредѣленныхъ предстоящихъ. Онъ особенное оному сдѣлалъ приложенie къ разрѣшенiю уравненiй четвертой степени. Пусть будетъ уравненie четвертой степени $x^4+px^2+qx+r=0$, въ которомъ недостаетъ втораго члена, ибо извѣстно, что какое бы ни было уравненie, всегда удобно сей членъ уничтожить можно. Декартъ представляетъ себѣ два уравненiя второй степени

$$x^2+sx+t=0,\ x^2-sx+u=0,$$

коихъ видъ опредѣленъ по условiю, предписывающему что бы уравненie четвертой степени, происходящее отъ умноженiя одного изъ сихъ уравненiй на другое, не заключало въ себѣ втораго члена. И дѣйствительно перемножая оныя уравненiя одно на другое и отдѣляя x^4, найдешь $x^4=(s^2-t-u)x^2+s(t-u)x-tu$; что уравненное величинѣ x^4 получаемой изъ предложеннаго уравненiя, дастъ тожественное уравненie

$$(s^2-t-u+p)x^2+(st-su+q)x-tu+r=0,$$

понеже уравнены между собою двѣ величины одного и того же количества x^4. Сie уравненie долженствуетъ имѣть мѣсто, какой бы величины количество x ни могло быть, или по крайнѣй мѣрѣ долженствуетъ имѣть мѣсто въ случаѣ принятiя x мъ величинъ, кои даютъ два уравненiя второй степени, ибо въ противномъ случаѣ должно будетъ допустить, что уравненie четвертой степени можетъ имѣть болѣе четырехъ корней. И такъ непосредственно произойдетъ

$$s^2-t-u+p=0,\ st-su+q=0,\ tu-r=0.$$

Изъ перваго уравненія получишь $t+u=s^2+p$, а изъ втораго $t-u=-\frac{q}{s}$; слѣдовательно $t=\frac{s^2+p}{2}-\frac{q}{2s}$, $u=\frac{s^2+p}{2}+\frac{q}{2s}$; оныя величины количествъ t и u поставленныя въ третіе уравненіе, дадутъ $\frac{(s^2+p)^2}{4}-\frac{q^2}{4s^2}-r=0$ или уравненіе шестой степени $s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2=q^2$, могущее обратиться въ уравненіе третьей степени, ибо положивъ $s^2=z$, оное сдѣлается $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z=q^2$.

(73) Мы представимъ сію ѳеорію въ другомъ видѣ, прилагая ее къ степенямъ, коихъ рѣшеніе извѣстно; и вопервыхъ мы приложимъ ее ко второй степени, кою изобразимъ такъ $x^2+px+q=0$.

Положивъ $x=u+t$, получишь $x^2=u^2+2ut+t^2[=u^2-t^2+2t(u+t)]=u^2-t^2+2tx$; предложенное же уравненіе дастъ $x^2=-px-q$; и такъ выдетъ тожественное уравненіе $(2t+p)x+u^2-t^2+q=0$, которое не зависитъ отъ x и въ которомъ должно положить $2t+p=0$, $u^2-t^2+q=0$; изъ перваго найдется $t=-\frac{p}{2}$, и поставивъ сію величину количества t во второе, оное второе обратится въ $u^2=\frac{p^2}{4}-q$. Итакъ $u=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, что будетъ количество мнимое, когда полагая q положительнымъ, $\frac{p^2}{4}$ меньше q; и тогда сдѣлавъ $\frac{p^2}{4}-q=-r^2$, будешь имѣть два корня уравненія второй степени $x=-\frac{p}{2}+r\sqrt{-1}$, $x=-\frac{p}{2}-r\sqrt{-1}$.

Откуда слѣдуетъ, что естьли два множителя трехчленнаго количества ax^2+bx+c будутъ мнимые и одинъ изъ нихъ изобразится чрезъ $x+A+B\sqrt{-1}$, то другой долженъ изъявиться чрезъ $x+A-B\sqrt{-1}$, дабы произведеніе ихъ было количество дѣйствительное. И вообще естьли множители многочленнаго какого нибудь дѣйствительнаго количества будутъ мнимые, то они будутъ въ четномъ числѣ слѣдующаго вида $x+A+B\sqrt{-1}$, $x+A-B\sqrt{-1}$, $x+A'+B'\sqrt{-1}$, $x+A'-B'\sqrt{-1}$, и такъ далѣе. Ибо естьли бы они имѣли другой видъ, то бы

произведенія каждыхъ двухъ не могли быть количествами дѣйствительными (*).

(74) Естьли уравненіе будетъ третьей степени и представится такъ $x^3 + px + q = 0$, то положивъ $x = u + t$, получишь $x^3 = u^3 + 3u^2t + 3ut^2 + t^3 (= u^3 + t^3 + 3ut(u+t)) = u^3 + t^3 + 3utx$; потомъ составится тожественное уравненіе $(3ut + p)x + u^3 + t^3 + q = 0$, въ которомъ надлежитъ положить $3ut + p = 0$, $u^3 + t^3 + q = 0$; откуда найдется $t = -\frac{p}{3u}$, $u^3 + q - \frac{p^3}{27u^3} = 0$ или уравненіе шестой степени $u^6 + qu^3 = \frac{p^3}{27}$ могущее обратиться въ въ уравненіе второй степени, ибо естьли положишь $u^3 = z$, оное сдѣлается $z^2 + qz = \frac{p^3}{27}$, и выдетъ $z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$. И такъ будешь имѣть $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$, и по причинѣ что $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} = -\frac{p}{3}$, выдетъ $t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$.

Чтобы найти другіе два корня, раздѣли $x^3 + px + q$ на $x - u - t$ [то есть учини сіе вычисленіе

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-(u+t) & x^3+px+q & x^2+(u+t)x+(u+t)^2+p \\
 & x^3-(u+t)x^2 & \\
 & \quad (u+t)x^2+px+q & \\
 & \quad (u+t)x^2-(u+t)^2x & \\
 & \qquad ((u+t)^2+p)x+q & \\
 & \qquad ((u+t)^2+p)x-(u+t)^3-(x+t)p & \\
 & \qquad\qquad (u+t)^3+p(u+t)+q], &
\end{array}
$$

(*) Но признаться должно, что въ семъ доказательствѣ предполагается, или что всякаго роду мнимыя количества приведены быть могутъ къ сему виду $A + B\sqrt{-1}$, или что многочленное количество четной степени можетъ разрѣшиться на дѣйствительные второй степени множители; чего, ни того ни другаго, безъ доказательства принять не можно, и что первой доказалъ д'Аламбертъ въ Histoire de l'Academie de Berlin на 1746 годъ. Сіе доказательство его основано на ѳеоріи кривыхъ линей, и отъ того оныя предложенія собственно принадлежащія къ простой Алгебрѣ, помѣщалися обыкновенно въ вышшей маѳематикѣ; однако, поелику нынѣ славной Лапласъ привелъ доказательство ихъ въ толикую простоту, что безъ всякаго сомнѣнія онѣ могутъ быть отнесены къ простой Алгебрѣ, я здѣсь ихъ предположу извѣстными.

тогда по причинѣ что $(u+t)^3+p(u+t)+q=0$, будешь имѣть уравненіе второй степени $x^2+(u+t)x+(u+t)^2+p=0$, которое разрѣшенное даетъ $x=-\frac{u+t}{2}\pm\sqrt{-p-\frac{3}{4}(u+t)^2}$ $[=-\frac{u+t}{2}\pm\sqrt{3ut-\frac{3}{4}(u+t)}]=-\frac{u+t}{2}\mp\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}$.

И такъ три корня уравненія третьей степени будутъ

$$x=u+t,\ x=-\frac{u+t}{2}-\frac{u-t}{2}\sqrt{-3},\ x=-\frac{u+t}{2}+\frac{u-t}{2}\sqrt{-3},$$

или все тоже, три множителя четыречленнаго количества $x^3+px+q=0$, въ которомъ недостаетъ втораго, будутъ

$$x-u-t,\ x+\frac{u+t}{2}+\frac{u-t}{2}\sqrt{-3},\ x+\frac{u+t}{2}-\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}.$$

Естьли u и t суть количества дѣйствительныя, то одинъ токмо корень $x=u+t$ будетъ дѣйствительной; другие же два будутъ мнимые сего вида $x=A+B\sqrt{-1}$, $x=A-B\sqrt{-1}$. Всѣ три корня представляются въ видѣ мнимыхъ, когда u и t будутъ мнимыя; что не согласно съ тѣмъ началомъ, по коему во всякомъ дѣйствительномъ уравненіи мнимые корни бываютъ въ четномъ числѣ. Но сіе затрудненіе разрѣшается тѣмъ, что u и t не иначе могутъ быть мнимыми, какъ токмо когда p есть количество отрицательное и $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$; и мы видѣли (въ членѣ 67), что въ семъ случаѣ, извѣстномъ подъ именемъ *неразрѣшимаго*, корни уравненія суть синусы и косинусы трехъ дугъ весьма дѣйствительныхъ.

(75) Пусть предложено будетъ разрѣшить уравненіе четвертой степени $x^4+px^2+qx+r=0$; положивъ $x=u+t+s$, получишь $x^4=u^4+4u^3t+4u^3s+6u^2t^2+12u^2ts+6u^2s^2+4ut^3+12ut^2s+12uts^2+4us^3+t^4+4t^3s+6t^2s^2+4ts^3+s^4$ $[=(4us+2t^2)(u+t+s)^2+(4u^2t+4ts^2)(u+t+s)+u^4-t^4+s^4-2u^2s^2+4ut^2s]=(4us+2t^2)x^2+(4u^2t+4ts^2)x+u^4-t^4+s^4-2u^2s^2+4ut^2s$; сравнивая сію величину количества x^4 съ получаемою изъ предложеннаго уравненія, составишь тожественное уравненіе, которое долженствуя имѣть мѣсто не зависимо отъ всякой новой величины приписуемой количеству x, непосредственно дастъ

$$4us+2t^2+p=0,\ 4u^2t+4ts^2+q=0 \text{ и}$$
$$u^4-t^4+s^4-2u^2s^2+4ut^2s+r=0.$$

Третіе изъ сихъ уравненій перемѣнится на сіе

$$(u^2+s^2)^2=t^4+4u^2s^2-4ust^2-r,$$

а изъ втораго получится слѣдующее $u^2+s^2=-\frac{q}{4}$; чего ради будетъ $t^6+4u^2s^2t^2-4ust^4-rt^2=\frac{q^2}{16}$, въ которое вмѣсто $4us$ и $4u^2s^2$ надлежитъ поставить ихъ величины получаемыя изъ перваго, отъ чего будешь имѣть уравненіе шестой степени

$$4t^6+2pt^4+\left(\frac{p^2}{4}-r\right)t^2=\frac{q^2}{16},$$

которое можно обратить въ уравненіе третьей степени, полагая $t^2=z$; и въ самомъ дѣлѣ сіе положеніе дастъ $4z^3+2pz^2+\frac{p^2-4r}{4}z=\frac{q^2}{16}$.

По поелику $u^2+s^2=-\frac{q}{4t}$, $2us=-t^2-\frac{p}{2}$, то будетъ $(u+s)^2=-\frac{q}{4t}-t^2-\frac{p}{2}$ и $u+s=\pm\sqrt{-t^2-\frac{q}{4t}-\frac{p}{2}}$. И такъ

$$x=t+u+s=t\pm\sqrt{t^2-\frac{q}{4t}-\frac{p}{2}},$$

гдѣ поставляя вмѣсто t сіи величины $+\sqrt{z}$ и $-\sqrt{z}$, получишь четыре корня уравненія четвертой степени

$$x=\sqrt{z}+\sqrt{-z-\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},$$
$$x=\sqrt{z}-\sqrt{-z-\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},$$
$$x=-\sqrt{z}+\sqrt{-z+\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},$$
$$x=-\sqrt{z}-\sqrt{-z+\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},$$

или все тоже, четыре количества

$$x-\sqrt{z}-\sqrt{-z-\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},\ x+\sqrt{z}-\sqrt{-z+\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}};$$
$$x-\sqrt{z}+\sqrt{-z-\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},\ x+\sqrt{z}+\sqrt{-z+\frac{q}{4\sqrt{z}}-\frac{p}{2}},$$

кои суть множители пятичленнаго количества x^4+px^2+qx+r.

(76) Означимъ чрезъ z, z', z'' три величины количества z, будетъ

$$-\frac{p}{2}=z+z'+z'',\ \frac{q^2}{64}=zz'z'',\ \text{или}\ \frac{q}{4\sqrt{z}}=2\sqrt{z'z''},$$

и четыре корня примутъ сей другой видъ

$$x = \sqrt{z} + \sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z'z''}},\quad x = -\sqrt{z} + \sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z'z''}},$$

$$x = \sqrt{z} - \sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z'z''}},\quad x = -\sqrt{z} - \sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z'z''}};$$

гдѣ надлежитъ замѣтить, что $z' + z''$ всегда больше нежели $2\sqrt{z'z''}$, когда z' и z'' суть дѣйствительные, и меньше, когда мнимые; ибо, естьли сдѣлаешь $z' + z'' = m$, $2\sqrt{z'z''} = n$, будетъ $z''^2 - mz'' = -\frac{n^2}{4}$ и $z'' = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}$, которая величина не можетъ быть дѣйствительная, какъ тогда токмо, когда m больше n. Откуда слѣдуетъ: 1) что всѣ четыре корня будутъ дѣйствительные, когда z, z', z'' суть дѣйствительныя и положительныя; 2) что два изъ сихъ корней будутъ дѣйствительные и два мнимые, когда одно токмо количество z есть дѣйствительное и положительное; 3) что всѣ четыре корня будутъ мнимые, когда z, z', z'' всѣ дѣйствительныя, но одно токмо, напримѣръ z, есть положительное. Здѣсь надлежитъ изъять случай, въ которомъ два корня уравненія третьей степени равны между собою, какъ то $z' = z''$. Ибо тогда четыре корня уравненія четвертой степени сдѣлаются

$$x = \sqrt{z},\quad x = \sqrt{z},\quad x = -\sqrt{z} + 2\sqrt{z'},\quad x = -\sqrt{z} - 2\sqrt{z'},$$

изъ коихъ два суть равные и дѣйствителиные, а два другїе мнимые, когда z' есть количество отрицательное. (*)

(*) Рѣшенїе уравненїй другихъ слѣдующихъ степеней и по сїе время еще не извѣстно; да и извѣстное рѣшенїе уравненїй третьей и четвертой степеней не столь совершенно какъ бы желательно было, ибо мы видѣли выше, что въ рѣшенїи уравненїя третьей степени, на коемъ основано рѣшенїе и уравненїя четвертой степени, всѣ три дѣйствительные корня того уравненія представляются въ видѣ мнимыхъ; что весьма ясно показываетъ несовершенство сего рѣшенїя. Славной д'Аламбертъ въ Енциклопедїи въ членѣ, cas irreductible, сирѣчь случай неразрѣшимый, первой показалъ истинную тому причину. Вотъ слова его:

„Полагается $x = u + t$, гдѣ u и t суть количества неизвѣстныя, и „оттуда тотчасъ получается $\left.\begin{matrix} x^3 - 3utx - u^3 \\ - t^3 \end{matrix}\right\} = 0$; потомъ сїе ура-

,,вненїе сравнивается съ предложеннымъ $x^3+px+q=0$, уравнивая каж-
,,дой членъ одного каждому члену другаго; но сїе уравненїе члена члену заклю-
,,чаетъ въ себѣ скрытое положенїе ведущее къ формулѣ, которая къ дѣйстви-
,,тельному виду приведена быть не можетъ. По строгости имѣемъ токмо
,,$px+q=-3utx-u^3-t^3$; вотъ одно слѣдствїе, кое можно извлечь изъ
,,сравниванїя двухъ уравненїй; но сверьхъ того полагають еще, что первая
,,часть количества $px+q$, то есть px, равна $-3utx$, то есть первой час-
,,ти количества $-3utx-u^3-t^3$. Сїе положенїе ни непремѣнное ни по
,,строгости нужное; оно не дѣлается какъ токмо для способнѣйшаго дости-
,,женїя, чтобы найти количества u и t, кои безъ того сыскать не можно
,,бы было. Въ прочемъ, когда u и t одно и другое неизвѣстны, положить
,,можно $-3utx=px$ и $-u^3-t^3=q$; но сїе положенїе есть причиною,
,,что два количества u и t вмѣсто того, что бы быть дѣйствительными,
,,какъ то имъ быть долженствуетъ, получаются мнимыми каждое. Справед-
,,ливо, что по сложенїи ихъ вмѣстѣ, сумма есть количество дѣйстви-
,,тельное; но мнимость, которая тутъ всегда пребываетъ и которую из-
,,влечь оттуда невозможно, дѣлаетъ получаемое для количества x выраже-
,,нїе безполезнымъ. Однимъ словомъ уравненїе $x=u+t$ не болѣе даетъ
,,по строгости какъ токмо сїе $px+q=-3utx-u^3-t^3$ или $pu+pt+q$
,,$=-3u^2t-3ut^2-u^3-t^3$, и всегда, когда захочешь изъ сего уравненїя
,,сдѣлать два другїя частныя, долженъ будешь сдѣлать скрытое положе-
,,нїе, кое можетъ вовлечь въ неудобства непреодолимыя, какъ то здѣсь,
,,гдѣ u и t получаются принужденно мнимыми, бываетъ. Надлежитъ изслѣдо-
,,вать не можно ли чрезъ какое средство преднаписанное уравненїе разбить
,, на такїя два другїя, что бы онѣ дали u и t въ формулахъ дѣйствитель-
,,ныхъ и способныхъ ко опредѣленїю; но сїе средство кажется должно быть
,,весьма трудно, буде не невозможно.

И такъ по сему мы не имѣемъ еще настоящаго рѣшенїя уравне-нию третьей степени. И авторъ, которой, какъ то явствуетъ изъ предъидущаго, прилагая къ оному рѣшению способъ неопредѣленныхъ предстоящихъ, кажется имѣлъ намѣренїе избѣгнуть возраженїй дѣлаемыхъ д'Аламбертомъ, въ самомъ дѣлѣ оныхъ не избѣгнулъ, ибо разсуждая по строгости, найдешь, что упомянутое приложенїе онъ учинилъ тутъ не у мѣста. Чтобы показать сїе самымъ дѣломъ, докажемъ сперва способъ неопредѣленныхъ предстоящихъ другимъ яснѣйшимъ образомъ.

Пусть дано уравненїе $Ax+B=0$; которое должно имѣть мѣсто, какую бы опредѣленную величину количеству x ни приписать, то взявъ для x двѣ какїя ниесть разнствующїя между собою величины a и x, получишь $Aa+B=0$, $Ax+B=0$ и $A(x-a)=0$; и какъ множитель $x-a$ не можетъ быть $=0$, то слѣдуетъ что $A=0$, и потому такъ же $B=0$.

Пусть еще дано $Ax^2+Bx+C=0$ съ тѣмъ же условїемъ, то взявъ для x двѣ какїя ниесть разнствующїя между собою величины a и x,

получишь $Aa^2 + Ba + C = 0$, $Ax^2 + Bx + C = 0$ и $A(x^2 - a^2) + B(x - a) = 0$, или $A(x + a) + B = 0$; и какъ величина x взята по произволенію, то величину a удержавъ, каковою была, другую x можно взять за перемѣнную, и тогда уравненіе $A(x + a) + B = 0$, которое тоже значитъ, что и $Ax + (Aa + B) = 0$, будетъ принадлежать къ первому случаю, и потому выдетъ $A = 0$, $Aa + B = 0$ и слѣдственно такъ же $B = 0$ и $C = 0$.

Да будетъ еще дано уравненіе $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ съ тѣмъ же условіемъ, то взявъ для x двѣ какія нибудь между собою разнствующія величины a и x, получишь $Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ и $A(x^3 - a^3) + B(x^2 - a^2) + C(x - a) = 0$ или $A(x^2 + xa + a^2) + B(x + a) + C = 0$, или еще $Ax^2 + (Aa + B)x + (Aa^2 + Ba + C) = 0$; и какъ величина x взята по произволенію, то величину a удержавъ, каковою была, другую x можно принять за перемѣнную, и тогда послѣднее уравненіе будетъ принадлежать ко второму случаю и выдетъ $A = 0$, $Aa + B = 0$, $Aa^2 + Ba + C = 0$ и слѣдственно такъ же $B = 0$, $C = 0$ и $D = 0$. И такъ далѣе и далѣе.

Теперь взявъ тожественное авторово уравненіе $(3ut + p)x + u^3 + t^3 + q = 0$, я примѣчаю, что количеству x, какъ содержащемуся въ опредѣленномъ уравненіи $x^3 + px + q = 0$, не болѣе можно приписать какъ токмо три опредѣленныя между собою разнствующія величины, и что поелику $x = u + t$, для каждой изъ нихъ количества u и t будутъ различныя; потомъ означивъ одну опредѣленную величину количества x чрезъ a и соотвѣтствующія ей количества u и t чрезъ m и n, а другую чрезъ x и соотвѣтствующія ей количества u и t чрезъ u и t, я прилагаю къ уравненію $(3ut + p)x + u^3 + t^3 + q = 0$ предложенное предъ симъ доказательство способу неопредѣленныхъ предстоящихъ, и нахожу $(3mn + p)a + m^3 + n^3 + q = 0$, $(3ut + p)x + u^3 + t^3 + q = 0$ и $(3ut + p)x - (3mn + p)a + u^3 - m^3 + t^3 - n^3 = 0$, то есть уравненіе, изъ коего ничего заключить не можно. И такъ приложеніе способа неопредѣленныхъ предстоящихъ къ разрѣшенію уравненій ничего не даетъ, и авторъ сдѣлавъ оное приложеніе, произвелъ слѣдствія, которыя въ самомъ дѣлѣ изъ того не слѣдуютъ.

О мнимыхъ множителяхъ многочленныхъ количествъ.

(77) Мы видѣли, что мнимые множители многочленнаго дѣйствительнаго количества не иначе могутъ быть, какъ въ четномъ числѣ, и что взятые по два они суть множители тричленной, дѣйствительной функціи. Пусть тричленная функція, коея двучленные множители суть мнимые, изобразится чрезъ $r^2+sx+t^2x^2$; то, чтобы найти сіи ея множители, разрѣши уравненіе $x^2+\frac{sx}{t^2}=-\frac{r^2}{t^2}$, и получишь $x=\frac{-s\pm\sqrt{s^2-4r^2t^2}}{2t^2}$, которое выраженіе будетъ мнимое, когда s^2 меньше нежели $4r^2t^2$, или когда $\frac{s^2}{4r^2t^2}$ или $\frac{s}{2rt}$ меньше единицы. Но косинусъ какого имѣсть угла всегда меньше радіуса; слѣдовательно, естьли положивъ радіусъ единицею, сдѣлаешь $\frac{s}{2rt}=\operatorname{cos}.\beta$ или $s=2rt\operatorname{cos}.\beta$, то тричленное количество $r^2+2rtx\operatorname{cos}.\beta+t^2x^2$ можетъ намъ представить всѣ тричленныя функціи неразрѣшимыя на множители, или коихъ двучленные множители суть мнимые. И посему естьли многочленное дѣйствительное количество имѣетъ мнимые множители, то оные взятые по два могутъ быть представлены такъ

$tx+r(\operatorname{cos}.\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\beta)$ и $tx+r(\operatorname{cos}\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\beta)$;

и какъ одинъ изъ множителей многочленнаго количества уравненный нулю, долженъ учинить нулемъ и самое сіе многочленное количество, то явствуетъ что каждая изъ величинъ x, какую взять захочешь,

$x=-\frac{r}{t}(\operatorname{cos}\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\beta)$, $x=-\frac{r}{t}(\operatorname{cos}.\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\beta)$,

поставленная въ многочленное количество, должна учинить оное нулемъ. Въ семъ вставливаніи мы имѣемъ возвышать $\operatorname{cos}.\beta\pm\sqrt{-1}.\operatorname{sin}.\beta$ въ различныя степени; чего ради чтобы удобнѣе къ тому достигнуть, я возьму еще формулу $\operatorname{cos}.\mu\pm\sqrt{-1}\operatorname{sin}.\mu$, и умноживъ одну на другую, нахожу

14 *

$(\cos.\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.\beta)(\cos.\mu \pm \sqrt{-1}.\sin.\mu)$ $[= \cos.\beta \cos.\mu \pm \sqrt{-1}.\sin\beta\cos.\mu \pm \sqrt{-1}.\sin.\mu\cos.\beta - \sin.\beta\cos.\mu] = \cos.(\beta + \mu) \pm \sqrt{-1}.\sin.(\beta + \mu)$;
почему положивъ $\mu = \beta$, я получу
$(\cos.\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.\beta)^2 = \cos.2\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.2\beta$. Такъ же
$(\cos.2\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.2\beta)(\cos.\mu \pm \sqrt{-1}.\sin.\mu) = \cos.(2\beta + \mu) \pm \sqrt{-1}.\sin.(2\beta + \mu)$,
и положивъ $\mu = \beta$, я получу
$(\cos.\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.\beta)^3 = \cos.3\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.3\beta$. Равнымъ образомъ
$(\cos.3\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.3\beta)(\cos.\mu \pm \sqrt{-1}.\sin.\mu) = \cos.(3\beta + \mu) \pm \sqrt{-1}.\sin.(3\beta + \mu)$,
и положивъ $\mu = \beta$, я получу
$(\cos.\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.\beta)^4 = \cos.4\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.4\beta$.

Словомъ не продолжая далѣе сихъ изчисленій, непосредственно слѣдуетъ, что
$(\cos.\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.\beta)^\lambda = \cos.\lambda\beta \pm \sqrt{-1}.\sin.\lambda\beta$.

(78) Мы представимъ многочленное количество такъ
$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ldots hx^\lambda,$$
въ которое естьли вмѣсто x попеременно поставится $u(\cos.\beta + \sqrt{-1}.\sin.\beta)$, $u(\cos.\beta - \sqrt{-1}.\sin.\beta)$, гдѣ $u = -\frac{r}{t}$, то получатся два уравненія
$$\left.\begin{array}{l} a + bu\cos.\beta + cu^2\cos.2\beta + \ldots\ldots + hu^\lambda\cos.\lambda\beta \\ + (bu\sin\beta + cu^2.\sin.2\beta + \ldots\ldots + hu^\lambda\sin.\lambda\beta)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0,$$
$$\left.\begin{array}{l} a + bu\cos.\beta + cu^2\cos.2\beta + \ldots\ldots + hu^\lambda\cos.\lambda\beta \\ - (bu\sin.\beta + cu^2\sin.2\beta + \ldots\ldots + hu^\lambda\sin.\lambda\beta)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0,$$
кои сложенныя вмѣстѣ и одно отъ другаго отнятыя, даютъ [по раздѣленіи въ послѣднемъ случаѣ произшедшаго на $2\sqrt{-1}$]:
$$a + bu\cos.\beta + cu^2\cos.2\beta + \ldots\ldots + hu^\lambda\cos.\lambda\beta = 0$$
$$bu\sin.\beta + cu^2\sin.2\beta + \ldots\ldots + hu^\lambda\sin.\lambda\beta = 0.$$

(79) Пусть требуются тричленныя множители количества $a^\lambda \pm x^\lambda$? Въ семъ случаѣ найденныя нами два уравненія [по срав-

ненїи даннаго количества $a^\lambda \pm x^\lambda$ съ формулою $a + bx + cx^2 + \ldots . hx^\lambda$] сдѣлаются $a^\lambda + u^\lambda \cos. \lambda\beta = 0$, $u^\lambda \sin. \lambda\beta = 0$; и какъ второе изъ нихъ даетъ $\sin. \lambda\beta = 0$, то явствуетъ, что $\lambda\beta$ не иное что быть можетъ, какъ крайная величина полуокружности. Означимъ сїю полуокружность, коея радїусъ единица, чрезъ π, будетъ $\lambda\beta = i\pi$, гдѣ i цѣлое и положительное число, и $\cos. \lambda\beta = \pm 1$, гдѣ знакъ $+$, когда i есть число четное, и $-$, когда нечетное. Всегда надлежитъ взять знакъ $+$, когда вопросъ будетъ о количествѣ $a^\lambda - x^\lambda$, и знакъ $-$, когда вопросъ будетъ о количествѣ $a^\lambda + x^\lambda$, на тотъ конецъ, чтобы въ томъ и другомъ случаѣ [для уравненїя $a^\lambda + u^\lambda \cos. \lambda\beta = 0$] имѣть $a^\lambda - u^\lambda = 0$; откуда получишь $u = a$ или $r = -a$ и $t = 1$. Вставливая вмѣсто r, t и β въ формулу $r^2 + 2rtx \cos. \beta + t^2x^2$ ихъ величины, найдешь $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2$, въ которое выраженїе надлежитъ вмѣсто i поставить всѣ нечетныя меньшїя нежели λ числа, естьли хочешь имѣть всѣ тричленные множители количества $a^\lambda + x^\lambda$, и всѣ четныя меньшїя нежели λ числа, естьли хочешь имѣть всѣ тричленные множители количества $a^\lambda - x^\lambda$ (*). При чемъ надлежитъ замѣтить, что когда λ есть число нечетное, то функцїя $a^\lambda + x^\lambda$ имѣетъ дѣйствительной двучленной множитель $a + x$, и что она никакого двучленнаго множителя не имѣетъ, когда λ есть число четное; напротивъ того функцїя $a^\lambda - x^\lambda$ имѣетъ два дѣйствительные двучленные множителя $a + x$ и $a - x$, когда λ есть число четное, и не болѣе имѣетъ какъ одинъ токмо таковой дѣйствительной множитель $a - x$, когда λ есть число

(*) Что въ первомъ случаѣ вмѣсто i должно ставить числа нечетныя, а въ другомъ четныя, то для того, что формула $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2$ получила сей видъ отъ уравненїя $a^\lambda - u^\lambda = 0$, которое въ первомъ случаѣ имѣетъ мѣсто, когда i нечетное, а въ другомъ, когда i четное; и что меньшїя нежели λ, то для того, что взявъ вмѣсто i большїя нежели λ числа, выдутъ тричленные множители тѣ же самые, что и прежде, понеже извѣстно, что $\cos. (2\pi \pm \beta) = \cos. \beta$.

нечетное(*). Отсюда можно произвести весьма прямое и простое доказательство θеоремѣ Г. Котеза, которая обыкновенно предлагается такъ:

(*) Все сїе явствуетъ изъ простаго дѣленїя; но можно тоже произвести еще, хотя въ прочемъ не свойственнымъ самой вещи образомъ, изъ общей формулы трichленныхъ множителей $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2$, поставляя, съ славнымъ Ейлеромъ, вмѣсто i всѣ числа, не токмо кои меньше λ, но вообще кои не больше λ. Въ самомъ дѣлѣ, когда въ случаѣ количества $a^\lambda + x^\lambda$, λ есть нечетное число, то i въ ономъ случаѣ долженствуя быть такъ же нечетное число, можетъ сдѣлаться $= \lambda$, и тогда будетъ $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2 = a^2 - 2ax \cos. \pi + x^2 = (a + x)^2$; однако $(a + x)^2$ не будетъ множитель количества $a^\lambda + x^\lambda$, ибо сїе противно самому предположенїю, по коему сей множитель долженъ состоять изъ двухъ неравныхъ, и притомъ еще мнимыхъ, двучленныхъ множителей; сверьхъ того принявъ тричленной множитель, какъ $(a+x)^2$, состоящїй изъ двухъ равныхъ двучленныхъ, ни коимъ образомъ не можно будетъ достигнуть къ двумъ различнымъ уравненїямъ члена 78го, изъ которыхъ произведена общая формула тричленныхъ множителей $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2$. И такъ что въ семъ случаѣ будетъ множитель количества $a^\lambda + x^\lambda$? На сей конецъ я примѣчаю, что поелику для тричленнаго множителя состоящаго изъ двухъ равныхъ двучленныхъ можно взирать на оныя уравненїя члена 78го, какъ на сливающїяся въ одно, то и тричленной множитель состоящїй изъ двухъ равныхъ двучленныхъ можно почитать за сливающїйся въ одинъ простой двучленной; и потому заключаю, что въ семъ случаѣ множитель количества $a^\lambda + x^\lambda$ есть токмо $a + x$. Теперь когда λ есть четное число, то i въ случаѣ тогоже количества $a^\lambda + x^\lambda$ долженствуя быть всегда нечетное число, никогда не можетъ сдѣлаться $= \lambda$, и потому такъ же тричленной множитель $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2$ не можетъ учиниться квадратомъ и количество $a^\lambda + x^\lambda$ не можетъ имѣть двучленной дѣйствительной множитель. Напротивъ того когда въ случаѣ количества $a^\lambda - x^\lambda$, λ есть четное число, то i въ ономъ случаѣ долженствуя быть такъ же четное число, можетъ сдѣлаться $= 0$ и $= \lambda$, и тогда будетъ $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2 = a^2 - 2ax \cos. 0 + x^2 = (a - x)^2$ и $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2 = a^2 - 2ax \cos. \pi + x^2 = (a + x)^2$, то есть, для изъясненной выше причины, количество $a^\lambda - x^\lambda$ будетъ имѣть два двучленные множителя $a - x$ и $a + x$. Наконецъ, когда въ случаѣ тогоже количества $a^\lambda - x^\lambda$, λ будетъ нечетное число, то i долженствуя

Естьли окружность круга (черт. XXI) разделится на равныя дуги Аа, Аа′, аВ, а′В′, Вb, В′b′, bD, b′D′ и проч., коихъ бы числомъ было 2λ, и изъ какой ни есть точки О, на діаметрѣ АК взятой, протянутся линеи Оа, Оа′, ОВ, ОВ′, Оb, Оb′, ОD, ОD′ и проч. ко всѣмъ точкамъ дѣленія; то будетъ

$$\overline{CA}^{\lambda} + \overline{CO}^{\lambda} = Oa \,.\, Oa', \; Ob \,.\, Ob'. \text{ и проч.}$$

$$\overline{CA}^{\lambda} - \overline{CO}^{\lambda} = OA \,.\, OB \,.\, OB'. \, OD \,.\, OD'. \text{ и проч.}$$

взявъ сіи линеи попеременно, означеннымъ здѣсь образомъ. Мы замѣтимъ сначала, что когда λ есть число нечетное, тогда ОК есть одна изъ линей Оа, Оb и проч. и что когда λ есть число четное, тогда она есть одна изъ линей ОВ, ОD и проч. Потомъ остается намъ токмо доказать, что означивъ СА чрезъ a, СО чрезъ x и дугу АQ, содержащуюся между точкою А и одною изъ точекъ дѣленія, чрезъ β, должно быть произведеніе OQ. OQ′ или $\overline{OQ}^2 = a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \beta + x^2$; въ чемъ нѣтъ никакого сомнѣнія, ибо естьли проведешь QP перпендикулярно къ СА, получишь $QP = a \operatorname{fin.} \beta$, $OP = \pm a \operatorname{cof.} \beta \mp x$, и слѣдственно $\overline{OQ}^2 = a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \beta + x^2$.

(80) Мы возмемъ для показанія сего примѣромъ, разныя функціи: такъ пусть будетъ функція $a^3 + x^3$; она имѣетъ двучленной множитель $a + x$ и тричленной $a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \frac{\pi}{3} + x^2 = a^2 - ax + x^2$; функція $a^4 + x^4$ имѣетъ два тричленные множителя $a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \frac{\pi}{4} + x^2$, $a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \frac{3\pi}{4} + x^2$, кои не иное что суть, какъ $a^2 - ax\sqrt{2} + x^2$, $a^2 + ax\sqrt{2} + x^2$, ибо $\operatorname{cof.} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{cof.} \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; функція $a^3 - x^3$ имѣетъ двучленной множитель $a - x$ и тричленной $a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \frac{2\pi}{3} + x^2 = a^2 + ax + x^2$; функція $a^4 - x^4$ имѣетъ два двучленные множителя $a + x$, $a - x$ и одинъ тричленной $a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \frac{2\pi}{4} + x^2 = a^2 + x^2$.

быть всегда четное число, не можетъ сдѣлаться $= \lambda$, и потому может уничтожиться токмо $= 0$, и тогда будетъ $a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \frac{2\pi}{\lambda} + x^2 = (a - x)^2$, что есть количество $a^\lambda - x^\lambda$ будетъ имѣть одинъ токмо двучленной дѣйствительной множитель $a - x$.

Возмемъ еще для примѣра функціи $a^6 + x^6$ и $a^6 - x^6$. Первая $a^6 + x^6$ имѣетъ три. трученные множителя $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{\pi}{6} + x^2$, $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{3\pi}{6} + x^2$, $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{5\pi}{6} + x^2$, кои по причинѣ что $\mathrm{cof.}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\mathrm{cof.}\frac{3\pi}{6} = 0$, $\mathrm{cof.}\frac{5\pi}{6} = 16(\mathrm{cof.}\frac{\pi}{6})^5 - 10\,\mathrm{cof.}\frac{\pi}{6} - 5\,\mathrm{cof.}\frac{3\pi}{6}$ [член. 8.] $= -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, сдѣлаются $a^2 + x^2$, $a^2 - ax\sqrt{3} + x^2$, $a^2 + ax\sqrt{3} + x^2$.

Вторая функція $a^6 - x^6$ имѣетъ два двучленные множителя $a + x$, $a - x$ и два трученные $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{2\pi}{6} + x^2 = a^2 - ax + x^2$, $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{4\pi}{6} + x^3 = a^2 + ax + x^2$.

(81) Естьли требуются трученные множители количества $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda \mathrm{cof.}\,g + x^{2\lambda}$, то получимъ [изъ члена 78го] два уравненія

$$a^{2\lambda} - 2a^\lambda u^\lambda \mathrm{cof.}\,g\,\mathrm{cof.}\,\lambda\beta + u^{2\lambda}\mathrm{cof.}\,2\lambda\beta = 0,$$
$$-2a^\lambda u^\lambda \mathrm{cof.}\,g\,\mathrm{fin.}\,\lambda\beta + u^{2\lambda}\mathrm{fin.}\,2\lambda\beta = 0.$$

Первое я умножу на $\mathrm{fin.}\,2\lambda\beta$, а другое на $\mathrm{cof.}\,2\lambda\beta$, потомъ отниму одно отъ другаго, и я буду имѣть

$$a^{2\lambda}\mathrm{fin.}2\lambda\beta - 2a^\lambda u^\lambda \mathrm{cof.}g(\mathrm{fin.}2\lambda\beta\,\mathrm{cof.}\lambda\beta - \mathrm{fin.}\lambda\beta\,\mathrm{cof.}2\lambda\beta) = 0 \text{ или}$$
$$[a^{2\lambda}\mathrm{fin.}2\lambda\beta - 2a^\lambda u^\lambda \mathrm{cof.}g.\mathrm{fin.}(2\lambda\beta - \lambda\beta) =] a^{2\lambda}\mathrm{fin.}2\lambda\beta - 2a^\lambda u^\lambda \mathrm{cof.}g\,\mathrm{fin.}\lambda\beta = 0.$$

Оное послѣднее уравненіе соединенное съ симъ $-2a^\lambda u^\lambda \mathrm{cof.}\,g\,\mathrm{fin.}\,\lambda\beta + u^{2\lambda}\mathrm{fin.}2\lambda\beta = 0$, даетъ $u^{2\lambda} = a^{2\lambda}$ и $u = a$; откуда выдетъ $r = -a$ и $t = 1$. Поставляя a вмѣсто u во второе уравненіе, получишь $\mathrm{fin.}\,2\lambda\beta = 2\,\mathrm{cof.}\,g\,\mathrm{fin.}\,\lambda\beta$, и по причинѣ что $\mathrm{fin.}\,2\lambda\beta = 2\,\mathrm{fin.}\,\lambda\beta\,\mathrm{cof.}\,\lambda\beta$, будетъ $\mathrm{cof.}\,\lambda\beta = \mathrm{cof.}\,g$; откуда явствуетъ, что $\lambda\beta = 2i\pi \pm g$ и $\beta = \frac{2i\pi \pm g}{\lambda}$. И такъ искомые трученные множители будутъ сего вида $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{2i\pi \pm g}{\lambda} + x^2$, и они найдутся, поставляя въ

$$a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{2i\pi + g}{\lambda} + x^2,\ a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{i\pi - g}{\lambda} + x^2,$$

вмѣсто $2i$ всѣ четные числа меньшія нежели λ. Но замѣтить надлежитъ, что когда λ есть число четное, то чрезъ предъидущее вставливаніе [вмѣсто $2i$] найдется двумя множителями менѣе, нежели сколько функція $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda.\mathrm{cof.}\,g + x^{2\lambda}$ имѣть оныхъ должна; вотъ сіи множители $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\,\frac{g}{\lambda} + x^2$,

$a^2 + 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{g}{\lambda} + x^2$; когда же λ есть нечетное число, то найдется однимъ токмо множителемъ менѣе, а именно симъ $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{g}{\lambda} + x^2$. (*)

Такимъ образомъ для трichленныхъ множителей функціи $a^6 - a^3x^3\,\mathrm{cof.}\,g + x^6$ мы имѣемъ сіи количества

$a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{2\pi + g}{3} + x^2$, $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{2\pi - g}{3} + x^2$ и $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{g}{3} + x^2$.
Въ самомъ дѣлѣ, по причинѣ что
$\mathrm{cof.}\frac{2\pi + g}{3} = -\frac{1}{2}(\mathrm{cof.}\frac{g}{3} + \sqrt{3}\,\mathrm{fin.}\frac{g}{3})$ и $\mathrm{cof.}\frac{2\pi - g}{3} = -\frac{1}{2}(\mathrm{cof.}\frac{g}{3} - \sqrt{3}\,\mathrm{fin.}\frac{g}{3})$, найдешь произведеніе двухъ первыхъ множителей $=$

$$a^4 + a^2x^4 + x^4 + 2ax(a^2 + x^2)\,\mathrm{cof.}\frac{g}{3} + 2a^2x^2\,\mathrm{cof.}\frac{2g}{3},$$

которое количество умноженное на $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{g}{3} + x^2$ дастъ $a^6 - 2a^3x^3\,\mathrm{cof.}\,g + x^6$. (**)

(*) То и другое произходитъ отъ того, что авторъ опасаясь можетъ быть безъ всякой нужды подобнаго тому затрудненія, каковое встрѣчается при разрѣшеніи на множители количества $a^\lambda \pm x^\lambda$, предписываетъ поставлять вмѣсто $2i$ токмо меньшія нежели λ четныя числа; ибо когда въ первомъ случаѣ, то есть въ случаѣ числа λ четнаго, вмѣсто $2i$ въ формулу $a^2 - 2ax\,\mathrm{cof.}\frac{2i\pi \pm g}{\lambda} + x^2$ поставишь о и λ, то получишь точно тѣ множители, которыхъ у автора не доставало; такъ же когда въ случаѣ числа λ нечетнаго, котораго здѣсь вмѣсто $2i$ поставить уже неможно, поставишь токмо o, то получишь точно тотъ множитель, котораго въ семъ случаѣ не доставало у автора.

А что здѣсь вмѣсто $2i$ можно поставлять о и λ, то для того, что сіе постановленіе не обращаетъ дугу β ни въ нуль ни въ π, какъ въ первомъ примѣрѣ, и что потому трichленной множитель $a^2 - 2a\,\mathrm{cof.}\,\beta + x^2$ не выходитъ, вопреки предположенію, состоящимъ изъ двухъ равныхъ двучленныхъ.

(**) При сихъ умноженіяхъ надлежитъ помнить, что $\mathrm{cof.}\frac{g}{3}^2 - \mathrm{fin}\frac{g}{3}^2 = 2\,\mathrm{cof.}\frac{g}{3}^2 - 1 = \mathrm{cof.}\frac{2g}{3}$, и что $4\,\mathrm{cof.}\frac{g}{3}^3 - 3\,\mathrm{cof.}\frac{g}{3} = \mathrm{cof.}\,3\frac{g}{3} = \mathrm{cof.}\,g$. Чрезъ посредство сего въ первомъ умноженіи количество $a^2x^2(\mathrm{cof.}\frac{g}{3}^2 - 3\,\mathrm{fin.}\frac{g}{3}^2) =$

(82) Изъ послѣднихъ формулъ удобно произвести можно другое свойство круга, которое первой примѣтилъ Муавръ. Вотъ какъ оное обыкновенно предлагается.

Естьли на окружности какого нибудь круга ABHA (черт. XXII) возмется дуга $AL = g$ и дуга $AB = \frac{g}{\lambda}$, потомъ окружность раздѣлится, начиная отъ точки B, на число равныхъ частей, означенное чрезъ λ, и изъ какой нибудь точки O, на діаметрѣ AK взятой, протянутся ко всѣмъ точкамъ дѣленія линеи OB, OF, Of, OG, Og и проч.; я говорю, что будетъ

$$\overline{OB}^2 . \overline{OF}^2 . \overline{Of}^2 . \overline{OG}^2 . \overline{Og}^2 \text{ и проч.} = \overline{CA}^{2\lambda} - 2\overline{CA}^{\lambda} . \overline{CO}^{\lambda} \operatorname{cof.} g + \overline{CO}^{2\lambda}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, означивъ CA чрезъ a, CO чрезъ x и содержащуюся между A и одною изъ точекъ дѣленія дугу чрезъ β, будетъ имѣть $\overline{OQ}^2 = a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \beta + x^2$, и потому поставивъ вмѣсто β сіи различныя дуги $\frac{g}{\lambda}, \frac{2\pi + g}{\lambda}, \frac{2\pi - g}{\lambda}, \frac{4\pi + g}{\lambda}, \frac{4\pi - g}{\lambda}$ и проч., найдетъ для $\overline{OB}^2, \overline{OF}^2, \overline{Of}^2, \overline{OG}^2, \overline{Og}^2$, и проч. тѣ же самыя выраженія, о коихъ мы доказали, что суть множители количества $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda \operatorname{cof.} g + x^{2\lambda}$. (*)

$a^2x^2(\operatorname{cof.} \frac{g}{3}^2 - 2\operatorname{fin.} \frac{g}{3}^2 - \operatorname{fin.} \frac{g}{3}^2) = a^2x^2(2\operatorname{cof.} \frac{g}{3}^2 - 2\operatorname{fin.} \frac{g}{3}^2 - 1)$ обратится въ $2a^2x^2 \operatorname{cof.} \frac{2g}{3} - a^2x^2$. Такъ же въ другомъ умноженіи количество $2a^3x^3 \operatorname{cof.} \frac{g}{3} - 4a^3x^3 \operatorname{cof.} \frac{g}{3} \operatorname{cof.} \frac{2g}{3} = 2a^3x^3(\operatorname{cof.} \frac{g}{3} - 2\operatorname{cof.} \frac{g}{3}(2\operatorname{cof.} \frac{g}{3}^2 - 1)) = 2a^3x^3(\operatorname{cof.} \frac{g}{3} - 4\operatorname{cof.} \frac{g}{3}^3 + 2\operatorname{cof.} \frac{g}{3}) = -2a^3x^3(4\operatorname{cof.} \frac{g}{3}^3 - 3\operatorname{cof.} \frac{g}{3})$ сдѣлается $-2a^3x^3 \operatorname{cof.} g$.

(*) Въ заключеніе сея статьи мы присовокупимъ здѣсь еще слѣдующее замѣчаніе:

Количества $a^\lambda \pm x^\lambda$, $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda \operatorname{cof.} g + x^{2\lambda}$, кои авторъ показалъ какъ разрѣшить на множители, составляютъ токмо первые два общіе вида соизмѣримыхъ функцій, потому что естьли мы представимъ ихъ такъ $A + Bx^\lambda$, $A + Bx^\lambda + Cx^{2\lambda}$, означивъ чрезъ A, B и C по-

стоянныя величины, входящія въ оныя количества, то естественно намъ представятся еще слѣдующіе виды $A + Bx^{\lambda} + Cx^{2\lambda} + Dx^{3\lambda}$, $A + Bx^{\lambda} + Cx^{2\lambda} + Dx^{3\lambda} + Ex^{4\lambda}$, и такъ далѣе; почему, для приведенія нѣкоторымъ образомъ къ концу сея статьи, скажемъ нѣчто о разрѣшеніи на множители и сихъ послѣднихъ количествъ.

Вопервыхъ возмемъ количество $A + Bx^{\lambda} + Cx^{2\lambda} + Dx^{3\lambda}$, или сїе $A + Bx^{\lambda} + Cx^{2\lambda} + x^{3\lambda}$ (отдѣливъ отъ послѣдняго члена его предстоящее); оное, какъ то явно, можетъ быть почитаемо состоящимъ изъ двухъ дѣйствительныхъ множителей $x^{\lambda} + M$, $x^{2\lambda} + Nx^{\lambda} + P$, гдѣ M, N и P неопредѣленныя постоянныя величины; перемножимъ между собою сїи множители; чрезъ то найдемъ $MP + (P + MN)x^{\lambda} + (M + N)x^{2\lambda} + x^{3\lambda}$, и по сравненїи сего количества со взятымъ нами, получимъ, для опредѣленїя трехъ неизвѣстныхъ величинъ M, N и P, три уравненїя $MP = A$, $P + MN = B$, $M + N = C$; изъ коихъ по исключенїи N и P произойдетъ уравненїе третьей степени

$$M^3 - CM^2 + BM - A = 0,$$

которое разрѣшенное дастъ M, и потомъ опредѣлится N и P. И такимъ образомъ взятое нами количество будетъ состоять изъ двухъ дѣйствительныхъ множителей $x^{\lambda} + M$, $x^{2\lambda} + Nx^{\lambda} + P$. Но оные чрезъ предъидущїе способы всегда могутъ разрѣшиться на двучленные или тричленные множители; чего ради чрезъ тѣже способы всегда мы можемъ достигнуть ко множителямъ и взятаго нами количества.

Подобнымъ образомъ разсуждая найдемъ, что и количество $A + Bx^{\lambda} + Cx^{2\lambda} + Dx^{3\lambda} + Ex^{4\lambda}$ разрѣшиться можетъ на два дѣйствительные множителя $x^{\lambda} + M$, $x^{3\lambda} + Nx^{2\lambda} + Px^{\lambda} + Q$, но чрезъ посредство уравненїя четвертой степени. И такъ далѣе.

Откуда слѣдуетъ доказательство, хотя въ прочемъ не прямое, теоремѣ славнаго д'Аламберта, упомянутой нами въ примѣчанїи къ члену 73му, и доказанной Лапласомъ прямо.

О дробяхъ соизмѣримыхъ.

(83) Всякая соизмѣримая функція можетъ быть представлена такъ

$$a + bx + cx^2 + \dots\dots + hx^\lambda,$$

ибо можно положить, что въ ряду $0, 1, 2, \dots\dots \lambda$ всѣ возможныя цѣлыя числа содержатся. Откуда слѣдуетъ, что и всякая соизмѣрнмая дробь можетъ быть изображена чрезъ

$$\frac{(P) \dots\dots\dots\dots a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots\dots + hx^\lambda}{(Q) \dots\dots\dots\dots a' + b'x + c'x^2 + \dots\dots\dots\dots + h'x^{\lambda'}}$$

и естьли въ предложенной дроби случатся степени, коихъ показатели цѣлыя отрицательныя числа, какъ то $x^{-1}, x^{-2} \dots\dots x^{-\mu}$, то, дабы оная была подобна преднаписанной нами, довлѣетъ токмо числитель и знаменатель ея умножить на x^μ, полагая μ величайшимъ изъ сихъ отрицательныхъ показателей. Такъ напримѣръ числитель и знаменатель дроби $\frac{ax^{-3} + 1}{x^{-4} + x^{-2}}$ умноживъ на x^4, обратишь оную въ сію $\frac{ax + x^4}{1 + x^2}$.

Теперь въ дроби $\frac{P}{Q}$ показатель λ можетъ быть больше или меньше нежели λ': естьли больше, то раздѣляя

$$hx^\lambda + \dots\dots cx^2 + bx + a \text{ на } h'x^{\lambda'} + \dots\dots\dots c'x^2 + b'x + a',$$

можешь всегда соизмѣримую дробь разбить на двѣ части, изъ коихъ одна будетъ цѣлая соизмѣримая функція, а другая соизмѣримая дробь, у которой высочайшая степень количества x въ числителѣ меньше нежели высочайшая степень того же количества x въ знаменателѣ. Напримѣръ пусть предложенная дробь будетъ $\frac{ax + x^4}{1 + x^2}$, то раздѣливъ $x^4 + ax$ на $x^2 + 1$, найдешь, что $\frac{ax + x^4}{1 + x^2} = x^2 - 1 + \frac{1 + ax}{1 + x^2}$; такимъ же образомъ найдется, что $\frac{b + ax^{\lambda+3}}{1 + x^\lambda} = ax^3 + \frac{b - ax^3}{1 + x^\lambda}$.

Итакъ, когда предложится разрѣшить соизмѣримую дробь на дроби простыя, то вся трудность обращается въ разрѣшение на дроби простыя соизмѣримой дроби сего вида

$$\frac{(P) \ldots\ldots a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + hx^{\lambda}}{(Q) \ldots\ldots a' + b'x + c'x^2 + \ldots\ldots + i'x^{\lambda+1}},$$

въ которой числитель P и знаменатель Q полагаются не имѣющими общихъ множителей.

(84) Я представляю себѣ число $\lambda + 1$ двучленныхъ дробей

$$\frac{A}{m + nx} + \frac{B}{m' + n'x} + \frac{C}{m'' + n''x} + \text{ и проч.}$$

Ясно видно, что по приведенiи ихъ къ одному знаменателю, произшедшая дробь будетъ имѣть числителемъ цѣлую соизмѣримую степени λ функцiю, которая въ разсужденiи сей степени будетъ наиобщая. Возмемъ для примѣра три дроби

$$\frac{A}{m + nx} + \frac{B}{m' + n'x} + \frac{C}{m'' + n''x},$$

то приведши ихъ къ одному знаменателю, получимъ дробь

$$\frac{\begin{matrix} Am'm'' + A(m''n' + m'n'')\,x + An'n''x^2 \\ Bmm'' + A(m''n + mn'') \quad + Bnn'' \\ Cmm' + C(m'n + mn') \quad + Cnn' \end{matrix}}{(m + nx)(m' + n'x)(m'' + n''x)},$$

у которой числитель есть цѣлая соизмѣримая наиобщая второй степени функцiя. При чемъ весьма примѣчать надлежитъ, что двучленныя количества $m + nx$, $m' + n'x$, $m'' + n''x$ полагаются неравными и первыми между собою; ибо, естьли бы противное тому было, такъ напримѣръ, естьли бы было $m' + n'x = Km + Knx$, то бы вышло $m' = Km$, $n' = Kn$ и дробь сдѣлалася

$$\frac{\begin{matrix} (AK+B)mm'' + (AK+B)(m''n + mn'')x + (AK+B)nn''x^2 \\ + CKm^2 \quad + 2CKmn \quad + CKn^2 \end{matrix}}{K(m + nx)^2(m'' + n''x)},$$

у которой числитель не можетъ уже представлять всякую цѣлую соизмѣримую второй степени функцiю, понеже уравнивъ оный общей второй степени функцiи $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, найдешь

между α, β и γ слѣдующее отношенїе $\alpha n^2 - \beta mn + \gamma m^2 = 0$. [Ибо сдѣлавъ $(AK + B)mm'' + CKm^2 = \alpha$, $(AK + B)(m''n + mn'') + 2CKmn = \beta$, $(AK + B)nn'' + CKn^2 = \gamma$ и умноживъ первое изъ сихъ уравненій на n^2, а другое на mn, увидишь ясно, что $\alpha n^2 - \beta mn = -(AK + B)m^2nn'' - CKm^2n^2 = -m^2\gamma$; слѣд. и проч.]

Но естьли полагая два равные множителя, вообразишь себѣ три слѣдующія дроби

$$\frac{A}{(m+nx)^2} + \frac{B}{m+nx} + \frac{C}{m''+n''x},$$

то приведши ихъ къ одному знаменателю, получишь дробь

$$\frac{Am'' + Bmm'' + Cm^2 + (An'' + B(m''n + mn'') + 2Cmn)x + (Bnn'' + Cn^2)x^2}{(m+nx)^2(m''+n''x)},$$

у которой числитель можетъ представлять всякую цѣлую соизмѣримую второй степени функцію. Тоже самое будетъ, естьли и изъ трехъ равныхъ множителей составятся сіи три дроби

$$\frac{A}{(m+nx)^3} + \frac{B}{(m+nx)^2} + \frac{C}{m+nx},$$

ибо приведши ихъ къ одному знаменателю, найдешь

$$\frac{A + Bm + Cm^2 + (Bn + 2Cmn)x + Cn^2x^2}{(m+nx)^3}.$$

Представимъ себѣ теперь двѣ тричленныя дроби

$$\frac{A + Bx}{r^2 + 2rtx\cos.\beta + t^2x^2} + \frac{C + Dx}{r'^2 + 2r't'x\cos.\beta' + t'^2x^2},$$

у коихъ знаменатели суть неравные и первые между собою; приведши ихъ къ одному знаменателю, найдешь сію дробь

$$\frac{\begin{array}{l} Ar'^2 + Cr^2 + (Br'^2 + Dr^2)x + (At'^2 + Ct^2)x^2 + (Bt'^2 + Dt^2)x^3 \\ \quad + 2Ar't'\cos.\beta' + 2Br't'\cos.\beta' \\ \quad + 2Crt\cos.\beta \quad + 2Drt\cos.\beta \end{array}}{(r^2 + 2rtx\cos.\beta + t^2x^2)(r'^2 + 2r't'x\cos.\beta' + t'^2x^2)},$$

у которой числитель есть цѣлая соизмѣримая наиобщая третьей степени функція. Естьли бы тричленные множители были равные, то бы надлежало составить сіи двѣ дроби

$$\frac{A + Bx}{(r^2 + 2rtx\cos.\beta + t^2x^2)^2} + \frac{C + Dx}{r^2 + 2rtx\cos.\beta + t^2x^2},$$

ибо ихъ приведши къ одному знаменателю, нашлася бы дробь

$$\frac{\begin{array}{l} A + Cr^2 + (B + Dr^2)x \quad + \quad Ct^2x^2 + Dt^2x^3 \\ \quad + 2Crt\cos.\beta \quad + 2Drt\cos.\beta \end{array}}{(r^2 + 2rtx\cos.\beta + t^2x^2)^2};$$

у которой числитель есть такъ же цѣлая соизмѣримая наиобщая третьей степени функція.

(85) Но не продолжая далѣе сихъ изчисленій, я думаю что слѣдующее правило, дабы всякую предложенную соизмѣримую дробь разрѣшить на дроби простыя, можно почитать за доказанное:

Пусть оная дробь изобразится чрезъ

$$\frac{(P) \ldots\ldots a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + hx^\lambda}{(Q) \ldots\ldots a' + b'x^2 + c'x^2 + \ldots\ldots + i'x^{\lambda+1}};$$

ищи множители знаменателя Q, разрѣшая уравненіе

$$a' + b'x + c'x^2 + \ldots\ldots + i'x^{\lambda+1} = 0;$$

и естьли найдешь двучленные дѣйствительные множители $m + nx$, $m' + n'x$, и проч. $(p + qx)^u$, и проч., гдѣ $m + nx$, $m' + n'x$, и проч. $p + qx$ и проч. суть неравные и первые между собою количества, и тричленные на двучленные неразрѣшимые множители $r^2 + 2rtx\,\mathrm{cos}.\beta + t^2x^2$, и проч. $(s^2 + 2sux\,\mathrm{cos}.\gamma + u^2x^2)^\nu$, и проч., гдѣ $r^2 + 2rtx\,\mathrm{cos}.\beta + t^2x^2$, и проч. $s^2 + 2sux\,\mathrm{cos}.\gamma + u^2x^2$ и проч. суть такъ же неравные и первые между собою количества, то положи $\frac{P}{Q} = \frac{A}{m + nx}$ $+ \frac{B}{m' + n'x}$ + и проч. $+ \frac{A'}{(p + qx)^u} + \frac{B'}{(p + qx)^{u-1}} \ldots\ldots + \frac{H'}{p + qx}$ + и проч. $+ \frac{E + Fx}{r^2 + 2rtx\,\mathrm{cos}.\beta + t^2x^2}$ + и проч. $+ \frac{E' + F'x}{(s^2 + 2sux\,\mathrm{cos}.\gamma + u^2x^2)^\nu}$ $+ \frac{G' + H'x}{(s^2 + 2sux\,\mathrm{cos}.\gamma + u^2x^2)^{\nu-1}} + \ldots\ldots + \frac{M' + N'x}{s^2 + 2sux\,\mathrm{cos}.\gamma + u^2x^2}$ + и проч. и приведши сіи простыя дроби къ одному знаменателю, получишь дробь имѣющую числителемъ

$$A1 + B1x + C1x^2 + \ldots\ldots + H1x^\lambda;$$

и какъ сіе количество можетъ представлять всѣ цѣлыя соизмѣримыя функціи степени λ, то можно положить, что оно есть тожественно съ количествомъ

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots hx^\lambda;$$

симъ образомъ составишь уравненія

$$A1 = a, B1 = b, C1 = c \ldots\ldots H1 = h,$$

которыя послужать ко опредѣленїю A, B, и проч. A′, B′ . . . . H′, и проч. E, F, и проч. E′, F′ . . . . . N′, и проч.

(96) Мы возмемъ для примѣра сїю соизмѣримую дробь $\frac{1+2x+3x^2+4x^3}{x(1-x)^2(1+x^3)}$, которую предлагаемъ разрѣшить на дроби простыя. Поелику множители знаменателя суть x, $1+x$, $(1-x)^2$, $1-x+x^2$, то мы положимъ, что предложенная дробь равна

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{A'}{(1-x)^2}+\frac{B'}{1-x}+\frac{E+Fx}{1-x+x^2};$$

и приведши оныя простыя дроби къ одному знаменателю, мы получимъ тожественное уравненїе

$$\begin{array}{llllll}
A & -\,2Ax & +\,Ax^2 & +\,Ax^3 & -\,2Ax^4 & +\,Ax^5 = 0, \\
-\,1 & +\,B & -\,3B & +\,4B & -\,3B & +\,B \\
 & +\,A' & -\,B' & -\,E & +\,A' & -\,B' \\
 & +\,B' & -\,E & -\,F & +\,B' & +\,F \\
 & +\,E & +\,F & & +\,E & \\
 & -\,2 & -\,3 & -\,4 & -\,F &
\end{array}$$

изъ котораго найдемъ $A=1$, $B=\frac{1}{6}$, $A'=5$, $B'=\frac{5}{2}$, $E=-\frac{11}{3}$, $F=\frac{4}{3}$. И такъ $\frac{1+2x+3x^2+4x^3}{x(1-x)^2(1+x^3)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{6(1+x)}+\frac{5}{(1-x)^2}+\frac{5}{2(1-x)}-\frac{11-4x}{3(1-x+x^2)}$.

Вотъ другой способъ опредѣлять тѣже самыя предстоящїя.

(87) Пусть $\frac{P}{Q}$ предложенная соизмѣримая дробь, и пусть требуется опредѣлить числитель частной дроби $\frac{A}{m+nx}$; положи $Q=(m+nx)S$ и $\frac{P}{Q}=\frac{A}{m+nx}+\frac{R}{S}$, и какъ такъ же $\frac{P}{Q}=\frac{P}{(m+nx)S}$, то будетъ $R=\frac{P-AS}{m+nx}$. Но поелику R есть соизмѣримая цѣлая функцїя, то количество $P-AS$ должно быть чрезъ $m+nx$ дѣлимо на цѣло; откуда слѣдуетъ, что естьли $m+nx=0$, то должно быть такъ же и $P-AS=0$, и слѣдственно A равно количеству, въ какое $\frac{P}{S}$ обратится, когда сдѣлается $x=-\frac{m}{n}$; причемъ весьма ясно видно, что S не должно заключать въ себѣ множителей равныхъ $m+nx$, ниже такихъ, кои бы были произведенїя отъ умноженїя сего количества произшедшїя. [Ибо, естьли бы S имѣло множитель $n+mx$, то бы какъ AS, такъ, по причинѣ что $P-AS$ дѣ-

лится чрезъ $m+nx$ на цѣло, и P имѣло множитель $m+nx$, и дробь $\frac{P}{Q}$ была бы не простая, что противно положенію.]

Въ предъидущемъ примѣрѣ $P=1+2x+3x^2+4x^3$, и $S=(1-x)^2(1+x^3)$; почему когда сдѣлаешь $x=0$, то получишь $\frac{P}{S}=1$, что дѣйствительно есть та величина, которую мы нашли для A. Естьли хочешь опредѣлить B, то будетъ $S=x(1-x)^2(1-x+x^2)$; но когда $x=-1$, тогда $\frac{P}{S}=\frac{1}{6}$ слѣдовательно $B=\frac{1}{6}$, какъ то мы прежде нашли.

(88) Чтобы опредѣлить числители дробей
$$\frac{A'}{(p+qx)^\mu}+\frac{B'}{(p+qx)^{\mu-1}}+\ldots\ldots+\frac{H'}{p+qx},$$
положи $Q=(p+qx)^\mu S$ и $\frac{P}{Q}=\frac{A'}{(p+qx)^\mu}+\frac{B'}{(p+qx)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{H'}{p+qx}+\frac{R}{S}$; и по причинѣ что $\frac{P}{Q}=\frac{P}{(p+qx)^\mu S}$, будетъ
$$R=\frac{P-S(A'+B'(p+qx)+\ldots\ldots+H'(p+qx)^{\mu-1})}{(p+qx)^\mu}.$$
Поелику же R есть соизмѣримая цѣлая функція, то ясно видно, что числитель второй части предъидущаго уравненія долженъ быть чрезъ знаменатель дѣлимъ на цѣло; изъ чего слѣдуетъ, что сей числитель долженъ изчезнуть въ положеніи $p+qx=0$, и въ семъ самомъ положеніи $P-A'S=0$; откуда выведутъ A равно количеству, въ какое $\frac{P}{S}$ обратится, когда сдѣлается $x=-\frac{p}{q}$. Но понеже положеніе $p+qx=0$, дѣлаетъ и $P-A'S=0$, то явствуетъ, что $P-A'S$ должно быть чрезъ $p+qx$ дѣлимо на цѣло. Положимъ $\frac{P-A'S}{p+qx}=T$, гдѣ T цѣлая соизмѣримая функція, будетъ $R=\frac{T-S(B'+C'(p+qx)+\ldots+H'(p+qx)^{\mu-2})}{(p+qx)^{\mu-1}}$.
Чрезъ подобное разсужденіе тому, которое предъ симъ мы

учинили, найдешь что $T - B'S$ въ положенїи $p + qx = 0$, должно быть равно нулю; откуда слѣдуетъ, что B' равно количеству, къ какое $\frac{T}{S}$ обратится, когда сдѣлается $x = -\frac{p}{q}$, и что $T - B'S$ чрезъ $p + qx$ дѣлится на цѣло. Пусть $\frac{T - B'S}{q + px} = U$, гдѣ U соизмѣримая цѣлая функцїя; будетъ

$$R = \frac{U - S(C' + \ldots\ldots + H'(p + qx)^{\mu - 3})}{(p + qx)^{\mu - 2}}$$

и C' равно количеству, въ какое $\frac{U}{S}$ обратится, когда сдѣлается $x = \frac{-p}{q}$. Естьли хочешь найти еще слѣдующее предстоящее, то положи $\frac{U - C'S}{p + qx} = V$, и будетъ оное равно количеству, въ какое $\frac{V}{S}$ обратится, когда сдѣлается $x = \frac{-p}{q}$. И такъ далѣе.

Чтобы въ предъидущемъ примѣрѣ опредѣлить предстоящїя A', B', положи $Q = (1 - x)^2 S$; откуда выдетъ $S = x(1 + x^3)$ и $\frac{P}{S} = \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{x(1 + x^3)}$; когда же сдѣлаешь $x = 1$, то сїе выраженїе учинится $= 5$, что и будетъ величина предстоящаго A'. Но $P - A'S = 1 - 3x + 3x^2 + 4x^3 - 5x^4$; чего ради $T = 1 - 2x + x^2 + 5x^3$ и $\frac{T}{S} = \frac{1 - 2x + x^2 + 5x^3}{x(1 + x^3)}$, гдѣ сдѣлавъ $x = 1$, выдетъ $\frac{5}{2}$ для величины предстоящаго B'.

(89) Теперь вопросъ состоитъ въ опредѣленїи предстоящихъ въ числителѣ тричленной дроби $\frac{E + Fx}{r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2}$. Положи $Q = (r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2)\, S$ и $\frac{P}{Q} = \frac{E + Fx}{r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2} + \frac{R}{S}$; и какъ такъ же $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2)\, S}$, то будетъ $R = \frac{P - S(E + Fx)}{r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2}$.

Мы заключимъ изъ сего; какъ и прежде, что, поелику R есть соизмѣримая цѣлая функцїя, надобно чтобы количество $P - S(E + Fx)$ чрезъ $r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2$ было дѣлимо на цѣло, и чтобы потомъ каждая изъ величинъ количества x, которыя даетъ уравненїе $r^2 + 2rtx\, cos.\beta + t^2x^2 = 0$, обращала функцїю $P - S(E + Fx)$ въ нуль. И какъ сїи величины ко-

личества x суть

$$-\frac{r}{t}(\text{cof.}\,\beta+\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\beta) \text{ и } -\frac{r}{t}(\text{cof.}\,\beta-\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\beta);$$

то я положу, что онѣ поставленныя въ P и S обращаютъ оныя

$$P \text{ въ } \Pi+\pi\sqrt{-1} \text{ и } \Pi-\pi\sqrt{-1}$$
$$S \text{ въ } \Sigma+\varsigma\sqrt{-1} \text{ и } \Sigma-\varsigma\sqrt{-1}, \ (*)$$

отъ чего получимъ два уравненія

$$\Pi+\pi\sqrt{-1}=(\Sigma+\varsigma\sqrt{-1})(E-\tfrac{r}{t}F(\text{cof.}\,\beta+\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\beta)),$$
$$\Pi-\pi\sqrt{-1}=(\Sigma-\varsigma\sqrt{-1})(E-\tfrac{r}{t}F(\text{cos.}\,\beta-\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\beta));$$

изъ коихъ, одно съ другимъ слагая, и потомъ второе отъ перваго отнимая, находимъ

$$\Pi=\Sigma E-\tfrac{r}{t}\Sigma F\,\text{cof.}\,\beta+\tfrac{r}{t}\varsigma F\,\text{fin.}\,\beta;$$
$$\pi=\varsigma E-\tfrac{r}{t}\varsigma F\,\text{cof.}\,\beta-\tfrac{r}{t}\Sigma F\,\text{fin.}\,\beta.$$

Наконецъ чрезъ посредство изключенія получимъ

$$E=\frac{\Pi\Sigma+\pi\varsigma}{\Sigma^2+\varsigma^2}+\frac{\text{cof.}\,\beta}{\text{fin.}\,\beta}\cdot\frac{\Pi\varsigma-\pi\Sigma}{\Sigma^2+\varsigma^2},\quad F=\frac{t}{r\,\text{fin.}\,\beta}\cdot\frac{\Pi\varsigma-\pi\Sigma}{\Sigma^2+\varsigma^2}.$$

[Ибо, первое уравненіе умноживъ на ς, а другое на Σ, и сіе другое отнявъ отъ перваго, найдешь $F=\frac{t}{r\,\text{fin.}\,\beta}\cdot\frac{\Pi\varsigma-\pi\Sigma}{\Sigma^2+\varsigma^2}$; потомъ первое умноживъ на Σ, а другое на ς и сіе другое приложивъ къ первому, будешь имѣть $E=\frac{\Pi\Sigma+\pi\varsigma}{\Sigma^2+\varsigma^2}+\frac{r}{t}\,\text{cof.}\,\beta.F$, куда на мѣсто F надлежитъ поставить токмо равную величину, чтобы получить первое изъ предначертанныхъ выраженій].

Употребимъ мы сіи формулы ко опредѣленію E и F въ примѣрѣ, въ которомъ

$$P=1+2x+3x^2+4x^3 \text{ и } S=x-x^2-x^3+x^4;$$

будетъ $r^2+2rtx\,\text{cof.}\,\beta+t^2x^2=1-2x\,\text{cof.}\,\frac{\pi}{3}+x^2$; откуда выдетъ $r=-1, t=1$ и $\beta=\frac{\pi}{3}$. Сверьхъ того, поелику $\text{cof.}\,\beta=\frac{1}{2}$ $\text{cof.}\,2\beta=-\frac{1}{2}$, $\text{cof.}\,3\beta=-1$, $\text{cof.}\,4\beta=-\frac{1}{2}$, и $\text{fin}\,\beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\text{fin.}\,2\beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\text{fin.}\,3\beta=0$, $\text{fin.}\,4\beta=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, выдетъ $x[=-\frac{r}{t}(\text{cof.}\,\beta\pm\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\beta)]=$

(*) Сіе положеніе основано на томъ, что всякое мнимое количество можетъ быть приведено къ сему виду $A+B\sqrt{-1}$.

$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})$, $x^2 = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1})$, $x^3 = -1$, $x^4 = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})$. Поставляя сїи величины въ P и S, найдешь $\Pi = -\frac{7}{2}$, $\pi - \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $\Sigma = \frac{3}{2}$, $\varsigma = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, и слѣдовательно $E = -\frac{11}{3}$, $F = \frac{4}{3}$.

(90) Остается намъ теперь опредѣлить предстоящїя E′, F′ и проч. Положимъ $Q = (s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^\nu S$ и $\frac{P}{Q} =$

$$\frac{E' + F'x}{(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^\nu} + \frac{G' + H'x}{(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^{\nu-1}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{M' + N'x}{s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2} + \frac{R}{S};$$ и по причинѣ что $\frac{P}{Q} =$

$$\frac{P}{(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^\nu.S},$$ будетъ $R =$

$$\frac{P - S(E' + F'x + (G' + H'x)(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2) + \text{и проч.})}{(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^\nu}.$$

Изъ уравненїя же $u^2x^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + s^2 = 0$ мы имѣемъ $x = -\frac{s}{u}(\text{cos}.\gamma \pm \sqrt{-1}\,\text{sin}.\gamma)$, и означивъ чрезъ $\Pi \pm \pi\sqrt{-1}$ и $\Sigma \pm \varsigma\sqrt{-1}$ количества, въ которыя функцїи P и S обратятся, поставляя вмѣсто x его величины, мы будемъ имѣть чтобы опредѣлить E′ и F′, два уравненїя

$$\Pi + \pi\sqrt{-1} = (\Sigma + \varsigma\sqrt{-1})(E' - \tfrac{s}{u}(F'\,\text{cos}.\gamma + \sqrt{-1}\,\text{sin}.\gamma));$$

$$\Pi - \pi\sqrt{-1} = (\Sigma - \varsigma\sqrt{-1})(E' - \tfrac{s}{u}(F'\,\text{cos}.\gamma - \sqrt{-1}\,\text{sin}.\gamma)).$$

Положимъ $\frac{P - S(E' + F'x)}{s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2} = T$, будетъ $R =$

$$\frac{T - S(G' + H'x + \ldots\ldots + (M' + N'x)(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^{\nu-2})}{(s^2 + 2sux\,\text{cos}.\gamma + u^2x^2)^{\nu-1}}.$$

И такъ естьли мы означимъ чрезъ $\tau \pm \theta\sqrt{-1}$ количество, въ которое T обратится чрезъ предъидущее вставливанїе, мы будемъ имѣть, для опредѣленїя G′ и H′, два уравненїя

$$\tau + \theta\sqrt{-1} = (\Sigma + \varsigma\sqrt{-1})(G' - \tfrac{s}{u}H'(\text{cos}.\gamma + \sqrt{-1}\,\text{sin}.\gamma)),$$

$$\tau - \theta\sqrt{-1} = (\Sigma - \varsigma\sqrt{-1})(G' - \tfrac{s}{u}H'(\text{cos}.\gamma - \sqrt{-1}\,\text{sin}.\gamma));$$

и такъ далѣе.

Я возьму для примѣра соизмѣримую дробь $\frac{1}{(a^4+x^4)^2}$. Множители количества a^4+x^4 суть $a^2+ax\sqrt{2}+x^2$ и $a^2-ax\sqrt{2}+x^2$; почему, естьли я положу $Q=(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)^2 S$, я буду имѣть $s=-a$, $u=1$, $\cos.\gamma=\sin.\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}(1\pm\sqrt{-1})$, $x^2=\pm a^2\sqrt{-1}$. Поставляя сіи величины въ $(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^2$, найдешь $S=+8a^4\sqrt{-1}$. Но $P=1$; слѣдовательно $\Pi=1$, $\pi=0$, $\Sigma=0$, $\varsigma=8a^4$. Поставь сіи величины въ уравненія, кои должны дать E' и F', и будешь имѣть

$$1=4a^4\sqrt{-1}(2E'+a\sqrt{2}.F')-4a^5\sqrt{2}.F',$$
$$-1=4a^4\sqrt{-1}(2E'+a\sqrt{2}.F')+4a^5\sqrt{2}.F';$$

откуда получишь

$E'=\frac{1}{8a^4}$, $F'=\frac{-1}{4\sqrt{2}\,a^5}$ и $E'+F'x=\frac{a-x\sqrt{2}}{8a^5}$.

Найдешь потомъ $T=$

$$\frac{1-\frac{a-x\sqrt{2}}{8a^5}(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^2}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}=\frac{1}{8a^5}(7a^3+6a^2x\sqrt{2}+5ax^2+x^3\sqrt{2}),$$

что обратится въ $\frac{3}{2a^2}(1\pm\sqrt{-1})$, когда вмѣсто x поставишь найденныя выше величины.

И такъ $\tau=\theta=3a^2$ и

$$\frac{3}{2a^2}(1+\sqrt{-1})=4a^4\sqrt{-1}(2G'+a\sqrt{2}.H')-4a^5\sqrt{2}.H',$$
$$\frac{-3}{2a^2}(1-\sqrt{-1})=4a^4\sqrt{-1}(2G'+a\sqrt{2}H')+4a^5\sqrt{2}.H';$$

откуда получишь $G'=\frac{3}{8a^6}$, $H'=\frac{-3}{8a^7\sqrt{2}}$ и $G'+H'x=$

$$\frac{3(2a-x\sqrt{2})}{16a^7}$$

Найдешь двѣ другія простыя дроби, перемѣняя въ предъидущихъ у количества a знакъ, и будешь имѣть

$$\frac{1}{(a^4+x^4)^2}=\frac{a-x\sqrt{2}}{8a^5(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)^2}+\frac{3(2a-x\sqrt{2})}{16a^7(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)}+\frac{a+x\sqrt{2}}{8a^5(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^2}$$
$$+\frac{3(2a+x\sqrt{2})}{16a^7(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)}.$$

О способѣ разлагать функціи въ ряды.

(91) Чтобы разложить въ *восходящій рядъ*, сирѣчь въ такой, въ которомъ бы показатели количества x возрастали, соизмѣримую дробь $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$, я положу $\frac{1+4x+x^2}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ и проч.,
и ясно видно, что требуемой рядъ не можетъ имѣть инаго вида. Потомъ уничтожая знаменатель и перенося всѣ члены на одну сторону, я получу уравненіе

$$\begin{array}{llll} Ax + & Bx^2 + & Cx^3 + & Dx^4 + \text{ и проч.} = 0, \\ -8 & -4A & -4B & -4C \\ & +5 & +6A & +6B \\ & & -4 & -4A \\ & & & +1 \end{array}$$

которое должно быть тожественное, не зависимо ни отъ какой величины приписуемой количеству x. Почему непосредственно будетъ $A - 8 = 0$, $B - 4A + 5 = 0$, $C - 4B + 6A - 4 = 0$, $D - 4C + 6B - 4A + 1 = 0$, и проч, и слѣдственно $A = 8$, $B = 27$, $C = 64$, $D = 125$, и проч.

Все то, что принадлежитъ къ одной и тойже степени количества x, есть членъ тожественнаго уравненія; въ каждомъ таковомъ членѣ отличается степень количества x, отъ ея предстоящаго; потомъ наблюдается правило, на которомъ способъ неопредѣленныхъ предстоящихъ основанъ и которое состоитъ въ томъ, чтобы уравнивать нулю каждое изъ предстоящихъ тожественнаго уравненія, и причина сему, какъ то мы уже сказали, есть та, что поелику x недолженствуетъ принять никакой опредѣленной величины, ни которой изъ членовъ онаго уравненія не можетъ быть положенъ уничтоженнымъ предшествующими или послѣдующими его членами.

Естьли хочешь разложить въ восходящій рядъ функцію $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то положи ее равною $1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 +$ и проч., и по взятіи квадрата изъ каждой части уравненія и умноженіи на $1 + x^2$, получишь

$$\begin{array}{llll} 2A.\,x^2 & +\,2Bx^4 & +\,2C.\,x^6 & +\,2D.\,x^8 + \text{и проч.} = 0. \\ +\,1 & +\,A^2 & +\,2AB & +\,2AC \\ & +\,2A & +\,2B & +\,B^2 \\ & & +\,A^2 & +\,2C \\ & & & +\,2AB \end{array}$$

Уравнивая же каждое изъ предстоящихъ нулю, найдешь

$$A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1.3}{2.4},\ C = -\frac{1.3.5}{2.4.6},\ D = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},\ \text{и проч.}$$

(92) Удобно доказывается, что когда m есть цѣлое и положительное число, тогда $(1 + x)^m = 1 + mx + m.\frac{m-1}{2}x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}x^4 +$ и проч. (*), и что

(*) И именно сіе доказывается: или чрезъ посредство чиселъ образованіе приемлющихъ, какъ учинилъ Марки де л'Опиталь въ 10й книгѣ коническихъ своихъ сѣченій; или чрезъ переложеніе и совокупленіе буквъ, какъ сдѣлалъ г. Клеро въ своихъ Елементахъ Алгебры, и послѣ Боссю и Безу въ своихъ курсахъ; или чрезъ единое только переложеніе, какъ учинилъ славной Ейлеръ въ универсальной своей Ариѳметикѣ; или на послѣдокъ чрезъ разсматриваніе возвращающагося ряда, которой произойдетъ отъ раздѣленія предстоящихъ, напримѣръ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, степеней биномы на самихъ себя: такъ въ семъ примѣрѣ частныя 1, $\frac{6}{1}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{1}{6}$ составляютъ рядъ 1, $\frac{6}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, котораго члены взаимно перемноженные даютъ предстоящія бй степени биномы, и показуютъ законъ, коему онѣ послѣдуютъ. Сей способъ кажется принадлежитъ Зондерзону; смотри его Алгебру. Но изъ всѣхъ сихъ способовъ, способъ Клеровъ есть наилучшій. Въ прочемъ тоже доказывается еще чрезъ посредство общихъ способовъ, таковы суть способы Ейлера и Кондорсета предложенные въ V томѣ Новыхъ Дѣяній здѣшней Академіи наукъ и въ членѣ „binome„ методической Енциклопедіи.

$(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\text{и проч.})^m = 1+max+(mb+m.\frac{m-1}{2}a^2)x^2 + (mc+m.\frac{m-1}{2}2ab+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.a^3)x^3 + (md+m.\frac{m-1}{2}(2ac+b^2) + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.3a^2b+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.a^4)x^4 + (me+m.\frac{m-1}{2}2.(ad+bc) + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}3(a^2c+ab^2)+m\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.4a^3b+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}a^5)x^5 + \text{и проч.}$

Положивъ сіе, требуется разложить въ рядъ функцію $(1+x)^{\frac{m}{n}}$, гдѣ m и n суть два цѣлыя положительныя числа? Пусть $(1+x)^{\frac{m}{n}} = z$, будетъ $(1+x)^m = z^n$ и количество z долженствуетъ быть сего вида $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ и проч. (*); и такъ для опредѣленія предстоящихъ будемъ имѣть сей рядъ уравненій: $m = nA$, $m.\frac{m-1}{2} = nB + n.\frac{n-1}{2}A^2$, $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} = nC + n.\frac{n-1}{2}2AB + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}A^3$, $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4} = nD + n.\frac{n-1}{2}(2AC+B^2) + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.3A^2B + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.A^4$, и проч., изъ которыхъ уравненій находимъ $A = \frac{m}{n}$, $B = \frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}$, $C = \frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n}$, $D = \frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n}.\frac{m-3n}{4n}$, и проч.

И такъ хотя бы положительное число m было цѣлое или дробное, всегда будетъ $(1+x)^m = 1+mx+m.\frac{m-1}{2}x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3 +$ и проч. (**)

(*) Ибо, когда извѣстно, что количество $(1+x)^m$ и слѣдственно такъ же z^n должно имѣть сей видъ $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ и проч.; то количеству z надлежитъ дать такой видъ, что бы цѣлая положительная степень отъ онаго имѣла упомянутой видъ $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ и проч.; но выше показано было, что количество вида $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ и проч. возвышенное въ цѣлую и положительную степень сохраняетъ тотъ же самой видъ; слѣдовательно количеству z надлежитъ дать сей самой видъ $1+Ax+Bx^2+Cx^3+$ и пр., и давъ ему иной видъ, выдетъ z^n, и потому такъ же $(1+x)^m$, инаго же вида; что само себѣ противорѣчитъ.

(**) Доказательство сіе для простоты своей и что извѣстна въ немъ причина о предполагаемомъ видѣ разложенія функціи $(1+x)^{\frac{m}{n}}$, превосходитъ всѣ

Естьли требуется разложить въ рядъ функцію $(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m}$, то положи ее $= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ и проч. и получишь тожественное уравнение

$$\begin{array}{llll} m.x & + m.\frac{m-1}{2}.x^2 & + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.x^3 & + \text{и проч.} = 0, \\ +A & +mA & +m.\frac{m-1}{2}.A & \\ & +B & +mB & \\ & & +C & \end{array}$$

изъ котораго найдешь $A = -m$, $B = m.\frac{m+1}{2}$, $C = -m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}$, $D = m.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}.\frac{m+3}{4}$, и проч. Слѣдовательно какое бы ни было число m, всегда будетъ $(1+x)^m = 1 + mx + m.\frac{m-1}{2}x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3 +$ и проч.

прочія на сей случай данныя; но оное вмѣстѣ съ сими прочими подвержено тому неудобству, что не доказываетъ главнаго обстоятельства, которое тутъ доказать надлежитъ, а именно, что въ случаѣ $x < 1$ (которой одинъ токмо и нуженъ, или въ которомъ одномъ токмо рядъ выражаетъ то, что дѣлаетъ его способнымъ ко употребленію) величина содержащаяся въ ономъ ряду есть перемѣнная, по мѣрѣ увеличиванія числа членовъ растущая или убывающая и къ данной функціи такъ приближающаяся, что можетъ съ нею разниться меньше нежели всякая по произволенію данная величина, никогда однакожъ не сдѣлавшись равною оной функціи. Сколько я ни разсматривалъ различныхъ доказательствъ Нютоновой биномъ, въ случаѣ дробнаго такъ же и отрицательнаго показателя, не нашелъ ни въ которомъ сего доказаннымъ, и думаю, что присовокупивъ еще случаи, въ которомъ показатель съ единицею не соизмѣримъ, съ надлежащею строгостію того доказать чрезъ посредство простой алгебры и не возможно, но что надобно тутъ неминуемо употребить дифференціальное изчисленіе, и именно Тейлорову теорему, доказавъ сперва оную во всей строгости. Вся трудность здѣсь состоитъ въ томъ, что бы доказать упомянутое главное обстоятельство не предполагая безконечно продолжающійся рядъ равнымъ данной функціи, означающей опредѣленную величину, поелику сіе предположеніе не представляетъ уму ни какаго чистаго и яснаго понятія, но присоединяя для сего развитіе остатокъ, котораго видъ найти надлежитъ. Въ разсужденіи сего предмета я представилъ Академіи небольшое сочиненіе, которое издано будетъ или въ Дѣяніяхъ оной Академіи или въ математическихъ трудахъ моихъ.

Я могу почитать сей рядъ *приближающимся*, поелику въ моей волѣ состоитъ взять для x дробное количество. Въ самомъ дѣлѣ естьли функція, которую разложить въ рядъ надлежитъ, будетъ $(p + q)^m$, гдѣ p полагается больше q, я могу ее перемѣнить на сію $p^m (1 + \frac{q}{p})^m = p^m (1 + m.\frac{q}{p} + m.\frac{m-1}{2}(\frac{q}{p})^2$ $+$ и проч.), и рядъ будетъ тѣмъ болѣе приближающійся, чѣмъ p будетъ больше q. И такъ ѳеорема должна быть предложена слѣдующимъ образомъ: когда m какое нибудь число и p больше нежели q, то степень отъ $p + p$ или

$$(p + q)^m = p^m + mp^{m-1}q + m.\frac{m-1}{2}p^{m-2}q^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}p^{m-3}q^3 + \text{и проч.}$$

Когда m есть цѣлое положительное число, тогда сей рядъ будетъ имѣть конецъ; такъ же естьли возмешь $q = \frac{-pt}{p+t}$, и слѣдственно $p + q = \frac{p^2}{p+t}$ и $(p + q)^m = p^{2m} (p + t)^{-m}$, то поставляя въ рядъ вмѣсто количества q его величину и раздѣляя на p^{2m}, найдешь $(p + t^{-m} = p^{-m} (1 - m.\frac{t}{p+t} + m.\frac{m-1}{2}(\frac{t}{p+t})^2 -$ и проч.); или полагая $-m = \mu$, получишь $(p + t)^\mu = p^\mu (1 + \mu\frac{t}{p+t}$ $+ \mu.\frac{\mu+1}{2}(\frac{t}{p+t})^2 + \mu.\frac{\mu+1}{2}.\frac{\mu+2}{3}(\frac{t}{p+t})^3 +$ и проч.), то есть другой рядъ, которой конецъ имѣть будетъ, когда μ есть цѣлое отрицательное число.

(93) Всякой рядъ, которой есть разложеніе функціи, долженъ быть приближающійся; или иначе ничего не изображаетъ. (*). Ежели онъ есть *восходящій* и x больше 1, то всегда

(*) Сіе мнѣніе г. Кузена, что *отдаляющіеся* или вообще противные приближающимся ряды ничего не изображаютъ, для меня кажется весьма основательнымъ, и оно можетъ избавить и читателя отъ многихъ странныхъ слѣдствій, которыя бы онъ безъ того не минуемо принять былъ долженъ. Такъ напримѣръ послѣ сего онъ смѣло можетъ отринуть слѣдующія уравненія $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 +$ и проч., $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$ и проч. $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +$ и проч., и многія другія симъ подобныя. Весьма бы для меня не трудно было показать, что и самое исчисленіе, изъ котораго вывели сіи странности, въ самомъ дѣлѣ совсѣмъ ихъ не даетъ, естьли бы я не боялся увеличить книгу чуждымъ для нея предметомъ.

отдаляется отъ истинной величины функцїи; тоже самое бываетъ, естьли x меньше 1, или количество дробное, и рядъ *нисходящїй*. Симъ именемъ называются ряды, у коихъ показатели количества x убываютъ. И такъ вопросъ о разложенiи функцiи въ рядъ долженъ быть предложенъ слѣдующимъ образомъ: найти ряды, восходящїй и нисходящїй, изображающїе величины функцiи, одинъ въ случаѣ количества x меньшаго 1, а другой въ случаѣ количества x большаго 1. И по сему я удовлетворилъ токмо первой части вопроса, сыскавъ для частнаго выраженiя $\frac{1 + 4x + x^2}{(1 - x)^4}$ сей одинъ рядъ $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 +$ и проч., который не можетъ быть приближающїйся въ случаѣ количества x большаго 1; но въ ономъ слѣдующїй рядъ $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{7}{x^4} + \frac{64}{x^5} +$ и проч. есть искомое частное.

Требуются ряды восходящїй и нисходящїй принадлежащїе дроби $\frac{h + ix}{m + nx + px^2}$. Я представлю ихъ, тотъ и другой, чрезъ рядъ $Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda + \mu} + Cx^{\lambda + 2\mu} + Dx^{\lambda + 3\mu} +$ и проч., въ которомъ какъ показатели, такъ и предстоящїе суть неопредѣленныя; и умноживъ на знаменатель дроби я получу тожественное уравненiе

$h + ix = mAx^{\lambda} + mBx^{\lambda + \mu} +$ и проч. $+ nAx^{\lambda + 1} + nBx^{\lambda + \mu + 1}$ $+$ и проч. $+ pAx^{\lambda + 2} + pBx^{\lambda + \mu + 2} +$ и проч.,

которое надлежитъ расположить въ разсужденiи равныхъ степеней отъ x; и какъ λ и μ суть неопредѣленныя, то можно сїе учинить многими образами. Я расположу сперва такъ:

$$mAx^{\lambda} + mBx^{\lambda + \mu} + mCx^{\lambda + 2\mu} + mDx^{\lambda + 3\mu} + \text{и проч.} = 0,$$
$$- h \quad + nAx^{\lambda + 1} + nBx^{\lambda + \mu + 1} + nCx^{\lambda + 2\mu + 1}$$
$$- ix \quad + pAx^{\lambda + 2} + pBx^{\lambda + \mu + 2}$$

что непосредственно требуетъ, чтобы было $\lambda = 0$, $\lambda + \mu = \lambda + 1 = 1$, и проч. Посему $\mu = 1$, и будешь имѣть рядъ восходящїй

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ и проч., въ которомъ $A = \frac{h}{m}$, $B = \frac{i}{m} - \frac{hn}{m^2}$, $C = \frac{hn^2}{m^3} - \frac{in}{m^2} - \frac{hp}{m^2}$, $D = \frac{2hnp}{m^3} + \frac{in^2}{m^3} - \frac{hn^3}{m^4} - \frac{ip}{m^2}$, и проч.

Располагая же симъ другимъ образомъ

$$\begin{array}{llll} pAx^{\lambda+2}+pBx^{\lambda+\mu+2} & +pCx^{\lambda+2\mu+2} & +pDx^{\lambda+3\mu+2} & + \text{и проч.} = 0, \\ -ix \quad +nAx^{\lambda+1} & +nBx^{\lambda+\mu+1} & +nCx^{\lambda+2\mu+1} & \\ \quad -h & +mAx^{\lambda} & +mBx^{\lambda+\mu} & \end{array}$$

найдешь $\lambda+2=1$, $\lambda+\mu+2=\lambda+1=0$, и такъ далѣе. Откуда выдешь $\lambda=-1$, $\mu=-1$, и будешь имѣть рядъ низходящій $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+$ и проч., въ которомъ $A=\frac{1}{p}$, $B=\frac{h}{p}-\frac{in}{p^2}$, $C=\frac{in^2}{p^3}-\frac{nh}{p^2}-\frac{im}{p^2}$, $D=\frac{2imn}{p^3}+\frac{hn^2}{p^3}-\frac{in^3}{p^4}-\frac{hm}{p^2}$, и проч.

Послѣ сихъ разположеній никакого инаго возможнаго уже не имѣется, сирѣчь сіи два токмо ряда могутъ быть взяты за частное предложеннаго выраженія.

(94) Требуется, найти всѣ ряды изображающіе корни уравненія $my^3-x^3y-mx^3=0$. Я положу $y=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda+\mu}+Cx^{\lambda+2\mu}+Dx^{\lambda+3\mu}+$ и проч. (*), и учинивъ вставливаніе, получу тожественное уравненіе $mA^3x^{3\lambda}+3mA^2Bx^{3\lambda+\mu}+$ и проч. $-Ax^{\lambda+3}-Bx^{\lambda+\mu+3}-$ и проч. $-mx^3=0$, которое надобно разположить въ разсужденіи равныхъ степеней отъ x. По причинѣ же неопредѣленныхъ показателей, я могу сіе сдѣлать различными образами. Вопервыхъ можно разположить сіе уравненіе, какъ въ слѣдующемъ:

$$\begin{array}{lllll} mA^3x^{3\lambda}+3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} & +3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} & +3mA^2Dx^{3\lambda+3\mu} & +3mA^2Ex^{3\lambda+4\mu} & + \text{и пр.} = 0; \\ & +3mAB^2 & +6mABC & +6mABD & \\ & & +mB^3 & +3mAC^2 & \\ & & & +3mB^2C & \\ -mx^3 - Ax^{\lambda+3} & -Bx^{\lambda+\mu+3} & -Cx^{\lambda+2\mu+3} & -Dx^{\lambda+3\mu+3} & \end{array}$$

(*) Сіе положеніе основано на томъ, что величина x, содержащаяся въ уравненіи $my^3-x^3y-mx^3=0$, или во всякомъ другомъ не заключающемъ въ себѣ трансцендентныхъ количествъ, есть непремѣнно нѣкая алгебраическая функція, какъ то явствуетъ изъ рѣшенія уравненій второй, третьей и четвертой степени, и что всякая функція, цѣлая дробная и радикальная, изображается чрезъ рядъ, у котораго показатели количества x находятся въ ариѳметической прогрессіи, какъ то явствуетъ изъ предъидущаго.

откуда найдешь $3\lambda = 3$ или $\lambda = 1$, $3\lambda + \mu = \mu + 3$ или $\mu = 1$; которыя величины количествъ λ и μ удовлетворяютъ и уравненіямъ $3\lambda + 2\mu = \lambda + \mu + 3$, $3\lambda + 3\mu = \lambda + 2\mu + 3$, и проч.; иначе бы разположеніе не могло имѣть мѣста. Потомъ найдешь $A^3 - 1 = 0$, или $A = 1$, $3mA^2B - A = 0$, или $B = \frac{1}{3m}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{81m^3}$, $E = \frac{1}{243m^4}$, и проч.

Второе разположеніе, какъ слѣдующее

$$\begin{array}{llllll} Ax^{\lambda+3} + & Bx^{\lambda+\mu+3} + & Cx^{\lambda+2\mu+3} + & Dx^{\lambda+3\mu+3} + & Ex^{\lambda+4\mu+3} + \text{и проч.} = 0; \\ +mx^3 & -mA^3x^{3\lambda} & -3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} & -3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} & -3mA^2Dx^{3\lambda+3\mu} \\ & & & -3mAB^2 & -6mABC \\ & & & & -mB^3 \end{array}$$

даетъ $\lambda = 0$, $\mu = -3$, и $A = -m$, $B = -m^4$, $C = -3m^7$, $D = -12m^{10}$, $E = -55m^{13}$, и проч.

Есть еще третій способъ разполагать тоже уравненіе, а именно:

$$\begin{array}{lllll} mA^3x^{3\lambda} + & 3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} + & 3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} + & 3mA^2Dx^{3\lambda+3\mu} + & 3mA^2E\,x^{3\lambda+4\mu} + \text{и пр.} = 0; \\ & & +3mAB^2 & +6mABC. & +6mABD \\ & & & +mB^3. & +mAC^2 \\ & & & & +3mB^2C \\ -Ax^{\lambda+3} - & Bx^{\lambda+\mu+3} - & Cx^{\lambda+2\mu+3} - & Dx^{\lambda+\mu+3} - & Ex^{\lambda+4\mu+3} \\ & -mx^3 & & & \end{array}$$

изъ сего новаго разположенія найдешь $3\lambda = \lambda + 3$, или $\lambda = \frac{3}{2}$, $3\lambda + \mu = \lambda + \mu + 3 = 3$, или $\mu = -\frac{3}{2}$, потомъ $mA^2 = 1$, или $A = \pm\frac{1}{\sqrt{m}}$, $B = \frac{m}{2}$, $C = \mp\frac{3m^3}{8\sqrt{m}}$, $D = \frac{m^4}{2}$, $E = \mp\frac{105m^6}{128\sqrt{m}}$, и проч.

И такъ будешь имѣть сіи четыре ряда

$$x + \frac{x^2}{3m} - \frac{x^4}{81m^3} + \frac{x^5}{243m^4} - \text{и проч.}$$

$$-m - \frac{m^4}{x^3} - \frac{3m^7}{x^6} - \frac{12m^{10}}{x^9} - \frac{55m^{13}}{x^{12}}, \text{ и проч.}$$

$$m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} - \frac{3}{8}m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{m^4}{2}x^{-3} - \frac{105}{128}m^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}}, \text{ и проч.}$$

$$-m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \frac{3}{8}m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{m^4}{2}x^{-3} + \frac{105}{128}m^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}}, \text{ и проч.},$$

кои суть толикомногія величины количества y найденныя изъ

уравненія $my^3 - a^3y - mx^3 = 0$. Я предложу еще, найти всѣ ряды изображающіе величины количества y содержащагося въ уравненіи $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$. Да будетъ всегда $y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+\mu} +$ и проч.; откуда найдешь тожественное уравненіе $A^3x^{3\lambda} + 3A^2Bx^{3\lambda+\mu} +$ и проч. $- a^2Ax^\lambda - a^2Bx^{\lambda+\mu} -$ и проч. $- aAx^{\lambda+1} - aBx^{\lambda+\mu+1} -$ и проч. $- x^3 = 0$.

Разположивъ сіе уравненіе слѣдующимъ образомъ

$$\begin{array}{llllll} A^3x^{3\lambda} & +3A^2Bx^{3\lambda+\mu} & +3A^2Cx^{3\lambda+2\mu} & +3A^2Dx^{3\lambda+3\mu} & +3A^2Ex^{3\lambda+4\mu} & + \text{и проч.} = 0, \\ & +3AB^2 & +6ABC & +6ABD & & \\ & & +B^3 & +3AC^2 & & \\ & & & +3B^2C & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} -x^3 & +aAx^{\lambda+1} & +aBx^{\lambda+\mu+1} & +aCx^{\lambda+2\mu+1} & aDx^{\lambda+3\mu+1} \\ & -a^2Ax^\lambda & -a^2Bx^{\lambda+\mu} & -a^2Cx^{\lambda+2\mu} & \end{array}$$

получишь $3\lambda = 3$, или $\lambda = 1$, $3\lambda + \mu = \lambda + 1$, или $\mu = -1$; и поелику сіи величины количествъ λ и μ удовлетворяютъ уравненіямъ $3\lambda + 2\mu = \lambda + \mu + 1 = \lambda$ и посему такъ же и слѣдующимъ, то явствуетъ, что оное разположеніе мѣсто имѣть можетъ, и изъ него найдется $A^3 = 1$, или $A = 1$, $B = -\frac{a}{3}$, $C = \frac{a^2}{9}$, $D = \frac{a^3}{81}$, $E = -\frac{8a^4}{243}$, и проч.

разположивъ тоже самое уравненіе симъ другимъ образомъ

$$\begin{array}{llllll} a^2Ax^\lambda & +a^2Bx^{\lambda+\mu} & + \ldots & +a^2Gx^{\lambda+6\mu} & +a^2Hx^{\lambda+7\mu} & + \text{и пр.} = 0, \\ -x^3 & -aAx^{\lambda+1} & - \ldots & -aFx^{\lambda+5\mu+1} & -aGx^{\lambda+6\mu+1} & \\ & & & -A^3x^{3\lambda} & -3A^2Bx^{3\lambda+\mu} & \end{array}$$

получишь $\lambda = 3$, $\lambda + \mu = \lambda + 1$, ... $\lambda + 6\mu = \lambda + 5\mu + 1 = 3\lambda$, $\lambda + 7\mu = \lambda + 6\mu + 1 = 3\lambda + \mu$, и проч., которымъ уравненіямъ удовлетворишь, взявъ $\lambda = 3$, $\mu = 1$; и посему оное второе разположеніе имѣть мѣсто можетъ, и изъ него получится $A = \frac{-1}{a^2}$, $B = \frac{-1}{a^3}$, $C = \frac{-1}{a^4}$, $D = \frac{-1}{a^5}$, $E = \frac{-1}{a^6}$, $F = \frac{-1}{a^7}$, $G = \frac{-1}{a^8}$, $H = \frac{-1}{a^9}$, и проч.

Тоже самое уравненіе подлежитъ сему третьему разположенію

$$A^3x^{3\lambda}+3A^2Bx^{3\lambda+\mu}+3A^2Cx^{3\lambda+2\mu}+3A^2Dx^{3\lambda+3\mu}+3A^2Ex^{3\lambda+4\mu}+\text{и проч.}=0,$$
$$+3AB^2 \quad +6ABC \quad +6ABD$$
$$B^3 \quad +3AC^2$$
$$+3B^2C$$
$$-a^2Ax^{\lambda}-a^2Bx^{\lambda+\mu}-a^2Cx^{\lambda+2\mu}-a^2Dx^{\lambda+3\mu}-a^2Ex^{\lambda+4\mu}$$
$$+aAx^{\lambda+1}+aBx^{\lambda+\mu+1}+aCx^{\lambda+2\mu+1}+aDx^{\lambda+3\mu+1}$$
$$-x^3.$$

понеже величины количествъ $\lambda=0$ и $\mu=1$, найденныя изъ уравненій $3\lambda=\lambda$, $3\lambda+\mu=\lambda+\mu=\lambda+1$, удовлетворяютъ уравненіямъ $3\lambda+2\mu=\lambda+2\mu=\lambda+\mu+1$, $3\lambda+3\mu=\lambda+3\mu=\lambda+2\mu+1=3$, и проч. Изъ онаго разположенія сыщется $A^2=a^2$, или $A=\pm a$, $B=\mp\frac{1}{2}$, $C=\pm\frac{1}{8a}$, $D=\frac{7}{16a^2}$ и $D=\frac{9}{91a^2}$, $E=\frac{59}{128a^3}$ и $E=\frac{69}{128a^3}$, и проч.

И такъ будешь имѣть четыре ряда

$$x-\frac{a}{3}+\frac{a^2}{3x}+\frac{a^3}{81x^2}-\frac{8a^4}{243x^3}, \text{ и проч.}$$
$$-\frac{x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}-\ldots-\frac{2x^9}{a^8}-\frac{5x^{10}}{a^9}, \text{ и проч.}$$
$$a-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8a}+\frac{7x^3}{16a^2}+\frac{59x^4}{128a^3}, \text{ и проч.}$$
$$-a+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8a}+\frac{9x^3}{16a^2}+\frac{69x^4}{128a^3}, \text{ и проч.},$$

изъ коихъ одинъ токмо низходящій. (*)

(*) Сей способъ находить ряды, кои бы выражали корни алгебраическихъ уравненій между двумя неизвѣстными количествами, и коихъ видъ не извѣстенъ и даже съ трудомъ найденъ быть можетъ, кажется принадлежитъ собственно г. Кузену, и съ пользою замѣняетъ изобрѣтенный на сей конецъ Ньютономъ *аналитической параллелограммъ*, сіе замысловатое орудіе, такъ сказать, которое г. де Гюа въ послѣдствіи обратилъ въ *треугольникъ*.

О рядахъ возвращающихся.

(95) Моавръ назвалъ *возвращающимся рядомъ* тотъ, у котораго какое нибудь предстоящее равно нѣкоторому числу предъидущихъ предстоящихъ, изъ коихъ каждое умножено на количество постоянное, и наименовалъ *размѣромъ отношенія* совокупленіе постоянныхъ количествъ служащихъ къ образованію ряда. И такъ (въ 93 член.) рядъ $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ + и проч., въ которомъ предстоящія A, B, C, D, и проч. имѣютъ между собою отношенія изображенныя чрезъ уравненія $mA - h = o$, $mB + nA - i = o$, $mC + nB + pA = o$, $mD + nC + pB = o$, и проч., есть возвращающійся имѣющій размѣромъ отношенія количество $-\frac{n}{m} - \frac{p}{m}$ (*). Сей рядъ есть частное происшедшее отъ раздѣленія числителя соизмѣримой дроби $\frac{h + ix}{m + nx + px^2}$ на ея знаменатель; и тоже самое примѣчать надлежитъ о всякомъ другомъ рядѣ, которой есть разложеніе какой нибудь соизмѣримой функціи [то есть, что онъ есть возвращающійся, имѣющій нѣкоторое количество размѣромъ отношенія]. Положивъ сіе, требуется найти общій членъ какого нибудь возвращающагося ряда представленнаго чрезъ

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{и проч. ?}$$

(*) Что бы получить яснѣйшее о семъ размѣрѣ отношенія понятіе, мы замѣтимъ; что нашедъ $A = \frac{h}{m}$ и $B = \frac{i}{m} - \frac{hn}{m^2}$, сыщешь другія предстоящія слѣдующимъ образомъ: $C = B\left(-\frac{n}{m}\right) + A\left(-\frac{p}{m}\right)$, $D = C\left(-\frac{n}{m}\right) + B\left(-\frac{p}{m}\right)$, $E = D\left(-\frac{n}{m}\right) + C\left(-\frac{p}{m}\right)$, и такъ далѣе.

Поелику соизмѣримая функція, изъ которой оный произходитъ, можетъ разрѣшена быть на простыя дроби, изъ коихъ каждая даетъ рядъ возвращающійся; то, естьли изобразимъ сіи ряды чрезъ $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ и проч., $a'+b'x+c'x^2+d'x^3+e'x^4$ + и проч., $a''+b''x+c''x^2+d''x^3+e''x^4+$ и проч., и проч., мы будемъ имѣть $A=a+a'+a''+$ и проч., $B=b+b'+b''+$ и проч., $C=c+c'+c''+$ и проч. . . . . . . $T=t+t'+t''+$ и проч., и проч.; сирѣчь какой ниесть членъ μ предложеннаго ряда будетъ равенъ суммѣ всѣхъ членовъ μ частныхъ рядовъ. Напримѣръ пусть будетъ рядъ $1-6x+12x^2-48x^3+120x^4-$ и проч., которой есть разложеніе соизмѣримой дроби $\frac{1-5x}{1+x-6x^2}=\frac{1}{5}\left(\frac{8}{1+3x}-\frac{3}{1-2x}\right)$; то поелику $\frac{1}{1+3x}=1-3x+9x^2-27x^3+$ и проч., гдѣ предстоящее члена $\mu=\pm(3)^{\mu-1}$, и $\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+$ и проч., гдѣ предстоящее члена $\mu=2^{\mu-1}$, должно выдти, естьли T будетъ предстоящее члена μ предложеннаго ряда,

$$T=\pm\frac{8}{5}3^{\mu-1}-\frac{3}{5}2^{\mu-1},$$

гдѣ придается первому члену величины предстоящаго T знакъ —, когда μ будетъ число четное, и +, когда нечетное. И такъ вопросъ состоитъ: 1) въ найденіи соизмѣримой дроби, которой, предложенной рядъ есть разложеніе, 2) въ разрѣшеніи сей соизмѣримой дроби на дроби простыя, какъ то выше мы показали, 3) въ разложеніи оныхъ простыхъ дробей въ ряды и 4) въ сысканіи общаго члена каждаго изъ сихъ рядовъ; сумма всѣхъ оныхъ общихъ членовъ будетъ общій членъ предложеннаго ряда.

(96) Всякая двухчленная дѣйствительная дробь можетъ быть представлена чрезъ $\frac{h}{1-ix}$, коя разложенная даетъ рядъ $h+hix+hi^2x^2+$ и проч., которой общимъ членомъ имѣетъ $h(ix)^{\mu-1}$. Такъ же удобно найдется и общій членъ ряда, которой есть разложеніе дроби $\frac{h}{(1-ix)^n}$; ибо, когда

$(1 + ix + i^2x^2 +$ и проч.$)^n = 1 + nix + (n + n.\frac{n-1}{2})i^2x^2 + (n\,n.\frac{n-1}{2}.2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3})i^3x^3 +$ и проч. $= 1 + nix + n.\frac{n+1}{2}i^2x^2 + n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}i^3x^3 +$ и проч.; то рядъ, о которомъ настоитъ дѣло, имѣетъ общимъ членомъ выраженіе $hn.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3} \ldots \ldots \frac{n+\mu-2}{\mu-1}(ix)^{\mu-1}$. Мы возмемъ для примѣра рядъ $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 +$ и проч., которой происходитъ отъ дроби $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$. Поелику $\frac{6}{(1-x)^4} = 6(1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 +$ и проч.$)$, которой рядъ имѣетъ общимъ членомъ $\mu(\mu+1)(\mu+2)x^{\mu-1}$, $\frac{6}{(1-x)^3} = 6(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 +$ и проч.$)$, которой рядъ имѣетъ общимъ членомъ $3\mu(\mu+1)x^{\mu-1}$, и $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 +$ и проч., которой рядъ имѣетъ общимъ членомъ $\mu x^{\mu-1}$; то рядъ $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 +$ и проч. имѣетъ общимъ членомъ $(\mu.\mu+1.\mu+2 - 3\mu.\mu+1 + \mu)x^{\mu-1} = \mu^3x^{\mu-1}$; что въ прочемъ само собою явствуетъ.

(97) Требуется найти общій членъ ряда происходящаго отъ разложенія трехчленной дроби $\frac{m+nx}{1-2qx\cos\beta+q^2x^2}$? Положивъ для краткости $\cos\beta + \sin\beta\sqrt{-1} = K$ и $\cos\beta - \sin\beta\sqrt{-1} = K'$, найдешь

$$\frac{m+nx}{1-2qx\cos\beta+q^2x^2} = \frac{-1}{2q\sin\beta\sqrt{-1}}\left(\frac{mq+nK}{K-qx} - \frac{mq+nK'}{K'-qx}\right)$$

[Ибо чрезъ сіе положеніе сдѣлается $1 - 2qx\cos\beta + q^2x^2 = (K - qx)(K' - qx)$, и положивъ $\frac{m+nx}{1-2qx\cos\beta+q^2x^2} = \frac{A}{K-qx} + \frac{B}{K'-qx}$, найдется $A = \frac{mq+nK}{K'q-Kq} = \frac{-1}{2q\sin\beta\sqrt{-1}}.(mq+nK)$ и $B = \frac{mq+nK'}{Kq-K'q} = \frac{1}{2q\sin\beta\sqrt{-1}}.(mq+nK')$].

Но ряды, которые произойдутъ отъ двухъ двучленныхъ дробей $\frac{mq+nK}{K-qx}$ и $\frac{mq+nK'}{K'-qx}$ имѣютъ общими членами

$$\frac{mq+nK}{K}\left(\frac{qx}{K}\right)^{\mu-1} \text{ и } \frac{mq+nK'}{K'}\left(\frac{qx}{K'}\right)^{\mu-1}$$

[ибо по причинѣ что дроби $\frac{mq+nK}{K-qx}$ и $\frac{mq+nK'}{K'-qx}$ равны $\frac{\frac{mq+nK'}{K}}{1-\frac{qx}{K}}$ и $\frac{\frac{mq+nK'}{K}}{1-\frac{qx}{K'}}$, для 95 и и 96 членовъ будетъ, и проч.]; слѣдовательно искомый общій членъ будетъ

$$\frac{-1}{2q\sqrt{-1}\sin\beta}\left(\frac{mq+nK}{K^{\mu}}-\frac{mq+nK'}{K'^{\mu}}\right)(qx)^{\mu-1},$$

которой, по причинѣ что $KK'=1$, $K^{\mu}-K'^{\mu}=2\sqrt{-1}\sin\mu\beta$, $K^{\mu-1}-K'^{\mu-1}=2\sqrt{-1}\sin(\mu-1)\beta$, сдѣлается [для члена 78]

$$\frac{mq\sin\mu\beta-n\sin(\mu-1)\beta}{q\sin\beta}(qx)^{\mu-1}.$$

Займемся теперь изысканіемъ общаго члена ряда, которой произойдетъ отъ разложенія дроби

$$\frac{m+rx}{(1-2qx\cos\beta+q^2x^2)^{\lambda}}.$$

(98) Сія дробь разрѣшенная на простыя свои дроби, даетъ

$$\frac{A}{(K-qx)^{\lambda}}+\frac{B}{(K-qx)^{\lambda-1}}+\dots\dots\dots+\frac{H}{K-qx}+$$
$$\frac{A'}{(K'-qx)^{\lambda}}+\frac{B'}{(K'-qx)^{\lambda-1}}+\dots\dots\dots+\frac{H'}{K'-qx};$$

но рядъ происходящій отъ разложенія дробей $\frac{A}{(K-qx)^{\lambda}}+\frac{A'}{(K'-qx)^{\lambda}}$ имѣетъ общимъ членомъ количество $\lambda.\frac{\lambda+1}{2}.\frac{\lambda+2}{3}.\frac{\lambda+3}{4}\dots\dots\dots\frac{\lambda+\mu-2}{\mu-1}(qx)^{\mu-1}$, умноженное на $AK^{-\lambda-\mu+1}+A'K'^{-\lambda-\mu+1}=AK'^{\lambda+\mu-1}+A'K^{\lambda+\mu-1}$, по причинѣ что $KK'=1$ (*); слѣдовательно рядъ происходящій отъ

(*) Ибо, по причинѣ что дроби $\frac{A}{(K-qx)^{\lambda}}$ и $\frac{A}{(K'-qx)^{\lambda}}$ равны $\frac{\frac{1}{K^{\lambda}}.A}{\left(1-\frac{qx}{K}\right)^{\lambda}}$ и $\frac{\frac{1}{K'^{\lambda}}.A'}{\left(1-\frac{qx}{K'}\right)^{\lambda}}$, для 96го члена будетъ общій членъ ряда первой дро-

разложенія дроби $\frac{m+nx}{(1-2qx\,\text{cos}.\varphi+q^2x^2)^\lambda}$ будетъ имѣть общимъ членомъ

$$\left((AK'^{\lambda+\mu-1}+A'K^{\lambda+\mu+1})\left(\lambda.\frac{\lambda+1}{2}.\frac{\lambda+2}{3}\,\ldots\ldots\,\frac{\lambda+\mu-2}{\mu-1}\right)+\right.$$
$$(BK'^{\lambda+\mu-2}+B'K^{\lambda+\mu-2})\left(\overline{\lambda-1}.\frac{\lambda}{2}.\frac{\lambda+1}{3}\,\ldots\ldots\,\frac{\lambda+\mu-3}{\mu-1}\right)+$$
$$(CK'^{\lambda+\mu-3}+C'K^{\lambda+\mu-3})\left(\overline{\lambda-2}.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda}{3}\,\ldots\ldots\,\frac{\lambda+\mu-4}{\mu-1}\right)+$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+HK'^{\mu}+H'K^{\mu}\right)(qx)^{\mu-1}.$$

Когда $\lambda=2$, сіе количество сдѣлается

$$((AK'^{\mu+1}+A'K^{\mu+1})\mu+BK'^{\mu}+B'K^{\mu})(qx)^{\mu-1};$$

И поелику $\frac{m+nx}{(1-2qx\,\text{cos}.\varphi+q^2x^2)^2}\left[=\frac{A}{(K-qx)^2}+\frac{B}{K-qx}+\frac{A'}{(K'-qx)^2}+\frac{B'}{K'-qx}\right]=\frac{A+BK-Bqx}{(K-qx)^2}+\frac{A'+B'K'-B'qx}{(K'-qx)^2}$; то приведши сіи дроби къ одному знаменателю, получишь тожественное уравненіе (*).

би $=\frac{A}{K^\lambda}.\lambda.\frac{\lambda+1}{2}.\frac{\lambda+2}{3}\ldots\ldots\frac{\lambda+\mu-2}{\mu-1}.\frac{(qx)^{\mu-1}}{K^{\mu-1}}$, и общій членъ ряда второй дроби $=\frac{A'\lambda}{K'^\lambda}.\frac{\lambda+1}{2}.\frac{\lambda+2}{3}\ldots\frac{\lambda+\mu-2}{\mu-1}.\frac{(qx)^{\mu-1}}{K'^{\mu-1}}$, и слѣдственно общій членъ ряда суммы ихъ $=$

$$\left(\lambda.\frac{\lambda+1}{2}.\frac{\lambda+2}{3}\ldots\frac{\lambda+\mu-2}{\mu-1}\right)(qx)^{\mu-1}.\left(\frac{A}{K^{\lambda+\mu-1}}+\frac{A'}{K'^{\lambda+\mu-1}}\right)=$$
$$\left(\lambda.\frac{\lambda+1}{2}.\frac{\lambda+2}{3}\ldots\frac{\lambda+\mu-2}{\mu-1}\right)(qx)^{\mu-1}.(AK'^{\lambda+\mu-1}+A'K^{\lambda+\mu-1}),$$

понеже $K.K'=1$.

(*) Чтобы облегчить трудъ читателя, я здѣсь предложу сіе тожественное уравненіе со всѣми изъ него происходящими слѣдствіями.

$$\left.\begin{array}{llll}
AK'^2+BKK'^2 & -BK'^2.qx & +2BK'.q^2.x^2 & -B.q^3.x^3 \\
 & -2AK' & +A & \ldots\ldots\ldots \\
 & -2BKK' & +BK & \\
A'K^2+B'K'K^2 & -B'K^2 & +2B'K & -B' \\
 & -2A'K & +A' & \\
 & -2B'K'K & +B'K'. & \\
-m & -n.x & &
\end{array}\right\}=0,$$

изъ котораго удобно извлечешь
$B' = -B$, $A + A' = B(K - K')$, $2(AK' + A'K) - B(K^2 - K'^2) = -n$,
$AK'^2 + AK^2 - B(K - K') = m$; откуда выдетъ
$$A = \frac{m + nK}{(K - K')^2},\ A' = \frac{m + nK'}{(K - K')^2},\ B = \frac{A + A'}{K - K'},\ B' = -B.$$

---

1) $-B - B' = 0$, 2) $2BK' + A + BK + 2B'K + A' + B'K' = 0$,
3) $(BK'^2 + 2AK' + 2BKK' + B'K^2 + 2A'K + 2B'K'K)q + n = 0$,
4) $AK'^2 + A'K^2 + BKK'^2 + B'K'K^2 - m = 0$; откуда выдетъ 1) $B' = -B$,
2) $A + A' = B(K - K')$, 3) $2(AK' + A'K) - B(K^2 - K'^2) = -\frac{n}{q}$,
4) $AK'^2 + A'K^2 - B(K - K') = m$, по причинѣ что $KK' = 1$. Вмѣсто количества B поставивъ его величину $\frac{A + A'}{K - K'}$, взятую изъ втораго уравненія, въ послѣднія два, получишь

$2(AK' + A'K) - (A + A')(K + K') = -\frac{n}{q}$ $AK'^2 + A'K^2 - A - A' = m$;
умноживъ на K, будетъ

$A + A'K^2 - AK^2 + A = -\frac{nK}{q}$, и вычтя сіе изъ послѣдняго уравненія, выдетъ

$AK^2 - 2A + AK'^2 = m + \frac{nK}{q}$, или $AK^2 - 2AKK' + AK'^2 = m + \frac{nK}{q}$,

откуда найдется $A = \frac{m + \frac{nK}{q}}{(K - K')^2} = \frac{mq + nK}{q(K - K')^2}$; такъ же сыщется $A' = \frac{m + \frac{nK'}{q}}{(K - K')^2} = \frac{mq + nK'}{q(K - K')^2}$.

Изъ чего явствуетъ, что авторъ въ своемъ вычисленіи ошибся. И по сему въ послѣдствіи вмѣсто найденнаго имъ выдетъ:

1) $AK'^{\mu+1} + A'K^{\mu+1} = \frac{mq + n}{q(2\sin.\beta\sqrt{-1})^2}(\cos.(\mu+1)\beta - \sin.(\mu+1)\beta\sqrt{-1})$
$+ \frac{mq + nK'}{q(2\sin.\beta\sqrt{-1})^2}.(\cos.(\mu+1)\beta + \sin.(\mu+1)\beta\sqrt{-1}) =$
$\frac{mq + n(\cos.\beta + \sin.\beta\sqrt{-1})}{-4q\sin.\beta^2}.(\cos.(\mu+1)\beta - \sin.(\mu+1)\beta\sqrt{-1})$
$+ \frac{mq + n(\cos.\beta - \sin.\beta\sqrt{-1})}{-4q\sin.\beta^2}.(\cos.(\mu+1)\beta - \sin.(\mu+1)\beta\sqrt{-1}) =$
$\frac{2mq.\cos.(\mu+1)\beta + n(2\cos.(\mu+1)\beta.\cos.\beta + 2\sin.(\mu+1)\beta\sin.\beta)}{-4q\sin.\beta^2} =$
$\frac{mq\cos.(\mu+1)\beta + n.\cos.((\mu+1)\beta - \beta)}{-2q\sin.\beta^2} = \frac{mq\cos.(\mu+1)\beta + n\cos.\mu\beta}{-2q\sin.\beta^2}$.

И такъ въ случаѣ показателя $\lambda = 2$, найдется $AK'^{\mu+1} + A'K^{\mu+1} = \frac{m\cos.(\mu+1)\beta + n.\cos.\mu\beta}{-2\sin.\beta^3}$, $BK'^{\mu} + B'K^{\mu} = \frac{m\sin.\mu\beta + n\cos.\beta\sin.\mu\beta}{2\sin.\beta^3}$, и искомый общій членъ ряда будетъ =

$$\left(-\mu.\frac{m\cos.(\mu+1)\beta + n\cos.\mu\beta}{2\sin.\beta^3} + \frac{m+n\cos.\beta}{2\sin.\beta^3}\sin.\mu\beta\right)(qx)^{\mu-1}.$$

(96) Теперь остается токмо разрѣшить сію часть вопроса: по данному возвращающемуся ряду, найти соизмѣримую дробь, которой онъ есть разложеніе? Естьли возвращающійся рядъ представится чрезъ $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ и проч. и взаимное отношеніе между предстоящими онаго дано будетъ чрезъ посредство уравненія $mT + nS + pR + qQ + rP +$ и проч. $= 0$, то дробь, которой онъ есть разложеніе, знаменателемъ будетъ имѣть $m + nx + px^2 + qx^3 + rx^4 +$ и проч., и естьли числитель сея дроби изобразится чрезъ $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ и проч., то сверьхъ того будетъ

$a = mA, b = nA + mB, c = pA + nB + mC, d = qA + pB + nC + mD$, и проч. [зри членъ 95].

Я возьму для примѣра рядъ $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 +$ и проч., въ которомъ имѣетъ $T - 4S + 6R - 4Q + P = 0$. Въ семъ случаѣ знаменатель дроби будетъ $1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1 - x)^4$; по томъ найдется $a = 1$, $b = -4 + 8 = 4$,

---

2) Понеже $B = \frac{A + A'}{K - K'} = \frac{mq + nK}{q(K - K')^2} + \frac{mq + nK'}{q(K - K')^2} : K - K' = \frac{2mq + n(K + K')}{q(K - K')^3} = \frac{mq + n.\cos.\beta}{-4q\sin.\beta^3\sqrt{-1}}$, и $B' = -B = -\frac{mq + n\cos.\beta}{-4q\sin.\beta^3\sqrt{-1}}$, то будетъ $BK'^{\mu} + B'K^{\mu} = \frac{mq + n.\cos.\beta}{-4q\sin.\beta^3\sqrt{-1}}(\cos.\mu\beta - \sin.\mu\beta\sqrt{-1}) - \frac{mq + n\cos.\beta}{-4q\sin.\beta^3\sqrt{-1}}.(\cos.\mu\beta + \sin.\mu\beta\sqrt{-1}) = \frac{-2mq\sin.\mu\beta\sqrt{-1} - 2n\cos.\beta\sin.\mu\beta\sqrt{-1}}{-4q\sin.\beta^3.\sqrt{-1}} = \frac{mq\sin.\mu\beta + n\cos.\beta\sin.\mu\beta}{2q\sin.\beta^3}$.

3) Наконецъ искомый общій членъ ряда $((AK'^{\mu+1} + A'K^{\mu+1})\mu + BK'^{\mu} + B'K'^{\mu})(qx)^{\mu-1} =$

$$\left(-\mu\frac{mq\cos.(\mu+1)\beta + n.\cos.\mu\beta}{2q\sin.\beta^3} + \frac{mq + n\cos.\beta}{2q\sin.\beta^3}\sin.\mu\beta\right)(qx)^{\mu-1}.$$

$c = 6 - 32 + 27 = 1$, $d = -4 + 48 - 108 + 64 = 0$, и слѣдственно числитель дроби, коея рядъ $1 + 8x + 27x^2 +$ и проч. есть разложенiе, будетъ $1 + 4x + x^2$. Возмемъ для другаго примѣра рядъ $1 - 6x + 12x^2 - 48x^3 + 120x^4 -$ и проч. относительно коего имѣешь $T + S - 6R = 0$. Знаменатель дроби будетъ $1 + x - 6x^2$; потомъ найдется $a = 1$, $b = -6 + 1 = -5$, $c = -6 - 6 + 12 = 0$, и оная дробь, которой рядъ есть разложенiе, будетъ $\frac{1 - 5x}{1 + x - 6x^2}$.

О способѣ обращать функцiи, заключающiя въ себѣ несоизмѣримыя количества, въ соизмѣримыя.

(100) Предлагается сдѣлать соизмѣримою формулу $\sqrt{a+bx+cx^2}$. Вопервыхъ естьли множители количества $a+bx+cx^2$ не равны между собою, но дѣйствительные, каковы суть $e+fx$, $g+hx$; то положи $(e+fx)(g+hx)=(e+fx)^2z^2$; откуда удобно найдется $x=\frac{ez^2-g}{h-fz^2}$ и $\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{(he-fg)z}{h-fz^2}$. Во вторыхъ естьли оные множители суть мнимые, то придай тричленному количеству $a+bx+cx^2$ слѣдующiй видъ $p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2$, и положивъ сiе количество въ ономъ видѣ равнымъ $(pz+qx)^2$; будешь имѣть $x=\frac{p(1-z^2)}{2q(z-\cos.\beta)}$, и потомъ $\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{p(z^2+1-2pz^2\cos.\beta)}{2(z-\cos.\beta)}$. Ясно видно, что чрезъ посредство тѣхъ же самыхъ вставливанiй сдѣлается соизмѣримою всякая формула заключающая въ себѣ несоизмѣримыя количества токмо сего вида $\sqrt{a+bx+cx^2}$. И посему всегда можно сдѣлать соизмѣримою формулу $Kz^{ir}(n+pz^r+qz^{2r})^{\frac{s}{2}}$, естьли i и s суть цѣлыя положительныя или отрицательныя числа. Ибо положивъ $z^r=x$, сiя формула сдѣлается $Kx^i(n+px+qx^2)^{\frac{s}{2}}$, которая не можетъ заключать въ себѣ инаго несоизмѣримаго количества, какъ токмо $\sqrt{n+px+qx^2}$.

(101) Требуются случаи, въ коихъ возможно сдѣлать соизмѣримою формулу $Kx^m(p+qx^r)^s$? Ежели s есть какое нибудь цѣлое число или нуль, то довлѣетъ токмо x уравнять y^μ, полагая μ общимъ знаменателемъ двухъ показателей m и r. Но ежели s есть число дробное $\frac{\sigma}{\rho}$ и вопросъ состоитъ въ сдѣланiи соизмѣримою формулы $Kx^m(p+qx^r)^{\frac{\sigma}{\rho}}$, то положи $p+qx^r=u^\rho$; изъ чего найдешь $(p+qx^r)^{\frac{\sigma}{\rho}}=u^\sigma$, $x=\left(\frac{u^\rho-p}{q}\right)^{\frac{1}{r}}$, $Kx^m(p+qx^r)^{\frac{\sigma}{\rho}}=Ku^\sigma\left(\frac{u^\rho-p}{q}\right)^{\frac{m}{r}}$, которая формула всегда будетъ соизмѣримая, когда $\frac{m}{r}$ будетъ какое нибудь цѣлое число или нуль. Я придамъ той же самой формулѣ слѣдующiй видъ

$Kx^{m+\frac{\sigma r}{\varrho}}(px^{-r}+q)^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, и положу $px^{-r}+q=u^{\varrho}$; изъ чего я получу $(px^{-r}+q)^{\frac{\sigma}{\varrho}}=u^{\sigma}$, $x=\left(\frac{p}{u^{\varrho}-q}\right)^{\frac{1}{r}}$, $Kx^{m+\frac{\sigma r}{\varrho}}(px^{-r}+q)^{\frac{\sigma}{\varrho}}=Ku^{\sigma}\left(\frac{p}{u^{\varrho}-q}\right)^{\frac{m}{r}+\frac{\sigma}{\varrho}}$, которая формула будетъ соизмѣримая, когда $\frac{m}{r}+\frac{\sigma}{\varrho}$ будетъ какое нибудь цѣлое число, или нуль. И такъ имѣются два вставливанія, способныя учинить формулу $Kx^{m}(p+qx^{r})^{\frac{\sigma}{\varrho}}$ соизмѣримою. Когда $\frac{m}{r}$ будетъ какое нибудь цѣлое число или нуль, тогда надлежитъ положить $p+qx^{r}=u^{\varrho}$; посему въ случаѣ формулы $Kx^{6}\sqrt[3]{p+qx^{3}}$ надлежитъ положить $p+qx^{3}=u^{3}$; изъ чего получишь $\sqrt[3]{p+qx^{3}}=u$, $x=\sqrt[3]{\frac{u^{3}-p}{q}}$ и $Kx^{6}\sqrt[3]{p+qx^{3}}=Ku\left(\frac{u^{3}-p}{q}\right)^{2}$, которая формула есть соизмѣримая. Но естьли дана будетъ формула $Kx^{5}\sqrt{p+qx^{2}}$, то положи $p+qx^{2}=u^{2}x^{2}$; изъ чего найдется $\sqrt{p+qx^{2}}=ux$, $x^{2}=\frac{p}{u^{2}-q}$ и $Kx^{5}\sqrt{p+qx^{2}}$ $[=Kx^{5}.ux]=Kx^{6}u=Ku\left(\frac{p}{u^{2}-q}\right)^{3}$, которая формула есть соизмѣримая.

(102) Естьли предложится формула $Kx^{m}\left(\frac{p+qx^{r}}{p'+q'x^{r}}\right)^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, то положи $\frac{p+qx^{r}}{p'+q'x^{r}}=u^{\varrho}$; изъ чего получишь $\left(\frac{p+qx^{r}}{p'+qx^{r}}\right)^{\frac{\sigma}{\varrho}}=u^{\sigma}$; $x=\left(\frac{p'u^{\varrho}-p}{q-q'u^{\varrho}}\right)^{\frac{1}{r}}$ и $Kx^{m}\left(\frac{p+qx^{r}}{p'+qx^{r}}\right)^{\frac{\sigma}{\varrho}}=Ku^{\sigma}\left(\frac{p'u^{\varrho}-p}{q-q'u^{\varrho}}\right)^{\frac{m}{r}}$, которая формула всегда будетъ соизмѣримая, когда $\frac{m}{r}$ будетъ какое нибудь цѣлое число или нуль. Между вставливаніями способными учинить функцію содержащую въ себѣ несоизмѣримыя количества, соизмѣримою, бываютъ такія, кои ведутъ къ простѣйшимъ слѣдствіямъ, нежели другія. Напримѣръ, естьли я положу $\sqrt{p+qx^{2}}=u+x\sqrt{q}$, то получивъ $x=\frac{p-u^{2}}{2u\sqrt{q}}$ и $\sqrt{p+qx^{2}}=\frac{p+u^{2}}{2u}$, я нахожу $Kx^{5}\sqrt{p+qx^{2}}=K.\frac{p+u^{2}}{2u}\left(\frac{p-u^{2}}{2u\sqrt{q}}\right)^{5}$. Но ничего довольно общаго о семъ родѣ преобразованія предложить не можно.

О функціяхъ заключающихъ въ себѣ многія перемѣнныя количества.

(103) Простѣйшія изъ сихъ функцій суть функціи *однородныя*. Называются такъ функціи, у которыхъ сумма размѣреній перемѣнныхъ количествъ во всѣхъ членахъ есть одинакова. И такъ цѣлая функція $x^3 + ax^2y + bxy^2$ есть однородная, и число размѣреній каждаго ея члена есть 3; равнымъ образомъ функція $\frac{x^3 + ax^2y + by^2\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{xy + y^2}}$ есть такъ же однородная, и число размѣреній ея есть 2, которое получается, отнимая число размѣреній знаменателя отъ числа размѣреній числителя. Когда число размѣреній числителя равно числу размѣреній знаменателя, тогда говорится, что функція есть *размѣренія нуля*; такова функція есть $\frac{gx^2 + nxy}{xy + ny^2}$. Естьли число размѣреній числителя меньше числа размѣреній знаменателя, то число размѣреній функціи будетъ отрицательное; такъ $\frac{\sqrt{x + y}}{x^3y^3}$ есть однородная функція, коея число размѣреній $-\frac{11}{2}$. Для уразумѣнія предложенія [которое при семъ представляется] ничего болѣе не требуется, какъ токмо изъясненія, въ чемъ оно состоитъ; сирѣчь, естьли въ однородной функціи двухъ перемѣнныхъ количествъ x и y размѣренія n положится $\frac{y}{x} = q$, то она перемѣнится въ функцію сего вида Qx^n, гдѣ Q есть функція количества q и постоянныхъ входящихъ въ предложенную функцію. И такъ чрезъ сіе вставливаніе четыре однородныя функціи, выше сего для примѣра нами взятыя, перемѣнятся въ сіи

$$(1 + aq + bq^2)x^3, \frac{1 + aq + bq^2\sqrt{1 + q^2}}{\sqrt{q + q^2}}x^2, \frac{g + bq}{q + bq^2}, \frac{\sqrt{1 + q}}{q^3}x^{-\frac{11}{3}}.$$

(104) Откуда слѣдуетъ, что соизмѣримая однородная дробь, которая содержитъ въ себѣ токмо два перемѣнныя ко-

личества, какъ то дробь

$$\frac{ax^{\lambda} + bx^{\lambda-1}y + cx^{\lambda-2}y^2 + \ldots\ldots + hy^{\lambda}}{mx^{\mu} + nx^{\mu-1}y + px^{\mu-2}y^2 + \ldots\ldots + uy^{\mu}},$$ можетъ быть разрѣшена на простыя ея дроби; ибо положивъ $y = qx$, ее перемѣнишь въ сію $\frac{a + bq + cq^2 \ldots\ldots + hq^{\lambda}}{m + nq + pq^2 \ldots\ldots + uq^{\mu}} x^{\lambda-\mu}$.

Но когда дробь заключаетъ въ себѣ болѣе двухъ перемѣнныхъ количествъ, тогда знаменатель ея не возможно вообще разрѣшить на множители первой степени. Пусть предложено будетъ количество $ay^4 + bx^4 + cu^4 + ey^2x^2 + fy^2u^2 + gx^2u^2$, и естьли одинъ изъ множителей его будетъ $my + nx + pu$; то въ немъ сдѣлавъ $y = -\frac{nx + pu}{m}$, учинишь его нулемъ, и будешь имѣть тожественное уравнение

$$\begin{array}{lllll} an^4.x^4 & + 4an^3p.x^3u & + 6an^2p^2.x^2u^2 & + 4anp^3.xu^3 & + ap^4.u^4 = 0, \\ + bm^4 & + 2em^2np & + em^2p^2 & + 2fm^2np & + cm^4 \\ + em^2n^2 & & + fm^2n^2 & & + fm^2p^2 \\ & & + gm^4 & & \end{array}$$

изъ котораго получишь $an^4 + bm^4 + em^2n^2 = 0$, $ap^4 + cm^4 + fm^2p^2 = 0$, $2an^2 + em^2 = 0$, $2ap^2 + fm^2 = 0$, $2an^2p^2 + gm^4 = 0$ (*), и слѣдовательно

$g = -\frac{ef}{2a}$, $b = \frac{e^2}{4a}$, $c = \frac{f^2}{4a}$, [по причинѣ что] $\frac{n^2}{m^2} = \frac{-e}{2a}$; $\frac{p^2}{m^2} = \frac{-f}{2a}$.

И такъ между a, b, c, e, f и g имѣются условія, дабы предложенное количество могло разрѣшиться на множители первой степени; и положивъ оныя, заключишь, что количество

$$a^2y^4 + \frac{e^2x^4}{4} + \frac{f^2u^4}{4} + aey^2x^2 + afy^2u^2 - \frac{ef}{2}x^2u^2$$

имѣетъ множителями первой степени

$y\sqrt{a} + \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} + \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}}$, $y\sqrt{a} - \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} - \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}}$

$y\sqrt{a} + \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} - \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}}$, $y\sqrt{a} - \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} + \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}}$.

(*) Сіе уравненіе получено изъ $6an^2p^2 + em^2p^2 + fm^2n^2 + gm^4 = 0$, отнявъ уравненія $2an^2 + em^2 = 0$ и $2ap^2 + fm^2 = 0$, умноженныя на p^2 и n^2.

(105) Въ данномъ уравненіи между двумя перемѣнными количествами не всегда возможно опредѣлить одно въ видѣ функціи другаго; но удобнѣе найти каждое изъ нихъ въ видѣ функціи новаго перемѣннаго количества; и сей вопросъ въ послѣдствіи будетъ имѣть свои употребленія. И такъ въ уравненіи

$$ay^3 + by^2x + cyx^2 + dx^3 + ey^2 + fyx + gx^2 = 0,$$

положивъ $y = xz$, получишь изъ него

$$x = \frac{-ez^2 - fz - g}{az^3 + bz^2 + cz + d}, \quad y = \frac{-ez^3 - fz^2 - gz}{az^3 + bz^2 + cz + d}.$$

Посредствомъ того же самаго вставливанія изъ уравненія $y^5 = 2ax^3 + by + cx$, найдется сіе $x^4z^5 = 2ax^2 + bz + c$; откуда же

$$x = \pm\frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bz^6 + cz^5}}}{z^2\sqrt{z}}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bz^6 + cz^5}}}{z\sqrt{z}}.$$

Вотъ еще примѣръ: пусть дано уравненіе $ay^m + bx^n + cy^bx^i = 0$; положи $y = x^r z^s$ и перемѣни его въ сіе $ax^{mr} . z^{ms} + bx^n + cz^{bs} . x^{br+i} = 0$, изъ котораго можно найти величину количества x въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Когда $mr = n$; въ семъ случаѣ оное уравненіе сдѣлается $(az^{ms} + b)\, x^{\frac{mn + im - bn}{m}} = -cz^{bs}$, и оттуда найдется $x = \left(\frac{-cz^{bs}}{b + az^{ms}}\right)^{\frac{m}{mn - in - bn}}$, $y = z^s\left(\frac{-cz^{bs}}{b + az^{ms}}\right)^{\frac{n}{mn - in - bn}}$.

2) Когда $n = hr + i$; въ ономъ случаѣ уравненіе сдѣлается $(b + cz^{bs})\, x^{n - mr} = -az^{ms}$, и оттуда найдется $x = \left(\frac{-az^{ms}}{b + cz^{bs}}\right)^{\frac{1}{n - mr}}$, $y = z^s\left(\frac{-az^{ms}}{b + cz^{bs}}\right)^{\frac{r}{n - mr}}$.

3) Когда $mr = hr + i$; въ семъ случаѣ наше уравненіе одѣлается $(az^{ms} + cz^{bs})\, x^{mr - n} = -b$, и оттуда найдется $x = \left(\frac{-b}{az^{ms} + cz^{bs}}\right)^{\frac{1}{mr - n}}$, $y = z^s\left(\frac{-b}{az^{ms} + cz^{bs}}\right)^{\frac{1}{mr - n}}$.

Естьли данное уравненіе будетъ таково $y^3 + x^3 = eyx$, то положи $s = 1$, и будешь имѣть
первымъ образомъ $r = 1$, $x = \frac{ez}{1 + z^3}$, $y = \frac{ez^2}{1 + z^3}$;
вторымъ образомъ $r = 2$, $x = \frac{\sqrt[3]{ez - 1}}{z}$, $y = \frac{\sqrt[3]{(ez - 1)^2}}{z}$;
третьимъ образомъ $r = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt[3]{(ez - z^3)^2}$, $y = z\sqrt[3]{ez - z^3}$.

ГЛАВА III.

О способѣ разностей.

(106) Изъ количествъ, которыя между собою сравниваются, однѣ непрестанно прибавляются или убавляются, а другія всегда одинаковы пребываютъ; мы назвали первыя количествами перемѣнными, а другія постоянными. Величина, на которую перемѣнное количество когда либо прибавится или убавится, именуется его *разностію*. Въ послѣдствіи для означенія сей разности перемѣннаго количества, мы употребимъ знакъ Δ. Такъ напримѣръ, для означенія разности количества x, мы напишемъ Δx; которое выраженіе будетъ сопровождено знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, какъ перемѣнное количество положено будетъ перемѣняющимся, возрастая, или убывая. Пусть z функція многихъ перемѣнныхъ количествъ y, x, и проч.; требуется разность сей функціи z? Положимъ, что по постановленіи $y \pm \Delta y$ вмѣсто y, $x \pm \Delta x$ вмѣсто x, и проч., функція z сдѣлается z'; тогда по отнятіи z отъ z', будетъ имѣть Δz.

Ежели z равна какой нибудь степени n перемѣннаго количества x, то найдешь $z' = (x \pm \Delta x)^n$ и $\Delta z = \pm n x^{n-1} \Delta x + n.\frac{n-1}{2} x^{n-2} \Delta x^2 \pm n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} x^{n-3}.\Delta x^3 +$ и проч. Когда n есть цѣлое положительное число, то сей рядъ конецъ имѣть будетъ, и заключитъ въ себѣ всѣ по порядку слѣдующія степени разности Δx; отъ Δx до Δx^n, со включеніемъ оной разности Δx.

Требуется разность дроби $\frac{x^2}{a+x}$, гдѣ a постоянное количество и x какое нибудь перемѣнное? Я положу $\frac{x^2}{a+x} = z$; откуда найду $z' = \frac{x^2 \pm 2x\Delta x + \Delta x^2}{a+x \pm \Delta x}$ и $\Delta z = \frac{\pm(2ax + x^2)\Delta x + (a+x)\Delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\Delta x}$.

Чтобы сію дробь разложить въ рядъ расположенный въ разсужденіи по порядку слѣдующихъ степеней разности Δx, положи $\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 +$ и проч., и будешь имѣть $A = \pm\frac{2ax + x^2}{(a+x)^2}$, $B = \frac{a^2}{(a+x)^3}$, $C = \mp\frac{a^2}{(a+x)^4}$, и проч.

Предлагается еще найти разность функціи $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}$? Я положу $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}} = z$; откуда найду $z' = \frac{\sqrt{a+x\pm\Delta x}}{\sqrt{x\pm\Delta x}}$ и $\Delta z = \frac{\sqrt{a+x\pm\Delta x}}{\sqrt{x\pm\Delta x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}$.

Положимъ $\frac{\sqrt{a+x\pm\Delta x}}{\sqrt{x\pm\Delta x}} = X + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 +$ и проч., мы будемъ имѣть $X = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}$ и $\Delta z = A\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\Delta x^3$ + и проч., гдѣ $A = \pm\frac{a}{2x\sqrt{ax+x^2}}$, $B = \frac{3a^2+4ax}{8x(ax+x^2)\sqrt{ax+x^2}}$, $C = \mp\frac{5a^3+12a^2x+8ax^3}{16x(ax+x^2)^2\sqrt{ax+x^2}}$, и проч.

Не нужно приводить болѣе примѣровъ, чтобъ заключить, что разность алгебраической функціи количества x и постоянныхъ всегда можно представить чрезъ $A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3$ — и проч., гдѣ A, B, C, и проч. суть неопредѣленныя функціи количества x и постоянныхъ, когда оное количество x есть растущее; когда же x убывающее количество, то разность той же самой функціи будетъ $-A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 - C\,\Delta x^3 + D\Delta x^4$ + и проч.

(107) Станемъ теперь искать разности функцій многихъ перемѣнныхъ количествъ. Здѣсь можетъ случиться, или что всѣ перемѣнныя количества въ одно и тоже время прибавляются, или что нѣкоторыя изъ нихъ прибавляются, а другія убавляются, или что всѣ въ одно и тоже время убавляются. И такъ когда дана функція z перемѣнныхъ количествъ y и x, и оныя прибавляются въ одно и тоже время, то найдется z', поставляя $y + \Delta y$ вмѣсто y, и $x + \Delta x$ вмѣсто x; естьли же y прибавляется, а x убавляется, то найдется z', поставляя $y + \Delta y$ вмѣсто y, и $x - \Delta x$ вмѣсто x; и наконецъ естьли y и x

убавляются въ одно и тоже время, то найдется z', поставляя $y - \Delta y$ вмѣсто y, и $x - \Delta x$ вмѣсто x; потомъ во всѣхъ сихъ различныхъ случаяхъ отнявъ z отъ z', будешь имѣть Δz. Но для избѣжанія длинностей, мы будемъ полагать по крайней мѣрѣ пока о томъ не предъувѣдомимъ, что всѣ перемѣнныя количества растутъ въ одно и тоже время.

Положивъ сіе, пусть содержаніе между y и x дано чрезъ уравненіе

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

требуется найти содержаніе между разностями сихъ перемѣнныхъ количествъ? Удобно сыщется, что оное содержаніе заключается въ уравненіи

$$(2ax + by + d)\Delta x + (bx + 2cy + e)\Delta y + a\Delta x^2 + b\Delta x\,\Delta y + c\Delta y^2 = 0.$$

Пусть еще дано уравненіе

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k = 0;$$

содержаніе между разностями перемѣнныхъ количествъ y и x изобразится чрезъ

$$(3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h)\Delta x + (bx^2 + 2cxy + 3dy^2 + fx + 2gy + i)\Delta y + (3ax + by + e)\Delta x^2 + (2bx + 2cy + f)\Delta x\,\Delta y + (cx + 3dy + g)\Delta y^2 + a\Delta x^3 + b\Delta x^2\Delta y + c\Delta x\,\Delta y^2 + d\Delta y^3 = 0.$$

Вообще естьли содержаніе между перемѣнными количествами y и x дано чрезъ уравненіе

$$(\alpha) \ldots ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \ldots + gy^n + a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + c'x^{n-3}y^2 + \ldots + f'y^{n-1} + \ldots + hx + iy + k = 0,$$

и сіи перемѣнныя количества полагаются растущими въ одно и тоже время; то уравненіе заключающее въ себѣ содержаніе между ихъ разностями, всегда можетъ быть представлено чрезъ

$$(\beta) \ldots \mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y + \mathrm{C}\,\Delta x^2 + \mathrm{D}\,\Delta x\,\Delta y + \mathrm{E}\,\Delta y^2 + \mathrm{E}\,\Delta x^3 + \mathrm{G}\,\Delta x^2\Delta y + \mathrm{H}\,\Delta x\,\Delta y^2 + \mathrm{I}\,\Delta y^3 + \ldots + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\,\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \ldots + g\,\Delta y^n = 0,$$

гдѣ A, B, и проч. суть алгебраическія функціи тѣхъ же пере-

мѣнныхъ количествъ, и a, b, c, ... g тѣже самыя предстоящія, что и въ уравнени α.

(108) Естьли функція z не преставая перемѣнятьcя, приметъ по перемѣнно величины, которыя мы означимъ чрезъ z'', z''', z^{IV}, и проч., то будемъ имѣть $z'' - z' = \Delta z'$, $z''' - z'' = \Delta z''$, и проч.; причемъ весьма ясно видно, что $\Delta z' - \Delta z = \Delta(z' - z) = \Delta\Delta z$; сія то разность разности Δz называется второю разностію перемѣннаго количества z, и которую мы означимъ простѣе чрезъ $\Delta^2 z$; для сего будетъ $\Delta z'' - \Delta z' = \Delta^2 z'$, $\Delta z''' - \Delta z'' = \Delta^2 z''$, и проч. Такъ же весьма удобно усмотрѣть можно, что $\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^2 (z' - z) = \Delta^2 \Delta z$; чтобы означить сію вторую разность разности Δz, которая называется третьею разностію перемѣннаго количества z, мы напишемъ $\Delta^3 z$, такъ какъ и разности вышшихъ порядковъ, которыя найдутся такимъ же образомъ, мы означимъ чрезъ $\Delta^4 z$, $\Delta^5 z$, и проч.

Ежели z есть функція двухъ перемѣнныхъ количествъ y и x, то Δz будетъ заключать въ себѣ y, x, Δy и Δx, и будетъ имѣть $\Delta z'$, поставляя $y + \Delta y$ вмѣсто y, $x + \Delta x$ вмѣсто x, $\Delta y + \Delta^2 y$ вмѣсто Δy и $\Delta x + \Delta^2 x$ вмѣсто Δx. И такъ $\Delta^2 z$ будетъ заключать въ себѣ y, x, Δy, Δx, $\Delta^2 y$, и $\Delta^2 x$, и посему будетъ имѣть $\Delta^2 z'$, поставляя въ Δz, $y + \Delta y$ вмѣсто y, $x + \Delta x$ вмѣсто x, $\Delta y + \Delta^2 y$ вмѣсто Δy, $\Delta x + \Delta^2 x$ вмѣсто Δx, $\Delta^2 y + \Delta^3 y$ вмѣсто $\Delta^2 y$, и $\Delta^2 x + \Delta^3 x$ вмѣсто $\Delta^2 x$; такъ же будетъ имѣть $\Delta^3 z'$, поставляя въ $\Delta^3 z$, $y + \Delta y$ вмѣсто Δy, $x + \Delta x$ вмѣсто Δx, $\Delta y + \Delta^2 y$ вмѣсто Δy, $\Delta x + \Delta^2 x$ вмѣсто Δx, $\Delta^2 y + \Delta^3 y$ вмѣсто $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x + \Delta^3 x$ вмѣсто $\Delta^2 x$, $\Delta^3 y + \Delta^4 y$ вмѣсто $\Delta^3 y$, $\Delta^3 x + \Delta^4 x$ вмѣсто $\Delta^3 x$, и такъ далѣе. Но въ изчислени по порядку слѣдующихъ разностей функціи, мы весьма часто будемъ полагать, что одно изъ перемѣнныхъ количествъ ею содержимыхъ, перемѣняется равномѣрно, или все тоже, что одна изъ первыхъ разностей есть постоянна: мы примемъ сію предполо-

женную разность за непремѣнную сравнительную мѣру разностей прочихъ перемѣнныхъ количествъ.

(169) Полагая перемѣнныя количества растущими и первую разность количества x постоянною, требуются по порядку слѣдующія разности функціи xy? Сперва найдешь $\Delta z = y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\,\Delta y$, потомъ поставляя въ сіе выраженіе первой разности, $x + \Delta x$ вмѣсто x, $y + \Delta y$ вмѣсто y, $\Delta y + \Delta^2 y$ вмѣсто Δy, будешь имѣть $\Delta z' = y\,\Delta x + x\,\Delta y + 3\,\Delta x\,\Delta y + x\Delta^2 y + 2\,\Delta x\,\Delta y$, и отнимая Δz отъ $\Delta z'$, получишь
вторую разность . . . . $\Delta^2 z = 2\,\Delta x\,\Delta y + x\,\Delta^2 y + 2\,\Delta x \Delta^2 y$.
Такъ же найдешь третью разн. $\Delta^3 z = 3\,\Delta x\,\Delta^2 y + x\,\Delta^3 y + 3\,\Delta x \Delta^3 y$,
четвертую . . . . $\Delta^4 z = 4\,\Delta x\,\Delta^3 y + x\,\Delta^4 y + 4\,\Delta x \Delta^4 y$
пятую . . . . $\Delta^5 z = 5\,\Delta x\,\Delta^4 y + x\,\Delta^5 y + 5\,\Delta x \Delta^5 y$,
и такъ далѣе.

Предлагается еще найти по порядку слѣдующія разности функціи x^n? Понеже первая разность есть

$$nx^{n-1}\Delta x + n.\tfrac{n-1}{2}\,x^{n-2}\Delta x^2 + n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}\,x^{n-3}\Delta x^3 + \text{и проч.},$$

то будешь имѣть для второй разности

$$n\,\Delta x\,((x+\Delta x)^{n-1} - x^{n-1}) + n.\tfrac{n-1}{2}\,\Delta x^2\,((x+\Delta x)^{n-2} - x^{n-2}) + n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}\,\Delta x^3\,((x+\Delta x)^{n-3} - x^{n-3}) + \text{и проч.},$$

или разлагая всѣ сіи биномы въ ряды, будешь имѣть

$$n.\overline{n-1}.x^{n-2}\Delta x^2 + n.\overline{n-1}.\tfrac{n-2}{2}x^{n-3}\Delta x^3 + n.\overline{n-1}.\tfrac{n-2}{2}.\tfrac{n-3}{3}x^{n-4}\Delta x^4 + \text{и проч.}$$
$$+ n.\overline{n-1}.\tfrac{n-2}{2}x^{n-3}\Delta x^3 + n.\overline{n-1}.\tfrac{n-2}{2}.\tfrac{n-3}{2}x^{n-4}\Delta x^4 + \text{и проч.}$$
$$+ n.\overline{n-1}.\tfrac{n-2}{2}.\tfrac{n-3}{3}x^{n-4}\Delta x^4 + \text{и проч}$$

или еще, дѣлая нужныя сокращенія, будешь имѣть

$$n.\overline{n-1}.x^{n-2}\Delta x^2 + n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.x^{n-3}\Delta x^3 + n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{2}.\tfrac{n-3}{3}.7x^{n-4}\Delta x^4 + \text{и проч.}$$

Такимъ же образомъ найдешь для третьей разности

$$n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.x^{n-3}\Delta x^3 + n.\tfrac{n-1}{2}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.3x^{n-4}\Delta x^4 + \text{и проч.},$$

для четвертой разности

$$n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.x^{n-4}\Delta x^4 + \text{и проч.},$$

и такъ далѣе. Ежели n есть цѣлое положительное число, то будешь имѣть для разности порядка $\overline{n}$

$$1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{n-1}.\ n\,\Delta x^n;$$

и какъ явствуетъ, что сія разность постоянна, полагая Δx постоянною и n цѣлымъ положительнымъ числомъ, то разность функціи x^n порядка $n+1$ будетъ нуль.

(110) Естьли мы возмемъ прежній рядъ z, z', z'', z''', z^{IV} и проч. и замѣтимъ, что

$$z'-z=\Delta z,\ z''-z'=\Delta z',\ z'''-z''=\Delta z'',\ z^{IV}-z'''=\Delta z''',\ \text{и проч.}$$
$$\Delta z'-\Delta z=\Delta^2 z,\ \Delta z''-\Delta z'=\Delta^2 z',\ \Delta z'''-\Delta z''=\Delta^2 z'',$$
$$\Delta^2 z'-\Delta^2 z=\Delta^3 z,\ \Delta^2 z''-\Delta^2 z'=\Delta^3 z',\ \Delta^2 z'''-\Delta^2 z''=\Delta^3 z'',$$
$$\Delta^3 z'-\Delta^3 z=\Delta^4 z,\ \Delta^3 z''-\Delta^3 z'=\Delta^4 z',\ \Delta^3 z'''-\Delta^3 z''=\Delta^4 z'',$$

и проч., то увидимъ ясно, что

$z'=z+\Delta z,$	$\Delta z=z'-z,$
$z''=z+2\Delta z+\Delta^2 z$	$\Delta^2 z=z''-2z'-z,$
$z'''=z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z$	$\Delta^3 z=z'''-3z''+3z'-z,$
$z^{IV}=z+4\Delta z+6\Delta^2 z+4\Delta^3 z+\Delta^4 z,$	$\Delta^4 z=z^{IV}-4z'''+6z''-4z'+z;$
и проч.	и проч.

И такъ означивъ чрезъ Z вообще какой ниесть членъ ряда z, z', z'', и проч. и чрезъ n число предъидущихъ его членовъ, будетъ имѣть

$$1е,\ Z=z+n\Delta z+n.\tfrac{n-1}{2}\Delta^2 z+n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}\Delta^3 z+n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}.\tfrac{n-3}{4}\Delta^4 z+\ \text{и проч.}$$
$$2е,\ \Delta^n z=z^{n\prime}-nz^{\overline{n-1}\prime}+n.\tfrac{n-1}{2}z^{\overline{n-2}\prime}-n.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}z^{\overline{n-3}\prime}+\ \text{и проч.}$$

(111) Пусть XMZ (черт. XXIII) будетъ кривая линея имѣющая прямую AB діаметромъ и PM одною изъ своихъ ординатъ, и пусть по ту и другую сторону точки P взяты будутъ равныя части PP′, P′P″, P″P‴, и проч., ′PP, ″P′P, ‴P″P, и проч.; то означивъ чрезъ x AP, чрезъ y PM, и чрезъ y', y'', y''' ...... Y ординаты соотвѣтствующія абсциссамъ $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x$ ..... $x+n\Delta x$, будешь имѣть $y'=y+\Delta y$, $y''=y+2\Delta y+\Delta^2 y$, $y'''=y+3\Delta y$

$+ 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$, и проч. и $Y = y + n\Delta y + n.\frac{n-1}{2}\Delta^2 y$ $+ n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 y +$ и проч.

(112) Мы могли бы принять всякое другое положенїе, кромѣ того, что разность Δx постоянна. Такъ напримѣръ мы могли бы положить, что Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, и проч. равны между собою, или все тоже, что разность Δy постоянна; и тогда по причинѣ что XMZ не прямая линея, Δx была бы перемѣнная, или все тоже, части PP′, PP″, и проч. были бы не равныя между собою. Въ самомъ дѣлѣ проведши хорды стягивающїя какїя имѣеть двѣ дуги MM′, M′M″ и прямыя Mm, Mm′ параллельныя дїаметру AB, найдешь, что два треугольника MmM′, M′m′M″ были бы совершенно равны между собою, когда бы въ тоже время могла быть Mm = M′m′ и mM′ = m′M″; и по сему двѣ хорды съ параллельными Mm, Mm′ составляли бы равные углы, или все тоже, составляли бы одну и ту же прямую линею, и линея XMZ была бы такова, что хорды по порядку слѣдующихъ дугъ MM′, MM′, M′M″, и проч. составляютъ одну и ту же прямую линею, и потому была бы прямая, съ первою сливающаяся. И такъ вдругъ не возможно положить кромѣ одной разности постоянною. (*) Но хотя бы положилъ кто одно изъ перемѣнныхъ количествъ равномѣрно перемѣняющимся, или бы ни единую разность не принялъ за постоянную, всякимъ образомъ долженъ достигнуть къ одинаковому заключенїю.

Чтобы сїе доказать, положимъ, что кривой линеи XMZ уравненїе есть $y = x^2$, и что требуется по ординатѣ PM

(*) Недостатокъ и очевидная слабость сего доказательства происходитъ отъ того, что авторъ не употребилъ въ ономъ истиннаго опредѣленїя кривой линеи и дуги ея. Смотри первую книгу математическихъ трудовъ моихъ.

чрезъ посредство двухъ по порядку слѣдующихъ разностей достигнуть къ ординатѣ $P''M''$. По причинѣ что $P''M'' = y' + \Delta y'$ и что $y' = y + \Delta y$, будешь имѣть во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ $P''M'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$. Потомъ естьли возмешь за первое положеніе сіе, въ которомъ $P'M'$ раздѣляетъ PP'' на двѣ равныя части, то означивъ каждую изъ оныхъ частей чрезъ Δx, будешь имѣть $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ и по причинѣ что Δx есть постоянна, $\Delta^2 y = 2\Delta x^2$, и слѣдственно $P''M'' = x^2 + 4x\Delta x + 4\Delta x^2$. Взявъ же за другое положеніе сіе, въ которомъ MP' раздѣляетъ PP'' на двѣ не равныя части δx, $\delta x'$, будешь имѣть

$\Delta y = 2x\delta x + \delta x^2$, $\Delta^2 y = 2\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + (\delta^2 x)^2$, и слѣдственно

$$P''M'' = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + (\delta^2 x)^2.$$

Здѣсь хотя конечныя разности δx, $\delta x'$ неравны между собою, однако должно быть $\delta x + \delta x'$ или $2\delta x + \delta^2 x = 2\Delta x$; и поелику поставивъ сію величину количества $2\Delta x$ въ первое выраженіе ординаты $P''M''$, получается другое, то явствуетъ, что обоими способами мы достигаемъ къ одинаковому заключенію: тоже самое будетъ и во всякомъ другомъ положеніи. (**)

(**) Сіе доказательство слабо и совсемъ не нужно: 1) потому, что чрезмѣру темно; 2) потому, что само собою видно, на равныя ли части раздѣлится PP'' или на неравныя, ордината $P''M''$ пребудетъ одинакова, лишь бы PP'' оставалась таже. Сверьхъ того брать равныя или не равныя разности абсциссы, для опредѣленія по онымъ разностей другихъ количествъ, какъ то разностей ординаты, или дуги кривой линеи, совершенно зависитъ отъ нашего произволу, и сіе столь ясно, что ни какого доказательства не нужно.

О обратномъ способѣ разностей.

(113) Всегда удобно будетъ найти такую разность, какую хочешь, всякой функціи; но обратной вопросъ, которой состоитъ въ томъ, что бы поступить отъ разности какого нибудь количества, къ самому сему количеству, заключаетъ въ себѣ трудности вышшей степени. Количество, которое найти тогда надлежитъ, называется *суммою* предложенной разности, и что бы означить оную, употребляется знакъ Σ, которой ставится предъ сею разностію; и такъ выраженіе $\Sigma x^n \Delta x$ означаетъ сумму, которой $x^n \Delta x$ есть разность.

Изъ предъидущаго явствуетъ, что сумма разности Δx есть x; и когда Δx есть постоянна, то сумма разности Δx^2 есть $x \Delta x$, сумма разности Δx^3 есть $x \Delta x^2$, сумма разности Δx^4 есть $x \Delta x^3$, и проч. Положивъ сіе, я примѣчаю, что разность количества $x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$, откуда нахожу $x^2 = 2\Sigma x \Delta x + x \Delta x$, и $\Sigma x \Delta x = \frac{x^2 - x\Delta x}{2}$. Такъ же поелику разность количества $x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$, будетъ $x^3 = 3\Sigma x^2 \Delta x + \frac{3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2}{2} + x \Delta x^2$, и $\Sigma x^2 \Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$.

Подобнымъ образомъ найдешь,

$\Sigma x^3 \Delta x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4}$

$\Sigma x^4 \Delta x = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4\Delta x}{2} + \frac{x^3\Delta x^2}{3} - \frac{x\Delta x^3}{30}$,

$\Sigma x^5 \Delta x = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5\Delta x}{2} + \frac{5x^4\Delta x^2}{12} - \frac{x^2\Delta x^4}{12}$,

и даже сумму разности $x^n \Delta x$, гдѣ n какое нибудь цѣлое положительное число. (*).

(*) Чрезъ посредство сихъ формулъ найдутся суммы слѣдующихъ произведеній $(x+\Delta x)\Delta x$, $(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\Delta x$, $(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\Delta x$, и такъ далѣе, которыя какъ славной Ейлеръ, такъ и Боссю, въ своихъ дифференціальныхъ исчисленіяхъ, ищутъ чрезъ особенной не прямой способъ. Во самомъ дѣлѣ:

1) $\Sigma(x+\Delta x)\Delta x = \Sigma x\Delta x + \Sigma\Delta x^2 = \frac{x^2 - x\Delta x}{2} + x\Delta x = \frac{x^2 + x\Delta x}{2} = \frac{x(x+\Delta x)}{2}$.

2) $\Sigma(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\Delta x = \Sigma x^2\Delta x + \Sigma 3x\Delta x^2 + \Sigma 2\Delta x^3 = \Sigma x^2\Delta x + 3\Delta x\Sigma x\Delta x + 2\Sigma\Delta x^3 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6} + 3\Delta x\frac{(x^2 - x\Delta x)}{2} + 2x\Delta x^2 = \frac{x^3}{3} + x^2\Delta x + \frac{2x\Delta x^2}{3} = \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 2x\Delta x^2}{3} = \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}{3}$.

3) $\Sigma(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\Delta x = \Sigma x^3\Delta x + 6\Delta x\Sigma x^2\Delta x + 11\Delta x^2\Sigma x\Delta x + 6\Sigma\Delta x^4 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4} + 6\Delta x(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}) + 11\Delta x^2(\frac{x^2 - x\Delta x}{2}) + 6x\Delta x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3\Delta x}{2} + \frac{11x^2\Delta x^2}{4} + \frac{3x\Delta x^3}{2} = \frac{x^4 + 6x^3\Delta x + 11x^2\Delta x^2 + 6x\Delta x^3}{4} = \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)}{4}$.

И такъ далѣе.

Г. Боссю по сысканнымъ симъ суммамъ ищетъ еще суммы слѣдующихъ произведеній $x\Delta x$, $x(x+\Delta x)\Delta x$, $x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\Delta x$, и такъ далѣе; что и дѣйствительно весьма удобно уже учинено быть можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда суммы сихъ послѣднихъ произведеній означимъ чрезъ Y, то суммы первыхъ изъявятся чрезъ $Y' = Y + \Delta Y$, и ΔY изобразитъ самыя тѣ послѣдния произведенія: И такъ по причинѣ что $Y = Y' - \Delta Y$, будетъ $\Sigma x\Delta x = \frac{x(x+\Delta x)}{2} - x\Delta x$,

$\Sigma x(x+\Delta x)\Delta x = \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}{3} - x(x+\Delta x)\Delta x$,

$\Sigma x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\Delta x = \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)}{4} - x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\Delta x$, и такъ далѣе.

Равнымъ образомъ по тѣмъ же сысканнымъ суммамъ можно найти суммы слѣдующихъ произведеній $(x+n\Delta x)\Delta x$, $(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)\Delta x$, $(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)\Delta x$, и такъ далѣе, гдѣ n цѣлое и положительное число. Ибо, когда замѣтишь, что $x+n\Delta x$, $x+\overline{n+1}\Delta x$, $x+\overline{n+2}\Delta x$, и проч. суть не иное что какъ $(x+\overline{n-1}.\Delta x)+\Delta x$, $(x+\overline{n-1}.\Delta x)+2\Delta x$, $(x+\overline{n-1}.\Delta x)+3\Delta x$, и проч., то означивъ $x+\overline{n-1}.\Delta x$ чрезъ X, увидишь что приращеніе онаго количества X будетъ тоже самое Δx, такъ что $\Delta X = \Delta x$; и отъ того наши произведенія обратятся въ сіи $(X+\Delta X)\Delta X$, $(X+\Delta X)(X+2\Delta X)\Delta X$, $(X+\Delta X)(X+2\Delta X)(X+3\Delta X)\Delta X$, и проч., коихъ суммы суть $\frac{X(X+\Delta X)}{2}$, $\frac{X(X+\Delta X)(X+2\Delta X)}{3}$, $\frac{X(X+\Delta X)(X+2\Delta X)(X+3\Delta X)}{4}$, и проч. Почему вмѣсто X и ΔX поставивъ $x+\overline{n-1}\Delta x$ и Δx, получишь суммы предложенныхъ произведеній $\frac{(x+\overline{n-1}.\Delta x)(x+n\Delta x)}{2}$, $\frac{(x+\overline{n-1}\Delta x)(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\Delta x)}{3}$, $\frac{(x+\overline{n-1}\Delta x)(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)}{4}$, и проч.

ВЪ прочемЪ кЪ тѣмЪ же заключеніямЪ достигнуть можно прямо. ТакЪ напримѣрЪ возмемЪ произведеніе $(x + n\Delta x)\Delta x$; будетЪ $\Sigma(x + n\Delta x)\Delta x = \Sigma x\Delta x + \Sigma n\Delta x^2 = \frac{x^2 - x\Delta x}{2} + nx\Delta x = \frac{x^2 + (2n - 1)x\Delta x}{2}$, которая сумма отЪ предпайденной $\frac{(x + \overline{n - 1}.\Delta x)(x + n\Delta x)}{2}\left(= \frac{x^2 + (2n - 1)x\Delta x + (n^2 - n)\Delta x^2}{2}\right)$ разнствуетЪ токмо на постоянное количество $\frac{(n^2 - n)\Delta x^2}{2}$. И что бы здѣсь оное постоянное количество опредѣлить, то замѣтимЪ, что $\Sigma(x + n\Delta x)\Delta x$ должна обратиться кЪ нуль, когда сдѣлается $x = -n\Delta x$, ибо на сумму произведенія $(x + n\Delta x)\Delta x$ можно взирать какЪ на пространство составляющееся изЪ прямоугольниковЪ, у коихЪ основаніе Δx, а высота $x + n\Delta x$, обращающаяся вЪ нуль, когда $x = -n\Delta x$; потомЪ означивЪ постоянное количество, которое кЪ находимой суммѣ всегда присовокуплять надлежитЪ, чрезЪ C, и получивЪ $\Sigma(x + n\Delta x)\Delta x = \frac{x^2 + (2n - 1)x\Delta x}{2} + C$, положимЪ $x = -n\Delta x$; чрезЪ что найдемЪ $0 = \frac{n^2\Delta x^2 - (2n - 1)n\Delta x^2}{2} + C$ и отсюда $C = \frac{(n^2 - n)\Delta x^2}{2}$, сирѣчь то самое количество, на которое прямо найденная сумма разнствовала отЪ найденной предЪ симЪ другимЪ образомЪ.

(114) Надлежитъ примѣчать, что Δz равно есть разность функціи z, когда оная прибавится или убавится на какое ниесть постоянное количество; откуда слѣдуетъ, что сумма предложенной разности, дабы быть полною, непосредственно долженствуетъ заключать въ себѣ произвольную величину. Притомъ разность Δx, которая сама есть количество постоянное, должна войти какимъ ниесть образомъ въ произвольную постоянную величину. Мы то же самое должны сказать о всякой функціи количествѣ x, Δx и постоянныхъ, которой разность равна нулю.

Что бы лучше усмотрѣть надобность въ прибавленіи произвольной постоянной величины, пусть предложено будетъ найти сумму разности $(a + x)^2\Delta x$. Сіе можно учинить двумя образами. Разлагая сію разность, получишь $a^2\Delta x + 2ax\Delta x + x^2\Delta x$; но $\Sigma a^2\Delta x = a^2x$, $\Sigma 2ax\Delta x = ax^2 - ax\Delta x$, $\Sigma x^2\Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$; слѣдовательно будетъ $\Sigma(a + x)^2\Delta x = a^2x + ax^2 - ax\Delta x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6} = \frac{(a + x)^3}{3} - \frac{(a + x)^2}{2}\Delta x + \frac{a + x}{6}\Delta x^2$

$-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}\Delta x-\frac{a}{6}\Delta x^2$; гдѣ я не прибавляю произвольной постоянной величины. Иначе же, я положу $a+x=y$; откуда нахожу $\Delta x=\Delta y$ и $(a+x)^2\Delta x=y^2\Delta y$; но $\Sigma y^2\Delta y=\frac{y^3}{3}-\frac{y^2\Delta y}{2}+\frac{y\Delta y^2}{6}$; слѣдовательно поставляя вмѣсто y и Δy ихъ величины, будешь имѣть $\Sigma(a+x)^2\Delta x=\frac{(a+x)^3}{3}-\frac{(a+x)^2}{2}\Delta x+\frac{a+x}{6}\Delta x^2$, гдѣ я опять не прибавляю постоянной величины. Сїи два слѣдствїя разнятся на постоянное количество $-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}\Delta x-\frac{a}{6}\Delta x^2$; и видно, что онѣ не иное что суть, какъ частныя суммы заключающїяся въ выраженїи $\frac{(a+x)^3}{3}-\frac{(a+x)^2}{2}\Delta x+\frac{a+x}{6}\Delta x^2+C$, которое есть полная сумма предложенной разности, ежели чрезъ C будешь разумѣть произвольную постоянную величину, какъ выше сказано.

(115) Естьли предложена будетъ соизмѣримая дробь $\frac{3x\Delta x+2\Delta x^2}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}$, то разрѣши ее на простыя дроби $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{2}{x+2\Delta x}=-\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)-2\left(\frac{1}{x+2\Delta x}-\frac{1}{x+\Delta x}\right)$, которой разности сумма есть $-\frac{1}{x}-\frac{2}{x+\Delta x}$; и такъ сумма разности предложенной $=a-\frac{3x+\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, гдѣ a произвольное количество. Такимъ же образомъ найдешь, что $\Sigma\frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\,\Delta x)}=a-\frac{1}{x+n\Delta x}$. Но часто не разрѣшая соизмѣримой дроби на двучленныя, довлѣетъ токмо разрѣшить ее на дроби, коихъ бы знаменатель имѣлъ наименьшее число множителей. Такъ напримѣръ, естьли предложится дробь $\frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)}$, то уравняй ее $\frac{A}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)}+\frac{B}{(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)}$, и будешь имѣть тожественное уравненїе

$$\begin{aligned}\Delta x = A&x+\overline{n+2}.A.\Delta x,\\ +B&.\;+\;\;nB.\end{aligned}$$

изъ котораго найдешь $A=-B$, $A=\frac{1}{2}$, и оттуда

$$\Sigma\frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)}=a-\frac{1}{2(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)}.$$

Такъ же $\Sigma\frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)(x+\overline{n+3}.\Delta x)}$

$$a - \frac{1}{3(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)};$$

$$\sum \frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)(x+\overline{n+3}.\Delta x)(x+\overline{n+4}.\Delta x)} =$$

$$a - \frac{1}{4(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}.\Delta x)(x+\overline{n+2}.\Delta x)(x+\overline{n+3}.\Delta x)},$$

и такъ далѣе. (*)

(*) Мы здѣсь сыщемъ суммы еще нѣкоторыхъ соизмѣримыхъ дробей, паче общихъ нежели взятыя авторомъ.

1) Требуется сумма дроби $\frac{a\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$, у которой a постоянное количество, n цѣлое положительное число и Δx постоянная разность перемѣннаго количества x.

Написавъ предложенную дробь симъ образомъ $\frac{a}{n} \cdot \frac{n\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$, я стану искать сумму дроби $\frac{n\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$; потому что оная сумма умноженная на $\frac{a}{n}$ дастъ искомую сумму; сего ради дробь $\frac{n\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$ разрѣшу на дроби простыя, и того для положу ее $= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+n\Delta x}$; отъ чего будетъ $A+B=0$, $An-n=0$, $B=-A$, $A=1$, и $\frac{n\Delta x}{x(x+n\Delta x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n\Delta x}$; и какъ оныя простыя дроби $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+n\Delta x}$ можно почитать за разности суммъ всѣхъ дробей, кои найдутся поставляя въ нихъ $x-\Delta x$, $x-2\Delta x$, $x-3\Delta x$ и проч. вмѣсто x, то выдетъ $\sum \frac{n\Delta x}{x(x+n\Delta x)} = \sum \frac{1}{x} - \sum \frac{1}{x+n\Delta x}$.

Положивъ сіе я примѣчаю, что вообще разность дроби вида $\frac{1}{x+q\Delta x}$ даетъ уравненіе $\Delta\left(\frac{1}{x+q\Delta x}\right) = \frac{1}{x+(q+1)\Delta x} - \frac{1}{x+q\Delta x}$, или сіе $\frac{1}{x+(q+1)\Delta x} = \Delta\left(\frac{1}{x+q\Delta x}\right) + \frac{1}{x+q\Delta x}$; откуда заключаю, что всегда будетъ $\sum \frac{1}{x+(q+1)\Delta x} = \frac{1}{x+q\Delta x} + \sum \frac{1}{x+q\Delta x}$; а такимъ образомъ попеременно полагая $q=0$, $q=1$, $q=2$, $q=3$, ... $q=n-1$, мы получимъ слѣдующія формулы.

$$\sum \frac{1}{x+\Delta x} = \frac{1}{x} + \sum \frac{1}{x}$$

$$\sum \frac{1}{x+2\Delta x} = \frac{1}{x+\Delta x} + \sum \frac{1}{x+\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\Delta x} + \sum \frac{1}{x},$$

$$\sum \frac{1}{x+3\Delta x} = \frac{1}{x+2\Delta x} + \sum \frac{1}{x+2\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\Delta x} + \frac{1}{x+2\Delta x} + \sum \frac{1}{x},$$

$$\sum \frac{1}{x+4\Delta x} = \frac{1}{x+3\Delta x} + \sum \frac{1}{x+3\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\Delta x} + \frac{1}{x+2\Delta x} + \frac{1}{x+3\Delta x} + \sum \frac{1}{x},$$ и вообще

$$\sum \frac{1}{x+n\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\Delta x} + \frac{1}{x+2\Delta x} + \frac{1}{x+3\Delta x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{1}{x+(n-1)\Delta x} + \sum \frac{1}{x}.$$

Откуда непосредственно слѣдуетъ искомая нами сумма, а именно:

$$\Sigma\frac{n\Delta x}{x(x+n\Delta x)}\left(=\Sigma\frac{1}{x}-\Sigma\frac{1}{x+n\Delta x}\right)=C-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x+2\Delta x}-\frac{1}{x+3\Delta x}$$
$$-\frac{1}{x+4\Delta x}\;.\;.\;.\;.\;.\;-\frac{1}{x+(n-1)\Delta x}.$$

Сей рядъ, коего члены суть алгебраическія количества, всегда прервется; такъ пусть $n=3$, будетъ

$$\Sigma\frac{3\Delta x}{x(x+3\Delta x)}=C-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x+2\Delta x}=C-\frac{3x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)},$$
и $$\Sigma\frac{a\Delta x}{x(x+3\Delta x)}=C-\frac{a}{3}\cdot\frac{3x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}.$$

2) Естьли требуется сумма дроби $\frac{a\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)}$, гдѣ n и p цѣлыя положительныя неравныя между собою числа, и большее изъ нихъ p; то я положу $x+n\Delta x=z$, что даетъ $\Delta x=\Delta z$ и $x+p\Delta x=z-n\Delta z+p\Delta z=z-(p-n)\Delta z$, и потому предложенная дробь обратится въ сію $\frac{a\Delta z}{z(z+(p-n)\Delta z)}$, которая какъ то явно, есть одного рода съ предъидущею.

3) Пусть требуется сумма сей дроби $\frac{ax\Delta x+b\Delta x^2}{x(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)}$, у которой a и b постоянныя предстоящія и n, p цѣлыя положительныя неравныя между собою числа.

Приложи къ сей дроби и отними отъ оной дробь $\frac{A\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$; будетъ $\frac{ax\Delta x+b\Delta x^2}{x(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)}=\frac{ax\Delta x+b\Delta x^2}{x(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)}+\frac{A\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$ $-\frac{A\Delta x}{x(x+n\Delta x)}=\frac{(A+a)x\Delta x+(Ap+b)\Delta x^2}{x(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)}-\frac{A\Delta x}{x(x+n\Delta x)}=$
$\frac{(A+a)\left(x+\frac{Ap+b}{A+a}\Delta x\right)\Delta x}{x(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)}-\frac{A\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$; теперь положи, по причинѣ неопредѣленнаго количества A, $\frac{Ap+b}{A+a}=n$, выдетъ $A=\frac{an-b}{p-n}$, и предъайденное выраженіе сдѣлается $=\frac{(A+a)\Delta x}{x(x+p\Delta x)}-\frac{A\Delta x}{x(x+n\Delta x)}=$
$\frac{\frac{ap+b}{p-n}\cdot\Delta x}{x(x+p\Delta x)}-\frac{\frac{an-b}{p-n}\cdot\Delta x}{x(x+n\Delta x)}$. И такъ явно, что сумма предложенной дроби найдется по первому вопросу.

4) Естьли требуется сумма дроби $\frac{ax\Delta x+b\Delta x^2}{(x+n\Delta x)(x+p\Delta x)(x+q\Delta x)}$, то стоитъ токмо положить меньшій знаменателя множитель $x+n\Delta x=z$, и дробь наша приметъ видъ предъидущей дроби.

5) Пусть предложена дробь $\frac{a x^2 \Delta x + b x \Delta x^2 + c \Delta x^3}{x(x + n\Delta x)(x + p\Delta x)(x + q\Delta x)}$, то приложи къ ней и вычти изъ нея дробь $\frac{A x \Delta x + B \Delta x^2}{x(x + n\Delta x)(x + p\Delta x)}$; получишь $\frac{a x^2 \Delta x + b x \Delta x^2 + c \Delta x^3}{x(x + n\Delta x)(x + p\Delta x)(x + q\Delta x)} =$

$$\frac{(A + a)(x^2 + \frac{Aq + B + b}{A + a} . x\Delta x + \frac{Bq + c}{A + a} . \Delta x^2)\Delta x}{x(x + n\Delta x)(x + p\Delta x)(x + q\Delta x)} -$$

$\frac{A x \Delta x + B \Delta x^2}{x(x + n\Delta x)(x + p\Delta x)}$; потомъ положивъ $x^2 + \frac{Aq + B + b}{A + b} x\Delta x + \frac{Bq + c}{A + a}\Delta x^2 = (x + n\Delta x)(x + p\Delta x)$ и сыскавъ A и B, дѣло состоять будетъ въ сыскани суммы сего вида дробей $\frac{(A + a)\Delta x}{x(x + q\Delta x)} - \frac{A x \Delta x + B \Delta x^2}{x(x + n\Delta x)(x + p\Delta x)}$; что чрезъ первой и третій вопросы удобно уже и учинено быть можетъ. И такъ далѣе и далѣе.

Когда множители знаменателя всѣ или отъ части равные и дѣйствительные или мнимые, то взятіе суммы бываетъ гораздо затруднительнѣе; но по причинѣ что все сіе начало свое возприяло отъ дифференціальнаго изчисленія, мы въ оныя подробности здѣсь входить не станемъ, а присовокупимъ токмо нѣчто о взятіи суммы формулъ со многими перемѣнными количествами.

Когда требуется взять разность произведенія, какъ то xy; то поставляется въ оное $x + \Delta x$ вмѣсто x, и $y + \Delta y$ вмѣсто y, и отъ произшедшаго вновь произведенія отнимается данное xy. Но къ тому же заключенію достигнешь, когда по постановленіи $x + \Delta x$ вмѣсто x въ xy, и по полученіи $xy + y\Delta x$, примешь x и Δx за постоянныя, потомъ по постановлении въ оное выраженіе $y + \Delta y$ вмѣсто y, отнимешь xy. Слѣдовательно и обратно, когда предложено будетъ взять сумму формулы со многими перемѣнными количествами, то можно положить одно изъ перемѣнныхъ за постоянное и взять оной формулы сумму въ семъ предположеніи; потомъ естьли полученной такимъ образомъ суммы возмется разность, полагая перемѣннымъ и то количество, кое взято было за постоянное, и оная разность дастъ предложенную формулу, то та сумма будетъ искомая; естьли же не дастъ, то формула не будетъ имѣть суммы, или къ найденной предъ симъ суммѣ будетъ не доставать нѣкоего количества. При семъ прилагаемые примѣры пояснятъ сей способъ.

1) Сыскать, естьли можно, сумму формулы $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$.

Я приму y за постоянное, и потому оставлю безъ вниманія члены содержащіе въ себѣ Δy; чрезъ сіе я буду имѣть одинъ токмо членъ $y\Delta x$,

коего сумма, полагая y постояннымЪ, есть yx. НашедЪ сію сумму, я беру разность ея, полагая x и y перемѣнными, и получаю $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, которое выраженіе будучи тоже самое, что и предложенная формула, показываетЪ, что искомая сумма дѣйствительно есть xy. Естьли же предложена будетЪ формула $y\Delta x + \Delta y - \Delta x\Delta y$, то поступая такимЪ же образомЪ, найдешь паки для суммы xy; но поелику взятая сея суммы разность не дастЪ предложенной формулы, то заключить должно, что оная формула не подлежитЪ ко взятію суммы.

2) Сыскать, естьли можно, сумму формулы $2yx\Delta x + y\Delta x^2 + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta x^2$.

Я возьму токмо два первые члена $2yx\Delta x + y\Delta x^2$, которые содержатЪ вЪ себѣ Δx, безЪ Δy, и написавЪ ихЪ такЪ $y(2x\Delta x + \Delta x^2)$, приму y за постоянное; почему приведши себѣ на память, что $2x\Delta x + \Delta x^2$ есть разность количества x^2, я нахожу для суммы yx^2. И какЪ взявЪ разность оной, полагая x и y перемѣнными, мы получаемЪ ту же формулу, что и предложенная, то слѣдуетЪ, что искомая сумма дѣйствительно есть yx^2.

3) Сыскать, естьли можно, сумму формулы $a(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(2xy\Delta y + y^2\Delta x + 2y\Delta x\Delta y + x\Delta y^2 + \Delta x\Delta y^2)$.

Я беру сперва сумму первой части, вЪ кою входитЪ одно токмо перемѣнное количество x, и нахожу для оной ax^3; потомЪ чтобы взять сумму другой, я беру членЪ $by^2\Delta x$, содержащій вЪ себѣ Δx, безЪ Δy, и нахожу, полагая y постояннымЪ, для суммы онаго by^2x: и какЪ взятая оной суммы разность, полагая x и y перемѣнными, дастЪ точно ту часть предложенной формулы, которой сумму найти надлежало, то изЪ сихЪ двухЪ дѣйствій слѣдуетЪ, что искомая сумма есть $ax^3 + by^2x$, какЪ то удобно и удостовѣриться можно чрезЪ взятіе разности сего выраженія; что всегда наблюдать надлежитЪ.

(116) Означивъ чрезъ $''z$, $'''z$, ^{IV}z, и проч. предъидущіе члены ряда и проч. $'z$, z, z', z'', и проч., будемъ имѣть $z - 'z = \Delta 'z$, $'z - ''z = \Delta ''z$, $''z - '''z = \Delta '''z$, и проч., и $z = \Delta 'z + \Delta ''z + \Delta '''z +$ и проч. $= \Delta('z + ''z + '''z +$ и проч.$)$; и такъ z или такой членъ, какой въ ряду,, и проч. $'''z$, $''z$, $'z$, z. z', z'', z''', и проч.,, взять захочешь, есть не иное что, какъ разность суммы предшествующихъ его членовъ.

Посему какая ниесть функція количества x есть разность суммы всѣхъ функцій, которыя найдутся, поставляя въ нее $x - \Delta x$, $x - 2\,\Delta x$, $x - 3\,\Delta x$, и проч. вмѣсто x (членъ 111); но пространство MPP′M′ (черт. XXIII) можетъ быть почитаемо за нѣкоторую функцію количества x, въ которую естьли поставишь поперемѣнно $x - \Delta x$, $x - 2\,\Delta x$, и проч. вмѣсто x, то получишь предшествующія пространства ′M′PPM, ″M″P′P′M, ‴M‴P″P′M, и проч.; слѣдовательно MPP′M′ есть разность суммы всѣхъ сихъ пространствъ, или такого другаго пространства KHPM, какое взять захочешь. Такимъ же образомъ докажется, что MM′ есть разность такой другой дуги KM, какую взять захочешь, что поверьхность описанная дугою MM′, во время обращенія чертежа около оси AB, есть разность поверьхности описанной дугою KM въ продолженіе того же обращенія, и что тѣло произведенное площадью MPP′M′ есть разность тѣла произведеннаго площадью KHPM и проч. Привзятіи же полной суммы какой ниесть изъ сихъ разностей опредѣлишь произвольную постоянную величину, разсматривая, для какой особенной величины количества x, сія сумма долженствуетъ быть нуль, естьли вопросъ требуетъ, что бы оная сумма дала паче то, нежели всякое другое пространство.

Положимъ, что XMZ есть линея прямая встрѣчающаяся съ діаметромъ въ точкѣ A, такимъ образомъ что AH $= a$, HK $= b$, и имѣющая слѣдственно уравненіемъ $ay = bx$; тогда пространство MPP′M′ будетъ $y\,\Delta x + \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \frac{bx\Delta x}{a} + \frac{b\,\Delta x^2}{2a}$, которой разности полная сумма есть $\frac{b}{2a}x^2 + C$. Теперь, естьли хочешь получить площадь треугольника APM, вопросъ требуетъ, чтобы сумма была нуль, когда $x = o$; что даетъ $C = o$, и для площади треугольника выдетъ $\frac{xy}{2}$. Но естьли трапеціи KHPM требуется площадь, то надобно сумму взять такимъ образомъ, что бы она была нуль, когда $x = a$, что дастъ $C = -\frac{ab}{2}$, и площадь трапеціи будетъ $\frac{xy - ab}{2}$. Естьли сверьхъ того трапеція и тре-

угольникъ долженствуютъ имѣть извѣстную высоту; и именно таковую, что бы было $x = c$; то въ неопредѣленныя выраженія $\frac{xy - ba}{2}$, $\frac{xy}{2}$ поставь на мѣсто x и y ихъ величины c и $\frac{bc}{a}$, и оныя выраженія чрезъ то сдѣлаются $\frac{b}{a} \cdot \frac{c^2 - a^2}{2}$, $\frac{bc^2}{2a}$.

Начала способа измѣненій.

(117) Пусть BMZ (черт. XXIV) будетъ кривая линея, и PM, $= y$, P′M′, $= y'$, двѣ по порядку слѣдующія ординаты, которыя соотвѣтствуютъ абсциссамъ AP, $= x$, AP′, $= x'$; я вообразу себѣ, что взаимное между координатами x и y отношеніе перемѣнилося (какимъ бы то образомъ ни было, или чрезъ измѣненіе параметра, или иначе) и кривая линея изъ перваго своего состоянія перешла въ другое, означенное чрезъ bmz; и на сей *измѣнившейся* кривой линеи взявъ двѣ точки m и m', я проведу двѣ ординаты pm, $= Y$, $p'm'$, $= Y'$, параллельныя ординатамъ кривой BMZ и соотвѣтствующія абсциссамъ Ap, $= X$, Ap', $= X'$. Мы употребили выше знакъ Δ, для означенія разности двухъ по порядку слѣдующихъ ординатъ одной и той же кривой линеи, и разности соотвѣтствующихъ абсциссъ, такимъ образомъ что мы писали $x' - x = \Delta x$, $y' - y = \Delta y$, $X' - X = \Delta X$, $Y' - Y = \Delta Y$. Но здѣсь сверьхъ того надлежитъ принимать въ разсужденіе разность двухъ ординатъ, каковы суть PM, pm, и разность соотвѣтствующихъ имъ абсциссъ, которыя разности происходятъ отъ измѣненія инаго рода, а именно отъ измѣненія во взаимномъ отношеніи координатъ x, y, и которыя по сему не могутъ быть означены прежнимъ знакомъ Δ. Мы для означенія сего инаго рода разностей возмемъ знакъ δ, и будемъ писать $X - x = \delta x$, $Y - y = \delta y$, $X' - x' = \delta x'$, $Y' - y' = \delta y'$ (*). Но ордината Y' въ одно и тоже время равна какъ $y' + \delta y'$, такъ и $Y + \Delta Y$; чего ради будетъ $y + \Delta y + \delta(y + \Delta y) = y + \delta y$

(*) Си особливаго роду разности перемѣнныхъ количествъ называются ихъ *варіаціями*; но какъ собственно варіаціонное изчисленіе въ разсужденіи изчисленія сихъ разностей, варіаціями названныхъ, есть тоже самое, что дифференціальное въ разсужденіи изчисленія обыкновенныхъ разностей; то мы для отличія оныя разности будемъ называть *измѣненіями*.

$+\Delta(y+\delta y)$; откуда выдеть $\delta\Delta y = \Delta\delta y$. И такимъ образомъ $\delta\Delta^2 y = \Delta\delta\Delta y = \Delta^2\delta y$, $\delta\Delta^3 y = \Delta^2\delta\Delta y = \Delta^3\delta y$, ... $\delta\Delta^n y = \Delta^n\delta y$.

(118) Такъ же мы означили чрезъ ΣV сумму какой нибудь функціи V перемѣнныхъ количествъ y и x и ихъ разностей, и мы замѣтили, что $V = \Delta('V + ''V + '''V +$ и проч.); чего ради будеть $\Sigma V = 'V + ''V + '''V +$ и проч. Но по причинѣ что $\delta V = \delta\Delta('V + ''V + '''V +$ и проч.$) = \Delta\delta('V + ''V + '''V +$ и пр.), выдеть $\Sigma\delta V = \delta('V + ''V + '''V +$ и проч.); слѣдовательно, $\delta\Sigma V = \Sigma\delta V$.

Изъ сей ѳеоремы слѣдуетъ, что $\delta\Sigma\Sigma V = \Sigma\delta\Sigma V = \Sigma\Sigma\delta V$, $\delta\Sigma\Sigma\Sigma V = \Sigma\Sigma\delta\Sigma V = \Sigma\Sigma\Sigma\delta V$, и проч. Мы для сокращенія, вмѣсто двойнаго, тройнаго и проч. означенія $\Sigma\Sigma V$, $\Sigma\Sigma\Sigma V$, и проч, по порядку слѣдующихъ суммъ, будемъ писать $\Sigma^2 V$, $\Sigma^3 V$, и проч. Откуда слѣдуетъ, что всегда можно перемѣнить $\delta\Sigma^n V$ на $\Sigma^n\delta V$.

Когда дана будетъ формула $\Sigma V\Delta\delta y$, то можно обратить оную въ сію $V y - \Sigma\Delta V\delta y'$. Въ самомъ дѣлѣ, естьли положишь $\Sigma V\Delta\delta y = V\delta y + K$, гдѣ K неизвѣстная функція, которую опредѣлить надлежитъ, то будешь имѣть $V\Delta\delta y = V\Delta\delta y + \Delta V\delta y + \Delta V\Delta\delta y + \Delta K$, и $\Delta K = -\Delta V(\delta y + \Delta\delta y) = -\Delta V\delta y'$; слѣдственно $\Sigma V\Delta\delta y = V\delta y - \Sigma\Delta V\delta y'$.

Естьли предложится сія другая формула $\Sigma V\Delta^2\delta y$, то ее перемѣни сперва на слѣдующую $V\Delta\delta y - \Sigma\Delta V\Delta\delta y$; потомъ по причинѣ что $\Sigma\Delta V\Delta\delta y' = \Delta V\delta y' - \Sigma\Delta^2 V\delta y''$, будешь имѣть $\Sigma V\Delta^2\delta y = V\Delta\delta y - \Delta V\delta y' + \Sigma\Delta^2 V\delta y''$.

Такимъ же образомъ докажется, что $\Sigma V\Delta^3\delta y = V\Delta^2\delta y - \Delta V\Delta\delta y' + \Delta^2 V\delta y'' - \Sigma\Delta^3 V\delta y'''$, и что вообще

$\Sigma V\Delta^n\delta y = V\Delta^{n-1}\delta y - \Delta V\Delta^{n-2}\delta y' + \Delta^2 V\Delta^{n-3}\delta y'' -$ . . . . $\pm\Sigma\Delta^n V\delta y^{n'}$...

(119) Въ послѣдствіи мы сдѣлаемъ симъ началамъ многія приложенія; но теперь удовольствуемся разрѣшеніемъ слѣдующаго вопроса: Между всѣми многоугольниками, какіе токмо изъ какого ниесть числа данныхъ сторонъ составить возможно, найти тотъ, которой имѣетъ наибольшую площадь? Естьли мы означимъ одинъ изъ сихъ многоугольниковъ чрезъ P, и непосредственно за нимъ слѣдующій многоугольникъ чрезъ $P + \delta P$, то δP должно быть количество весьма малое, и даже мы положимъ его столь малымъ, что кромѣ первой, всякую другую отъ него степень презрѣть можно. (*) Достигнувъ такимъ образомъ до наибольшаго многоугольника, измѣненіе его изъ положительнаго сдѣлается отрицательнымъ; что требуетъ чтобы оное было сперва нуль; слѣдовательно, ежели Π есть наибольшій многоугольникъ, какой токмо изъ того же числа данныхъ сторонъ составить возможно, будетъ $\delta \Pi = 0$. Изъ вершинъ угловъ M, N, O сего многоугольника (черт. XXV) я опущу на прямую AB перпендикуляры MP, NQ, OR, и принявъ въ разсужденіе одну изъ трапецій, какъ NQRO, я означу AQ чрезъ x, QN чрезъ y, QR чрезъ Δx, rO чрезъ Δy, и получу для площади оной $(y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x$; а по сему количество которое должно

(*) Сіе положеніе въ самой строгости совсѣмъ не нужно; но авторъ не показавъ еще для строжайшаго рѣшенія сего вопроса потребныхъ началъ принужденъ былъ сдѣлать оное. Въ самомъ дѣлѣ не по приближенію и не отметая за малостію вторыя степени варіацій $\delta\Delta x$, $\delta\Delta y$, найдемъ изъ уравненія $\delta\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$ слѣдующее $\Delta x \delta\Delta x + \Delta x \delta\Delta y = 0$, но и самой строгости доказать можно, что варіація выраженія $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ есть $\frac{\Delta x \delta \Delta x + \Delta y \delta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, и что по сему изъ уравненія $\delta\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$ выдетъ сіе $\Delta x \delta \Delta x + \Delta y \delta \Delta y = 0$. Такъ же по самой строгости, а не по приближенію докажется, что уравненіе $\delta \Sigma (y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x = 0$ дѣйствительно перемѣниться можетъ въ слѣдующее $\Sigma(\Delta x \delta y + \frac{\Delta x}{2} \delta \Delta y + (y + \frac{\Delta y}{2}) \delta \Delta x) = 0$.

быть наибольшее, будетъ $\Sigma(y+\frac{\Delta y}{2})\Delta x$, и изъ того выдетъ $\delta\Sigma(y+\frac{\Delta y}{2})\Delta x=0$. Сверхъ того, поелику многоугольники, изъ коихъ мы ищемъ наибольшій, имѣютъ стороны данныя, должно быть $\delta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$; откуда, удержавъ токмо первыя степени измѣненій $\delta\Delta x$, $\delta\Delta y$, найдешь $\Delta x\delta\Delta x+\Delta y\delta\Delta y=0$.

Положивъ сіе, я возьму уравненіе $\delta\Sigma(y+\frac{\Delta y}{2})\Delta x=0$, и перемѣню его въ сіе $\Sigma(\Delta x\delta y+\frac{\Delta x}{2}\delta\Delta y+(y+\frac{\Delta y}{2})\delta\Delta x)=0$. Потомъ когда вмѣсто измѣненія Δx поставлю его величину $-\frac{\Delta y}{\Delta x}\delta\Delta y$, то оное уравненіе сдѣлается
$\Sigma(\Delta x\delta y+(\frac{\Delta x}{2}-\frac{y\Delta y}{\Delta x}-\frac{\Delta y^2}{2\Delta x})\delta\Delta y)=0$, или еще, полагая для краткости $\frac{\Delta x}{2}-\frac{y\Delta y}{\Delta x}-\frac{\Delta y^2}{2\Delta x}=\psi$, учинится
$\Sigma(\Delta x\delta y+\psi\delta\Delta y)=0$.

(120) Вмѣсто Δy я поставлю $y'-y$, и преображу предъидущее уравненіе въ сіе $\Sigma((\Delta x-\psi)\delta y+\psi\delta y')=0$; но естьли я положу $(\Delta x-\psi)\delta y+\psi\delta y'=V$, то получу $'V=(\Delta'x-'\psi)\delta'y+'\psi\delta y''$, $''V=(\Delta''x-''\psi)\delta''y+''\psi\delta y'''$, $'''V=(\Delta'''x-'''\psi)\delta'''y+'''\psi\delta y''''$, и проч., и по причинѣ что $\Sigma V=V+'V+''V+$ и проч., буду имѣть уравненіе
$'\psi\delta y-('\psi-''\psi-\Delta x)\delta'y-(''\psi-'''\psi-\Delta'x)\delta''y-(''\psi-^{IV}\psi-\Delta''x)\delta'''y$ - и проч. $=0$, или
$'\psi\delta y-\Delta(''\psi-'x)\delta'y-\Delta('''\psi-''x)\delta''y-\Delta(^{IV}\psi-'''x)\delta'''y-$ и проч. $=0$.

Я придамъ суммѣ ΣV нѣкоторое опредѣленное пространство, и y да будетъ ордината, соотвѣтствующая концу сей суммы. Но не могу ли я положить ось AB пресѣкающею многоугольникъ такимъ образомъ, чтобы ординаты, началу и концу суммы ΣV соотвѣтствующія, были равны нулю, какъ и ихъ измѣненія? Въ семъ положеніи предъидущее уравненіе сдѣлается $\Delta('\psi-x)\delta'y+\Delta(''\psi-'x)\delta''y+\Delta(^{IV}\psi-'''x)\delta'''y+$ и проч. $=0$; и какъ сіе уравненіе долженствуетъ имѣть мѣсто, какое бы ни было измѣненіе, чрезъ δ означенное, то будешь имѣть

$\Delta({}^{\prime\prime}\psi - {}^{\prime}x) = 0$, $\Delta({}^{\prime\prime\prime}\psi - {}^{\prime\prime}x) = 0$, $\Delta({}^{IV}\psi - {}^{\prime\prime\prime}x) = 0$, и проч. и слѣдовательно вообще $\psi - x = f$, гдѣ f произвольное постоянное количество; или, вмѣсто x' поставляя $x + \Delta x$ и вмѣсто буквы ψ ея величину, будешь имѣть

$$x + \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta}{\Delta x} + \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} + f = 0.$$

Я умножу сіе уравненіе на Δx и каждаго его члена возьму сумму; что мнѣ дастъ уравненіе $x^2 + y^2 + 2fx = g$ принадлежащее къ кругу, котораго центръ на оси AB. И такъ отсюда слѣдуетъ, что наибольшій многоугольникъ, какой токмо изъ данныхъ сторонъ составить можно, есть тотъ, который въ кругѣ вписаться можетъ.

(121) Перемѣняя $\delta\Delta y$ на $\Delta\delta y$; получишь уравненіе

$$\Sigma(\Delta x\,\delta y + \psi\,\Delta\delta y) = 0.$$

Но $\Sigma\psi\Delta\delta y = \psi\delta y - \Sigma\Delta\psi\delta y' = \psi\delta y - \Delta'\psi\delta y - \Sigma\Delta'\psi\delta y$ [ибо когда представишь себѣ рядъ и проч. $\Delta''\psi\delta y$, $\Delta'\psi\delta y$, $\Delta\psi\delta y$, то по предъидущему выйдетъ
$\Sigma\Delta\psi\,y' =$ и проч. $+ \Delta''\psi\delta y + \Delta'\psi\delta y = \Sigma\Delta'\psi\delta y + \Delta'\psi\delta y$];
чего ради наше уравненіе сдѣлается

$$(\psi - \Delta'\psi)\,\delta y + \Sigma\Delta(x - {}'\psi)\,\delta y = \text{пост. колич.}$$

[ибо для полученія полной суммы $\Sigma\Delta(x - {}'\psi)\delta y$ надлежитъ всегда прибавлять постоянное количество].

Удобно усмотришь, что сіе постоянное количество равно тому во что обратится $(\psi - \Delta'\psi)\delta y$, когда положишь $\Sigma\Delta(x - {}'\psi)\delta y = 0$; и сего ради означивъ чрезъ a ординату соотвѣтствующую сей точкѣ, и чрезъ A то, чѣмъ сдѣлается $\psi - \Delta'\psi$, когда $y = a$, мы будемъ имѣть уравненіе

$$(\psi - \Delta'\psi)\,\delta y + \Sigma\Delta(x - {}'\psi)\,\delta y = A\delta a.$$

Сверхъ того естьли мы придадимъ суммѣ $\Sigma\Delta(x - {}'\psi)\delta y$ нѣкоторое опредѣленное пространство; то означивъ чрезъ b ординату соотвѣтствующую концу сей суммы, и чрезъ B то,

чѣмъ сдѣлается $\psi - \Delta'\psi$, когда положишь $y = b$, преднайденное уравненіе перемѣнится въ сіе

$$B\delta b + \Sigma\Delta(x - '\psi)\delta y = A\delta a.$$

Положимъ, какъ и прежде, ось AB пресѣкающею многоугольникъ такимъ образомъ, что бы a и b были нуль, какъ и δa и δb; тогда мы получимъ уравненіе $\Sigma\Delta(x - '\psi)\delta y = 0$, которое вообще даетъ $x' - \psi =$ постоян. колич. Сіе заключеніе сходствуетъ съ выведеннымъ выше другимъ образомъ.

О сысканіи въ предложенномъ ряду общаго члена и суммы.

(122) Пусть Ax функція количества x и постоянныхъ; естьли вмѣсто x поставишь по перемѣнно въ нее 0, 1, 2, 3, 4, и проч., и симъ образомъ составишь рядъ A, $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, и проч., то Ax будетъ то, что мы выше назвали общимъ членомъ сего ряда. Чтобы найти его выраженіе, я положу (член. 110) $A1 - A = a$, $A2 - 2A1 + A = b$, $A3 - 3A2 + 3A1 - A = c$, $A4 - 4A3 + 6A2 - 4A1 + A = d$, и проч. и я найду $A1 = A + a$, $A2 = A + 2a + b$, $A3 = A + 3a + 3b + c$, $A4 = A + 4a + 6b + 4c + d$ . . . . . $Ax = A + ax + bx\frac{x-1}{2} + cx.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3} + dx.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.\frac{x-3}{4} +$ и проч. Сія формула служитъ къ найденію общаго члена какого нибудь ряда, и она дастъ его точно всякой разъ, когда возможно будетъ достигнуть къ разностямъ равнымъ нулю. Для примѣра я возьму рядъ 1, 4, 9 16, 25, и проч. квадратовъ натуральныхъ чиселъ; будетъ $a = 3$, $b = 2$, c и слѣдующія разности равны нулю; слѣдовательно общій членъ сего ряда есть $1 + 3x + 2x.\frac{x-1}{2} = (1 + x)^2$. Пусть еще будетъ рядъ кубовъ 1, 8, 27, 64, и проч.; будетъ $a = 7$, $b = 12$, $c = 6$, d и слѣдующія разности равны нулю; слѣдовательно общій членъ сего ряда есть $1 + 7x + 12x.\frac{x-1}{2} + 6x.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3} = (1 + x)^3$.

(123) Представимъ себѣ другой рядъ $S1$, $S2$, $S3$, $S4$, и проч., таковый что

$S1 = A$; мы будемъ имѣть	$S1 = A$,
$S2 = A + A1$,	$S2 = 2A + a$
$S3 = A + A1 + A2$,	$S3 = 3A + 3a + b$,
$S4 = A + A1 + A2 + A3$,	$S4 = 4A + 6a + 4b + c$
и проч.	и проч.

Слѣдовательно Sx, или сумма числа членовъ x ряда A, $A1$, и проч., равна

$$xA + x.\frac{x-1}{2}a + x.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.b + x.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.\frac{x-3}{4}.c + \text{и проч.}$$

Откуда найдется сумма числа x первыхъ членовъ ряда состоящаго изъ квадратовъ

$$x + 3x.\frac{x-1}{2} + x.\overline{x-1}.\frac{x-2}{3} = \frac{x+3x^2+2x^3}{6},$$

и сумма числа x первыхъ членовъ ряда состоящаго изъ кубовъ

$$x + 7x.\frac{x-1}{2} + 2x.\overline{x-1}.\overline{x-2} + x.\overline{x-1}.\overline{x-2}.\frac{x-3}{4} = \frac{x^2+2x^3+x^4}{4}.$$

Но формула теперь нами употребленная можетъ дать точно сумму какого ниесть числа членовъ предложеннаго ряда тогда токмо, когда возможно будетъ достигнуть до разностей равныхъ нулю; слѣдующій способъ гораздо болѣе общій.

(124) Поелику членъ Ax ряда A, $A1$, $A2$, и проч. есть разность суммы предшествующихъ его членовъ, то означивъ чрезъ σ сію сумму, будешь имѣть $Ax = \Delta\sigma$, и $\sigma = \Sigma Ax +$ постоян. колич. Надлежитъ замѣтить, что здѣсь разность Δx взята за единицу, понеже члены, которые предшествуютъ Ax, получаются, поставляя вмѣсто x по перемѣнно $x-1$, $x-2$, $x-3$, и проч.

Взявъ Δx за единицу, формулы члена 113 дадутъ
$\Sigma 1 = x$, $\Sigma x = \frac{x^2-x}{2}$, $\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$, $\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$, $\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$, $\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12}$, и проч.
Положивъ сіе, пусть $Ax = (1+x)^2$; будетъ $\sigma = c + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$; и естьли хочешь имѣть сумму отъ перваго члена со включеніемъ онаго, то ясно видно, что оная должна сдѣлаться нуль, когда $x = 0$; что даетъ $c = 0$, и сумма числа x первыхъ членовъ ряда, состоящаго изъ квадратовъ натуральныхъ чиселъ, будетъ $\frac{x+3x^2+2x^3}{6}$.
Ежели $Ax = (1+x)^3$, то будетъ $\sigma = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$, естьли хочешь имѣть сумму отъ перваго члена со включеніемъ она-

го, или сумму числа x первыхъ членовъ ряда, которой состоитъ изъ кубовъ натуральныхъ чиселъ. (*)

(125) Поелику дробь $\frac{2}{(x+1)(x+2)}$ есть общій членъ ряда $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$ и проч., коего знаменатели суть треугольныя числа; то для найденія суммы какого ниесть числа членовъ онаго ряда, будешь имѣть уравненіе $\sigma = c + \Sigma \frac{2}{(x+1)(x+2)} =$ (для члена 115) $c - \frac{2}{x+1}$. Естьли хочешь имѣть сію сумму отъ перваго члена со включеніемъ онаго, то она должна сдѣлаться

(*) Здѣсь помнить надлежитъ, что за общій членъ Ax ряда приемлется послѣдующій того, которой занимаетъ x^e мѣсто. Послѣ чего удобно будетъ уразумѣть, какимъ образомъ найдены суммы слѣдующихъ рядовъ:

1) Ряда a, a, a, a, и проч. занимающій x^e мѣсто членъ есть a, общій Ax есть такъ же a и сумма $\sigma = \Sigma a = a\Sigma 1 = ax$.

2) Ряда $a, a+b, a+2b, a+3b$, и проч. занимающій x^e мѣсто членъ есть $a+b(x-1)$, общій $Ax = a + ax$ и сумма $\sigma = \Sigma a + b\Sigma x = ax + \frac{b(x^2-x)}{2} = \frac{(2a+b(x-1))x}{2}$.

3) Ряда $1, 3, 6, 10, 15$, и проч. занимающій x^e мѣсто членъ есть $\frac{x^2+x}{2} = \frac{1}{2}x(x+1)$, общій $Ax = \frac{1}{2}(x+1)(x+2)$ и сумма $\sigma = \frac{1}{2}\Sigma(x+1)(x+2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)}{3}$. Смотри примѣчаніе къ члену 113 му.

4) Ряда $1.4.7.10, 4.7.10.13, 7.10.13.16, 10.13.16.19$, и проч. занимающій x^e мѣсто членъ есть $x(x+3)(x+6)(+9)$, общій $Ax = (x+3)(x+6)(x+9)(x+12)$, и сумма $\sigma = \frac{x(x+3)(x+6)(x+9)(x+12)}{5.3}$, ибо здѣсь $\Delta x = 3$.

5) Ряда, $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}$, и проч. занимающій x^e мѣсто членъ есть $\frac{1}{x(x+1)}$, общій $Ax = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ и сумма $\sigma = \Sigma\frac{1}{(x+1)(x+2)} = a - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, когда возмется отъ перваго члена со включеніемъ онаго. Смотри членъ 115.

6) Ряда $\frac{1}{1.5}, \frac{1}{5.9}, \frac{1}{9.13}, \frac{1}{13.17}$, и проч. занимающій x^e мѣсто членъ есть $\frac{1}{x(x+4)}$, общій $Ax = \frac{1}{(x+4)(x+8)}$ и сумма $\sigma = \Sigma\frac{1}{(x+4)(x+8)} = a - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x+3}{x+4}$. Смотри членъ 115 или примѣчаніе къ оному.

нуль, когда $x = 0$; что дает $c = 2$, и полная сумма будет $\frac{2c}{x+1}$. Но естьли требуется сумма того же ряда от члена mго, со изключением онаго, то надобно ее взять таким образом, что бы она была нуль, когда $x = m$; что дает $c = \frac{2m}{m+1}$, и полная сумма в сем случаѣ будет $-\frac{2m}{m+1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{2x}{x+1} - \frac{2m}{m+1}$.

В сей формулѣ положи $x = m + n$, и будешь имѣть сумму числа членов n предложеннаго ряда от члена mго, со изключеніем онаго.

Ряды чисел образованіе приемлющих,	*общіе их членые,*
$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, и проч.	$\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}$,
$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{35}, \frac{1}{56}$, и проч.	$\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,
$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{70}, \frac{1}{126}$, и проч.	$\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$,
$1, \frac{1}{6}, \frac{1}{21}, \frac{1}{56}, \frac{1}{126}, \frac{1}{252}$, и проч.	$\frac{1.2.3.4.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$,
и проч.	и проч.

Полныя суммы начиная от перваго члена, со включеніем онаго.

$$2 - \frac{1.2}{x+1},$$
$$\frac{3}{2} - \frac{1.3}{(x+1)(x+2)},$$
$$\frac{4}{3} - \frac{1.2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$\frac{5}{4} - \frac{1.2.3.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)},$$

Откуда видно, что взятіе суммы ряда, коего извѣстен общій член, зависит от найденія суммы предложенной разности; но не возможно еще здѣсь разсматривать сіи вопросы со всеобщностію, каковой они подлежать могут. (*)

(*) Между тѣм в концѣ сея книги, в прибавленіях, мы присовокупим к сему послѣ г. Боссю о сысканіи общаго члена и суммы в рядах возвращающихся, как и в тѣх, кои состоят из синусов или косинусов дуг кратных; что оный г. Боссю учинил весьма достопримѣчательным образом.

О вставливании въ ряды новыхъ членовъ.

(126) Въ предъидущихъ членахъ мы полагали ординаты равно отстоящими, или все тоже, рядъ A, $A1$, $A2$, и проч. произходящимъ отъ постановленія въ общій членъ 0, 1, 2, 3, 4, и проч. вмѣсто x; но естьли хочешь, чтобы оныя ординаты были не равно отстоящія, то означь разстоянія ихъ до непремѣнной точки чрезъ a, b, c, d, e, и проч. или все тоже, означь чрезъ a, b, c, d, e, и проч. количества, которыя поставить надлежитъ въ общій членъ вмѣсто x; изъ чего произойдетъ рядъ A, $A1$, $A2$, и проч. Потомъ положи

$\frac{A1 - A}{b - a} = B$, $\frac{A2 - A1}{c - b} = B1$, $\frac{A3 - A2}{d - c} = B2$, $\frac{A4 - A3}{e - d} = B3$, и проч.

$\frac{B1 - B}{c - a} = C$, $\frac{B2 - B1}{d - b} = C1$, $\frac{B3 - B2}{e - c} = C2$, и проч.

$\frac{C1 - C}{d - a} = D$, $\frac{C2 - C1}{e - b} = D1$, и проч.

$\frac{D1 - D}{e - a} = E$, и проч.

и проч.

Изъ перваго уравненія извлечешь $A1 = A + A(b - a)$, изъ втораго $A2 = A + B(c - a) + C(c - a)(c - b)$, изъ третьяго $A3 = A + B(d - a) + C(d - a)(d - b) + D(d - a)(d - b)(d - c)$, и проч.; откуда удобно найдешь, что, естьли означится чрезъ Y ордината, которой разстояніе отъ непремѣнной точки есть x, будетъ $Y = A + B(x - a) + C(x - a)(x - b) + D(x - a)(x - b)(x - c) +$
$E(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) +$ и проч.

Мы сдѣлаемъ употребленіе сей формулѣ, при опредѣленіи по нѣсколькимъ полуденнымъ высотамъ солнца того мгновенія, въ кое бываетъ солнцестояніе.

Высоты солнечнаго центра, исправленныя въ преломлении лучей и параллаксѣ, и усмотрѣнныя въ слѣдующіе дни Іюня мѣсяца 1788 года.

16 Іюня	64° 33′ 47″, 1	A
18	36 36, 8	A1
20	37 42, 8	A2
23	36 17, 5	A3
25	33 16, 5	A4.

Мы означимъ чрезъ a, b, c, d, e промежутки наблюденій, и мы будемъ имѣть $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 7$, $e = 9$; сверьхъ того

$A1 - A = 2' 49'',7 = 169'',7$, откуда выдетъ $B = 84,85$
$A2 - A1 = 1' 6'' = 66$, $B1 = 33$,
$A3 - A2 = -1' 25'',3 = -85,3$, $B2 = -28,4333$,
$A4 - A3 = -3' 1'' = -181$, $B3 = -90,5$.

Потомъ мы найдемъ

$C = \frac{-51,85}{4} = -12,9625$, $D = \frac{0,6759}{7} = 0,0966$,
$C1 = \frac{-61,4333}{5} = -12,2866$, $D1 = \frac{-0,1267}{7} = -0,0181$,
$C2 = \frac{-62,0667}{5} = -12,4133$, $E = \frac{-0,1147}{9} = -0,01276$,

и $Y = A + 84,85\,x - 12,96\,x(x-2) + 0,1\,x(x-2)(x-4) - 0,01\,x(x-2)(x-4)(x-7)$.

Но поелику сія величина количества Y должна быть наибольшая, то (по член. 11) будетъ имѣть $\delta Y = 0$, и раздѣляя на δx, получишь уравненіе третьей степени

$84,85 - 12,96\,(2x-2) + 0,1\,((x-2)(x-4) + x(x-4) + x(x-2)) - 0,01\,((x-2)(x-4)(x-7) + x(x-4)(x-7) + x(x-2)(x-7) + x(x-2)(x-4)) = 0$,

которое удобно привести можно къ сему

$$4x^3 - 69x^2 + 2812x - 11213 = 0,$$

изъ коего найдется $x = 4,33$, и величина высоты Y въ самое солнцестояніе будетъ $64° 37' 44'',15$.

ГЛАВА IV.

О способѣ древнихъ Геометровъ, извѣстномъ подъ именемъ способа предѣловъ. (*)

(127) Говорится о величинѣ, что имѣетъ предѣломъ другую величину, когда вообразить себѣ, что она можетъ къ сей другой приближиться такъ, что будетъ съ нею разниться на количество столь малое, какъ хочешь, не могши никогда совсѣмъ слиться. (**) Изъ сего опредѣленія слѣдуетъ, что двѣ величины, которыя суть предѣлы одной и той же величины, непосредственно будутъ равны между собою; ибо, естьли бы между ими была какая разность, то бы третья величина не могла приближиться къ одной изъ первыхъ двухъ болѣе нежели сія разность; что противно положенію. Другое предложеніе не менѣе ясное [которое изъ предъидущаго опредѣленія слѣдуетъ] состоитъ въ томъ, что естьли двѣ величины, которыя непрестанно возрастаютъ или убываютъ, сохраняютъ между собою одно непремѣнное содержаніе, то оное содержаніе будетъ такъ же содержаніе и предѣловъ тѣхъ величинъ. (***) На сихъ то двухъ предложеніяхъ весь способъ предѣловъ основанъ (****);

(*) Способъ предѣловъ существенно разнится отъ способа древнихъ Геометровъ; что я ясно показалъ въ первой книгѣ математическихъ трудовъ моихъ, смотри тамо примѣчанія къ стран. 28, 45 и 152.

(**) Сіе опредѣленіе подвержено неудобству, которое я изъяснилъ въ упомянутой моей книгѣ, смотри стран. 31. Тутъ же найдешь другое точнѣйшее сему слову опредѣленіе, смотри стран. 34.

(***) Сіе предложеніе получившее начало свое отъ 2го предложенія XII книги Евклидовыхъ Елементовъ, въ упомянутомъ моемъ сочиненіи строго доказано, смотри стран. 152 и 153.

(****) Сихъ двухъ предложеній, которыя можно назвать начальными истинами способа предѣловъ, для Геометріи первоначальной древнихъ . . .

мы начнемъ приложенїемъ оныхъ къ доказательству нѣкоторыхъ первоначальной Геометрїи ѳеоремъ.

но довлѣетъ, какъ то изъ приведенной выше первой книги математическихъ трудовъ моихъ читатель ясно усмотрѣть можетъ; но для Геометрїи трансцендентной новыхъ, потребны еще многїя другїя истины, коимъ авторъ здѣсь сдѣлалъ скрытое употребленїе, не токмо не доказавъ, но и не наименовавъ ихъ, и кои состоятъ въ слѣдующемъ: Когда двѣ величины X, Y, которыя купно возрастаютъ, или купно убываютъ, или изъ которыхъ одна возрастаетъ, а другая убываетъ, имѣютъ предѣлы A и B; то 1) сумма $X+Y$ имѣетъ предѣломъ сумму предѣловъ $A+B$, или равна оной суммѣ предѣловъ, когда сумма $X+Y$ постоянно одну и ту же величину имѣетъ; 2) разность X и $-Y$ имѣетъ предѣломъ разность предѣловъ $A-B$, или равна оной разности предѣловъ, когда разность $X-Y$ постоянно одну и ту же величину сохраняетъ; 3) произведенїе XY имѣетъ предѣломъ произведенїе предѣловъ AB, или равно оному произведенїю предѣловъ, когда произведенїе XY одну и ту же величину имѣетъ, и 4) частное $\frac{X}{Y}$ имѣетъ предѣломъ частное предѣловъ $\frac{A}{B}$, или равно оному частному предѣловъ, когда частное $\frac{X}{Y}$ постоянно одну и ту же величину сохраняетъ.

Сверьхъ того 5) X^n имѣетъ предѣломъ ту же степень предѣла A^n и 6) корень $\sqrt[n]{X}$ имѣетъ предѣломъ тотъ же корень предѣла $\sqrt[n]{A}$.

Для меня здѣсь довольно упомянуть о сихъ на исчисленїи основанныхъ истинахъ, или лучше алгебраическихъ началахъ способа предѣловъ, потому что я буду имѣть случай со всѣми подробностями издать ихъ въ другомъ сочиненїи.

Приложенiе изъясненныхъ началъ способа предѣловъ къ найденiю площади круга, поверхности и толщины конуса и шара, и имѣющагося содержанiя между кругомъ и еллипсисомъ; такъ же шаромъ и еллипсоидомъ.

(128) Пусть x сторона правильнаго многоугольника вписаннаго въ кругѣ, котораго радiусъ r, и n число сторонъ онаго многоугольника; то $\frac{nx}{r}$ будетъ содержанiе периметра многоугольника къ радiусу. Явно что чѣмъ n будетъ увеличиваться, тѣмъ $\frac{nx}{r}$ болѣе станетъ приближаться къ содержанiю окружности круга къ радiусу, никогда однакожъ не достигнувъ онаго; чего ради второе содержанiе есть предѣлъ перваго. Мы впредь содержанiе полуокружности круга къ радiусу будемъ означать чрезъ π, и потому $2\pi r$ всегда изобразитъ окружность, коея радiусъ r.

Когда радiусъ 1, тогда вмѣсто π берется 3,141592653 5 . . . . и сiе приближенiе весьма уже велико (*); вотъ какъ къ оному достигнуть можно: означивъ чрезъ p синусъ дуги и чрезъ q синусъ половины сея дуги, получишь между p и q уравненiе $p = 2q\sqrt{1 - q^2}$; посредствомъ сего уравненiя ищи синусы дугъ, кои суть непрерывныя половины половинъ дуги 30°, которой синусъ извѣстенъ; положимъ, что чрезъ сiе достигнешь къ синусу дуги въ $1^{II}\ 38^{III}\ 52^{VI}\ 37^{V}\ 1^{VI}\ 52^{VII}\ 30^{VIII}$, которой синусъ найдется 0,0000079894 8327005; сего ради хорда двой-

(*) Самое большее приближенiе есть Махиново и Лагниво, въ которомъ $\pi =$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2 30781640628620899862803482534211706799821480865132723065470938446, и проч.

ной дуги будетъ 0,0000159789665401, и оная дуга содержится въ окружности 393216 разъ, сирѣчь въ кругѣ вписанъ многоугольникъ 393216 сторонъ. Умноживъ найденную хорду на сіе число; получишь 6,2831853070319616 для приближенной, но меньшей величины окружности. И какъ тангенсъ той же самой дуги есть 0,0000079894832703, то 0,0000159789665406 будетъ сторона описаннаго многоугольника, имѣющаго 393216 сторонъ, и 6,2831853072285696 выдетъ для приближенной, но большей величины окружности. (*) И такъ число, чрезъ которое можно точно изобразить окружность, коея радіусъ 1, содержится между двумя найденными нами числами; и естьли впишешь и опишешь многоугольникъ большаго числа сторонъ, то найдешь два числа, еще менѣе между собою разнствующія, и потому такъ же получишь и величину буквы π еще менѣе отъ истиннаго содержанія полуокружности круга къ радіусу отдаляющуюся. (**)

(*) Сей способъ находить по приближенію содержаніе окружности круга къ діаметру есть самой первой, которой уму представиться долженъ, и Архимедъ, первый изобрѣтатель сего приближенія, употребилъ въ сочиненіи своемъ, de circuli dimensione, тотъ же самой способъ; но въ самомъ изчисленіи поступилъ совсѣмъ инымъ весьма достопримѣчательнымъ образомъ. Читатель можетъ получить о семъ понятіе изъ Академическихъ извѣстій на 1779 годъ, часть III, стр. 343, или еще лучше, изъ Архимедовыхъ теоремъ выбранныхъ Такетомъ и изданныхъ на россійскомъ языкѣ 1735 году, стр. 298 и слѣдующія. Новые Геометры нашли многіе другіе сокращенные для сего способы, и по изобрѣтеніи дифференціальнаго изчисленія вопросъ сей не заключаетъ въ себѣ ни малѣйшей трудности, какъ то мы ниже увидимъ.

(**) Собственно совсѣмъ нѣтъ содержанія между полуокружностію и радіусомъ круга, по тому что окружность съ своимъ діаметромъ не соизмѣрима; что отъ части видно изъ изчисленія Архимедова, о коемъ мы въ предъидущемъ примѣчаніи упомянули, и что послѣ славнаго Ламберта весьма удовлетворительно доказалъ г. Лежандръ, въ елементахъ своихъ Геометріи. Мы ниже, гдѣ пристойнѣе будетъ, не упустимъ предложить сіе доказательство.

Означивъ чрезъ u стрѣлу, получишь для площади всякаго правильнаго многоугольника вписаннаго въ кругѣ, котораго радіусъ r, $\frac{nx}{2r}(r^2 - ru)$; и какъ чѣмъ u болѣе убываетъ, тѣмъ сіе количество болѣе приближается къ равенству съ πr^2, то явствуетъ, что оное второе количество есть предѣлъ перваго. Но кругъ есть такъ же предѣлъ всѣхъ вписанныхъ многоугольниковъ; слѣдовательно онъ равенъ πr^2.

(129) Поелику поверьхность конуса SABDE (черт. XXVI) есть предѣлъ поверхностей всѣхъ пирамидъ, имѣющихъ вершиною точку S и основаніемъ многоугольники въ кругѣ ABDE вписанные, такъ же и самой конусъ есть предѣлъ всѣхъ сихъ самыхъ пирамидъ; то естьли можно будетъ найти другой предѣлъ поверьхностей оныхъ пирамидъ, и другой предѣлъ самыхъ пирамидъ, будешь имѣть поверьхность и толщину конуса.

Въ самомъ дѣлѣ вообразимъ себѣ правильную пирамиду, коея ребро y и основаніе одинъ изъ правильныхъ многоугольниковъ вписанныхъ въ кругѣ, коего радіусъ r; тогда означивъ чрезъ x сторону многоугольника и чрезъ u стрѣлу, найдешь для поверьхности сея пирамиды, не приемля въ разсужденіе основанія, $\frac{nx}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$; что, по причинѣ $\frac{x^2}{4} = 2ru - u^2$, $= \frac{nx}{2r} r\sqrt{y^2 - 2ru + u^2}$. И какъ сіе выраженіе поверхности всякой правильной пирамиды тѣмъ болѣе приближается къ равенству съ πry, чѣмъ u будетъ меньше, то слѣдуетъ, что πry есть предѣлъ онаго, и слѣдственно есть поверьхность прямаго конуса, котораго радіусъ r и косой бокъ y, когда не приемлется въ разсужденіе основаніе.

Выраженіе же толщины всякой пирамиды, имѣющей h высотою и основаніемъ тотъ же, что и прежде многоугольникъ, найдется $= \frac{h}{3} \cdot \frac{nx}{2r}(r^2 - ru)$, котораго количества предѣлъ есть

$\frac{h}{3}\pi r^2$; и такъ толщина прямаго или косаго конуса, коего радїусъ основанія r и высота h, есть $\frac{h}{3}\pi r^2$. Вотъ нѣкоторыя присовокупленія, коимъ мы въ послѣдствіи сдѣлаемъ употребленіе.

(130) Да будетъ прямой усѣченный параллельно основанїю конусъ, и да имѣетъ онъ высоту h', косый бокъ y', радіусъ въ верьхнемъ основаніи r', и въ нижнемъ r; то означивъ косой бокъ цѣлаго конуса чрезъ y, найдешь для поверьхности усѣченнаго конуса не приемля въ разсужденїе основаній, $\pi ry - \pi r'(y - y')$; но поелику $y' : y : y - y' = r - r' : r : r'$, то поставляя вмѣсто y и $y - y'$ ихъ величины, выдешь для искомой поверьхности $\pi y' \frac{r^2 - r'^2}{r - r'} = \pi y'(r + r')$.

Означивъ же чрезъ h высоту цѣлаго конуса, будетъ толщина усѣченнаго равна $\frac{h}{3}\pi r^2 - \frac{h - h'}{3}\pi r'^2$; но поелику $h' : h : h - h' = r - r' : r : r'$, то поставляя вмѣсто h и $h - h'$ ихъ величины, выдетъ толщина усѣченнаго конуса $= \frac{\pi h'}{3} \cdot \frac{r^3 - r'^3}{r - r'} = \frac{\pi h'}{3}(r^2 + rr' + r'^2)$.

Треугольникъ BPD (черт. XXVIII), имѣющїй прямой уголъ въ P, совершивъ цѣлое обращенїе около линеи BD, какъ оси, произведетъ тѣло, котораго выраженїе будетъ $\frac{BD}{3} \cdot \pi(PK)^2$, гдѣ PK перпендикулярна къ BD; но поверьхность въ тоже время описанная линеею PD равна $\pi . PK . PD$, и $PK . BD = PD . PB$; слѣдовательно упомянутое тѣло равно описанной линеею PD поверхности, умноженной на $\frac{BP}{3}$. Да будетъ по произволенїю протянута прямая BR, найдешь, проведши RV перпендикулярно къ BD, что тѣло произведенное треугольникомъ BRD равно $\frac{BD}{3} \cdot \pi(RV)^2$. Но $DR : RV = DP : PK = BD : BP$, и сверьхъ того поверьхность описанная линеею DR равна $\pi . RV . DR$; слѣдовательно тѣло произведенное треугольникомъ BRD равно описанной линеею DR поверхности, умноженной на $\frac{BP}{3}$. Такъ же

тѣло произведенное треугольникомъ BPR равно описанной линеею PR поверьхности, умноженной на $\frac{BP}{3}$; ибо сїе тѣло равно тѣлу произведенному треугольникомъ BPD безъ тѣла произведеннаго треугольникомъ BRD, сирѣчь равно линеи $\frac{BP}{3}$ умноженной на разность двухъ поверьхностей, изъ коихъ одна описана линеею PD, а другая линеею RD, и коихъ разность есть поверьхность описанная линеею PR. И такъ изъ сего слѣдуетъ, что тѣло произведенное какимъ нибудь треугольникомъ BQR, обернувшимся около оси BD, какое бы то положенїе въ плоскости BQR ни имѣвшей, равно описанной линеею QR поверхности, умноженной на третью часть перпендикуляра опущеннаго изъ точки B на линею QR, продолженную, естьли то нужно. Сїе предложенїе намъ полезно будетъ при найденїи толщины шара.

(131) Въ полукругѣ CAMD (черт. XXVIII), имѣющемъ радїусъ r, да будетъ вписанъ правильной полумногоугольникъ; явствуетъ, что во время обращенія чертежа около оси AD, полукругъ произведетъ шаръ, а полумногоугольникъ тѣло, коего поверхность будетъ сумма всѣхъ поверьхностей описанныхъ сторонами AM, MM′, и проч. Чрезъ средины сторонъ полумногоугольника я протяну радїусы CO, CO′, и проч., на ось AD опущу перпендикуляры mp, MP, $m'p'$, M′P′, и проч. и параллельно сей самой оси проведу mn, и проч. Сдѣлавъ сїе примѣчаю, что поверьхность описанная стороною AM равна $2\pi.pm$.AM, и что подобные треугольники MPA, Cpm даютъ MA : AP = $Cm : mp$; откуда заключаю, что поверьхность описанная стороною AM будетъ 2π . Cm . AP; поверьхность описанная стороною MM′ равна $2\pi.m'p'$.MM, или по причинѣ подобныхъ треугольниковъ M′nM, $Cp'm'$, равна 2π Cm'.PP′; и такъ далѣе. Слѣдовательно означивъ чрезъ u стрѣлу, и чрезъ x абсциссу AR, соотвѣтствующую какой нибудь дугѣ AQ, которая составляетъ сумму всѣхъ линей AP, PP′, и проч., будешь имѣть

для описанной сторонами AM, MM′, и проч. поверьхности $2\pi x(r - u)$, и для всего тѣла $4\pi r(r - u)$. Сіи количества имѣютъ предѣлами, одно $2\pi rx$, а другое $4\pi r^2$; но поверьхность описанная дугою AQ есть такъ же предѣлъ перваго количества, какъ и поверьхность описанная полуокружностію есть предѣлъ другаго, или всѣхъ поверьхностей, кои опишутся во время того же обращенія периметрами вписанныхъ полумногоугольниковъ. Слѣдовательно поверьхность сегмента шара, коего стрѣла x, равна $2\pi rx$, и поверьхность самаго шара равна $4\pi r^2$, или четырекратной площади одного изъ наибольшихъ круговъ его.

При чемъ явствуетъ, что во время того же самаго обращенія чертежа около оси AD, каждой треугольникъ, какъ MCM′, производитъ тѣло, которое будетъ равно описанной стороною MM′ поверьхности, умноженной на треть высоты Cm' треугольника; слѣдственно тѣло произведенное частію ACQ полумногоугольника равно $\frac{2}{3}\pi x(r - u)^2$, и цѣлое тѣло равно $\frac{4}{3}\pi r(r - u)^2$; сіи количества имѣютъ предѣлами, одно $\frac{2}{3}\pi r^2 x$, а другое $\frac{4}{3}\pi r^3$, и секторъ шара, произведенный секторомъ круга ACQ, есть такъ же предѣлъ перваго количества, какъ и шаръ есть предѣлъ другаго, или всѣхъ тѣлъ, какія произведутся во время обращенія чертежа около оси AD, вписанными полумногоугольниками; слѣдовательно толщина сектора, у коего стрѣла x, равна $\frac{2}{3}\pi r^2 x$, и толщина шара равна $\frac{4}{3}\pi r^3$, или равна толщинѣ конуса, у коего основаніе одинъ изъ наибольшихъ круговъ шара, а высота двукратный діаметръ.

(132) Пусть ASB полукругъ и ARB полуеллипсисъ (черт. XXIX); я означу чрезъ a общую ось круга и еллипсиса, и чрезъ b другую ось еллипсиса, впишу въ кругѣ многоугольникъ, котораго NS пусть одна изъ сторонъ, опущу на ось AB

перпендикуляры NP, SQ, протяну линеи, какъ MR, и симъ образомъ впишу въ еллипсисѣ соотвѣтствующій многоугольникъ; сдѣлавъ сіе, по свойству круга и еллипсиса будешь имѣть PN: PM $=a:b$, и PN : QS $=$ PM : QR; слѣдственно PN $+$ QS: PM $+$ QR $=a:b$, и трапеція NPQS къ трапеціи MPQR $=a:b$. И такъ видно, что всякой многоугольникъ вписанный въ кругѣ содержится къ соотвѣтствующему многоугольнику вписанному въ еллипсисѣ, какъ $a:b$; вотъ количества, которыя хотя бы возрастали, или хотя бы убывали, сохраняютъ между собою одно непремѣнное содержаніе a къ b; чего ради сіе содержаніе должно быть содержаніе и ихъ предѣловъ, сирѣчь круга и еллипсиса.

Естьли помыслимъ, что чертежъ совершилъ цѣлое обращеніе около оси AB, то полукругъ произведетъ шаръ, а полуеллипсисъ еллипсоидъ. И усѣченный конусъ, произведенный трапеціею NPQS, будетъ содержаться къ усѣченному конусу, произведенному трапеціею MPQR, какъ $\overline{PN}^2 + PN.QS + \overline{QS}^2$ къ $\overline{PM}^2 + PM.QR + \overline{QR}^2$, или какъ $(PN + QS) - PN.QS$ къ $(PM + QR)^2 - PM.QR$; но $(PN + QS)^2 : (PM + QR)^2 = a^2 : b^2$, и $PN.QS : PM.QR = a^2 : b^2$; слѣдовательно и $(PN + QS)^2 - PN.QS : (PM + QR)^2 - PM.QR = a^2 : b^2$; и такъ тѣло произведенное всякимъ вписаннымъ въ кругѣ многоугольникомъ, содержится къ тѣлу, произведенному соотвѣтственнымъ вписаннымъ въ еллипсисѣ многоугольникомъ, какъ a^2 къ b^2. Сіи тѣла такимъ образомъ сохраняютъ одно непремѣнное содержаніе a^2 къ b^2, и сего ради оное должно быть содержаніе и ихъ предѣловъ, сирѣчь шара и еллипсоида (*).

(*) Въ первомъ изданіи, въ заключеніе сихъ предложеній, авторъ присовокупилъ сіи слова: „Таковъ есть, я думаю, простѣйшій и строжайшій способъ доказывать сіи первоначальныя предложенія.„ Но въ семъ вновь

исправленномЪ изданїи онЪ выпустилЪ ихЪ, вѣроятно для того, что г. ЛежандрЪ по изданїи своихЪ елементовЪ Геометрїи, подалЪ случай ему усмотрѣть несовершенство сего способа, смотри стран. 29, 30, 31, 32 и 33 первой книги математическихЪ трудовЪ моихЪ; тутЪ увидишь, вЪ чемЪ именно оное несовершенство состоитЪ.

Что должно разумѣть чрезъ 0 и $\frac{1}{0}$ или нуль и безконечность приемлемую Геометрами; чрезъ безконечной путь кривой линеи; чрезъ сумму ряда до безконечности простертаго, и наконецъ чрезъ $\frac{0}{0}$.

(133) Чѣмъ болѣе увеличивается знаменатель содержанія, тѣмъ болѣе сіе содержаніе уменьшается; оно непрестанно къ нулю приближается, не могши никогда онаго достигнуть. Естьли я сіе содержаніе положу $= m$, и $x = \frac{1}{m}$, то найду, что чѣмъ m болѣе уменьшается, тѣмъ x болѣе увеличивается; и какъ о есть предѣлъ, къ которому m убывая, всегда приближается, то явствуетъ, что $\frac{1}{0}$ есть предѣлъ всѣхъ приращеній перемѣннаго количества x. Всякое количество подлежитъ прибавленію и уменьшенію безконечному; прибавляясь, оно приближается къ нѣкоторому предѣлу, которой Геометры подъ словомъ *безконечность* означаютъ, и которой имѣетъ выраженіе $\frac{1}{0}$; другой же предѣль, къ которому количество приближается уменьшаясь, имѣетъ выраженіе о. Ни безконечность ни нуль не суть количества; но суть предѣлы, къ которымъ количества непрестанно приближаются, никогда съ ними не сливаясь. Самое понятіе о безконечно великомъ или безконечно маломъ количествѣ есть нелѣпость. Ѳеорія линей параллельныхъ служитъ къ вящшему утвержденію рѣченнаго нами.

Да будетъ KPM (черт. XXX) какой нибудь треугольникъ, въ которомъ уголъ P и сторона PM постоянны, уголъ же M и сторона PK непрестанно прибавляются; будешь имѣть $\sin.(P+M) : PM = \sin.M : PK = \frac{PM \sin.M}{\sin.(P+M)}$. Но чѣмъ точка K болѣе отдаляется, тѣмъ прямая MK болѣе приближается, дабы сдѣлаться параллельною къ прямой PK; и такъ какое должно быть выраженіе предѣла, къ которому прямая PK, подлежащая прибавленію безконечному, всегда приближается, не могши ни-

когда его достигнуть? Найдешь оное, приведши себѣ на память, что когда двѣ прямыя линеи [пресѣченныя третьею] параллельны, тогда внутреннїе по одну сторону углы вмѣстѣ составляютъ два прямыхъ; то есть найдешь сей предѣлъ сдѣлавъ въ выражени PK ($= \frac{PM\ sin.\ M}{sin.\ (P+M)}$), $P + M = 180°$, или $sin.\ (P + M) = 0$, которое выраженїе чрезъ то сдѣлается $\frac{1}{0}$ или безконечно. (*)

(*) Что выраженїе $\frac{1}{0}$ не есть количество, въ томъ ни кто спорить не станетъ ибо для всякаго понятно, что положивъ его количествомъ, какъ напримѣръ $= n$, выдетъ $1 = 0 \times n$, то есть невозможное. Но чтобы оное выраженїе $\frac{1}{0}$ было однимъ изъ предѣловъ, между которыми бы всѣ возможныя величины неопредѣленнаго количества содержалися, то всякой усумнится; ибо естьли и положить, что количество уменьшаясь приближается къ нулю, то есть къ небытїю, то все еще остается не извѣстнымъ, къ чему увеличивающееся количество, которое можетъ превзойти всякое по произволенїю данное, приближается. И ѳеорїя линей параллельныхъ ни мало не служитъ къ подтвержденїю того, что авторъ утвердить хочетъ. Въ самомъ дѣлѣ когда уравненїе $PK = \frac{PM\ sin.\ M}{sin.\ (P+M)}$, какъ изъ треугольника произведенное, по тѣхъ поръ токмо имѣетъ мѣсто, пока $P + M$ меньше двухъ прямыхъ, то нельзя въономъ положить $P + M = 180°$; и когда $P + M = 180°$, тогда PK по причинѣ что не пресѣкается уже чрезъ MK, перестаетъ означать то, что прежде означало, то есть одну изъ сторонъ треугольника, и слѣдственно, изъ сдѣланїя въ выражени $\frac{PM\ sin.\ M}{sin.\ (P+M)}$, $P + M = 180°$, относительно стороны PK ничего получиться недолженствуетъ. — Правда, чѣмъ сторона PK болѣе увеличивается, тѣмъ сумма угловъ $P + M$ болѣе къ двумъ прямымъ приближается, и можетъ разниться отъ нихъ менѣе всякой по произволенїю данной величины, немогши никогда ихъ достигнуть, но изъ того, что по мѣрѣ увеличиванїя PK сумма угловъ $P + M$ предѣлъ имѣетъ, обратно совсѣмъ не слѣдуетъ, чтобы и сторона PK по мѣрѣ увеличиванїя суммы угловъ $P + M$ предѣлъ имѣла; ибо уменьшая разность между $P + M$ и двухъ прямыхъ, напримѣръ на половину, найдешь, что сторона PM будетъ прибавляться на величину всегда большую и большую; и какъ въ уменьшени упомянутой разности никогда конца быть неможетъ, то слѣдуетъ что и увеличиванїе стороны PK будетъ безпредѣльно, и она можетъ превзойти всякую по произволенїю данную величину, не имѣя ни какой границы, за которую бы прейти не могла.

(134) Когда одна какая нибудь вѣтвь кривой линеи до безконечности простирается и имѣетъ асимптоту, то она къ оной непрестанно будетъ приближаться, не могши никогда ея достигнуть. И естьли вообразимъ, что сія асимптота есть линея абсциссъ, и что въ одной изъ точекъ безконечнаго пути протянута касательная, встрѣчающаяся съ тою осью абсциссъ, то, какъ явствуетъ, чѣмъ абсцисса болѣе будетъ увеличиваться, тѣмъ касательная болѣе станетъ приближаться что бы соединиться съ асимптотою; и сіи двѣ линеи наконецъ достигли бы совершеннаго соединенія, естьли бы абсцисса могла учиниться безконечною.

Между тѣмъ выраженіе $\frac{1}{0}$, сколь мало ни значущее, тѣмъ достопримѣчательно, что поставленное, напримѣръ въ уравненіе $PK = \frac{P\ \sin. M}{\sin. (P + M)}$ вмѣсто PK, даетъ точно $\sin. (P + M) = 0$, или $P + M = 180°$, то есть предѣлъ суммы двухъ угловъ треугольника; такъ же въ уравненіе $\text{tang.}\, \vartheta = \frac{\sin. \vartheta}{\cos. \vartheta}$, которое при предѣлѣ угла ϑ, то есть при $90°$, обращается въ $\text{tang.}\, 90° = \frac{1}{0}$, поставивъ $\frac{1}{0}$ вмѣсто $\text{tang.}\, \vartheta$, получишь точно $\cos. \vartheta = 0$ или $\vartheta = 90°$. Откуда явствуетъ, что выраженіе $\frac{1}{0}$ имѣетъ свою пользу. И такъ подадимъ объ немъ прямое понятіе. Когда въ уравненіи между перемѣнными количествами x и y, одно изъ нихъ y въ своемъ возрастаніи или убываніи предѣлъ a имѣетъ, а другое безпредѣльно простирается; то по поставленіи въ оное вмѣсто количества y его предѣла a, количество x перестанетъ означать то, что означало, поелику y къ предѣлу своему никогда достигнуть неможетъ, и потому пріемлетъ выраженіе $\frac{1}{0}$, которое собственно ничего незначитъ, но которое, какъ выраженіе пріемлемое количествомъ x при предѣлѣ количества y, въ тоже уравненіе вмѣсто x поставленное, долженствуетъ дать точно оный предѣлъ количества y. И для того то авторъ въ слѣдующемъ членѣ въ формулѣ $2 - \frac{1 \cdot 2}{x + 1}$, которая означаетъ сумму ряда $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} +$ и проч. числа членовъ x, положивъ $x = \frac{1}{0}$, получаетъ предѣлъ оной суммы. Въ самомъ дѣлѣ положивъ $2 - \frac{1 \cdot 2}{x + 1} = y$, и получивъ $x = \frac{2}{2 - y}$, увидишь ясно, что y предѣлъ имѣетъ, а именно число 2, и что x при ономъ предѣлѣ количества y пріемлетъ выраженіе $\frac{1}{0}$.

Требуется сумма ряда безконечнаго; что можетъ значить сіе? Я возьму для примѣра рядъ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} +$ и проч., котораго сумма числа членовъ x, какъ то мы выше нашли, равна $2 - \frac{1}{x+1}$, и ежели я положу въ сей формулѣ $x = \frac{1}{0}$, то она учинится равною числу 2; и такъ чѣмъ болѣе возмется членовъ ряда, тѣмъ болѣе сумма сихъ членовъ приближаться будетъ къ равенству съ числомъ 2; и сіе число есть предѣлъ, къ которому всегда приближаться будетъ, немогши никогда его достигнуть, или все тоже, сумма безконечнаго ряда. Такимъ же образомъ найдутся суммы другихъ безконечныхъ рядовъ, о которыхъ мы говорили въ 125 членѣ, и будетъ имѣть

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \text{и проч.} = \frac{3}{2},$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{126} + \text{и проч.} = \frac{4}{3},$$
$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \frac{1}{252} + \text{и проч.} = \frac{5}{4},$$

и проч.

Имѣются ряды, коихъ сумма до безконечности простертая, есть безконечность самая; таковъ есть рядъ натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, и проч., котораго общій членъ есть $x+1$, и котораго сумма какого ниесть числа членовъ, взятая отъ перваго члена, со включеніемъ онаго, есть $\frac{x^2+x}{2}$; ибо положивъ $x = \frac{1}{0}$, сія сумма сдѣлается $\frac{1}{0}$.

(135) Положимъ, что два содержанія m и n совокуплены между собою такимъ образомъ, что одно изъ нихъ не можетъ увеличиваться или уменьшаться, безъ того, чтобы и другое не увеличивалось или не уменьшалось; тогда предѣлъ, къ которому $\frac{m}{n}$ приближаться будетъ, въ обоихъ случаяхъ, въ коихъ m и n приближаются или къ 0 или къ безконечности, можетъ быть изображенъ чрезъ $\frac{0}{0}$. Но поелику когда содержаніе дано, всегда можно найти другія содержанія, которыя къ оному непрестанно приближаться будутъ, не могши никогда слиться съ нимъ, сирѣчь, которыхъ оно есть предѣлъ; то явству-

етъ, что $\frac{0}{0}$ можетъ представлять всякаго роду содержанія. Мы видѣли въ ѳеоріи касательныхъ, предложенной въ 19 членѣ, что подкасательная вообще представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$, которой видъ для каждой особенной кривой линеи приемлетъ опредѣленную величину.

Въ рѣшеніи вопросовъ часто приведены бываемъ къ заключеніямъ, которыя представляются въ видѣ $\frac{0}{0}$, отъ неприведенія ихъ къ простѣйшимъ выраженіямъ. Напримѣръ сіе заключеніе $\frac{1 - \sin. x + \cos. x}{\sin. x + \cos. x - 1}$ сдѣлается $\frac{0}{0}$, когда x есть есть дуга въ 90°. Но естьли я придамъ ему другой видъ
$$\frac{1 - \sin. x + \sqrt{1 - \sin. x^2}}{\sin. x - 1 + \sqrt{1 - \sin. x^2}} = \frac{1 - \sin. x + \sqrt{(1 - \sin. x).(1 + \sin. x)}}{\sin. x - 1 + \sqrt{(1 - \sin. x).(1 + \sin. x)}} = \frac{\sqrt{1 - \sin. x} + \sqrt{1 + \sin. x}}{\sqrt{1 + \sin. x} - \sqrt{1 - \sin. x}},$$
то увидишь, что въ случаѣ дуги $x = 90^\circ$, или $\sin. x = 1$, оно сдѣлается $= 1$. Чрезъ сіи преобразованія мы привели предложенную дробь къ простѣйшему ея выраженію, раздѣляя числителя и знаменателя на общій множитель $\sqrt{1 - \sin. x}$, который въ положеніи $x = 90^\circ$, сдѣлавшись 0, былъ причиною, что въ ономъ положеніи дробь представлялася въ видѣ $\frac{0}{0}$. Такъ же дробь $\frac{a^3 + 2a^2x - ax^2 - 2x^3}{a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3}$ сдѣлается $\frac{0}{0}$, когда положишь $x = a$. Но естьли приведешь ее къ наименьшимъ членамъ, раздѣля числитель и знаменатель на общій множитель $a - x$, то найдешь дробь $\frac{a^2 + 3ax + 2x^2}{a^2 - 2x^2}$, которая въ случаѣ $x = a$, имѣетъ величину $= -6$. Не всегда удобно найти можно сей общій множитель, но способъ предѣловъ подастъ намъ средства разрѣшить слѣдующій вопросъ всеобщимъ образомъ: Дана функція, которая въ нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ обращается въ $\frac{0}{0}$, найти, какая есть тогда величина ея?

Приложенїе способа предѣловъ по опредѣленїю въ кривыхъ линеяхъ касательныхъ.

(136) Положивъ сїи начала, мы можемъ представить ѳеорїю касательныхъ подъ другимъ видомъ, приемля всѣ геометрическїя строенія въ 19 членѣ учиненныя, сирѣчь приемля описанную кривую линею (черт. VII), протянутыя двѣ перпендикулярныя ординаты MP, NQ, проведенную и продолженную, пока встрѣтится съ линеею абсциссъ, хорду MN, протянутую касательную MT и прямую MO перпендикулярную къ QN. Смотря на вогнутость или выпуклость кривой линеи со стороны оси AB, содержанїе MP къ PT будетъ болѣе или менѣе содержанія MP къ PS, которое же по причинѣ подобныхъ треугольниковъ MPS и NOM, равно содержанїю NO къ OM. Но чѣмъ точка N будетъ ближае къ M, тѣмъ S болѣе приближится къ T, и тѣмъ менѣе сїи два содержанїя разниться станутъ. И содержанїе NO къ OM можетъ приближиться къ содержанїю MP къ PT столь блиско, какъ хочешь, никогда одиакожъ не сливаясь съ нимъ. Слѣдовательно сїе послѣднее содержанїе есть предѣлъ перваго; и какъ содержанїе NO къ OM есть содержанїе между разностями двухъ координатъ $MP = y$ и $AP = x$, то явствуетъ, что для найденія содержанія между ординатою и подкасательною, надлежитъ искать посредствомъ уравненїя кривой линеи предѣлъ содержанія между разностями ординаты и абсциссы (*).

(*) Сїе и вообще всѣ доказательства, авторомъ здѣсь предлагаемыя, весьма далеки отъ совершенной строгости. Я представилъ Академїи Наукъ въ 1796 году сочиненїе подъ заглавїемъ: Начала трансцендентной Геометрїи и дифференцїальнаго Изчисленїя, извлеченныя изъ истинной натуры ихъ предметовъ, въ которомъ старался всѣ оныя доказательства довести до совершенной строгости, и за которое я былъ удостоенъ отъ Академїи званїя Адьюнкта. Оное сочиненїе съ нѣкоторыми предварительными по-

Я возьму для примѣра уравненїе $y^m = \beta x$, которое есть уравненїе всѣхъ параболъ, когда показатель m есть число положительное цѣлое или дробное, и всѣхъ гиперболъ, когда есть число отрицательное; найдеть

$$my^{m-1}\Delta y + m.\tfrac{m-1}{2}y^{m-2}\Delta y^2 + \text{и проч.} = \beta\Delta x, \text{ и}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\beta}\left(my^{m-1} + m.\tfrac{m-1}{2}y^{m-2}\Delta y + \text{и проч.}\right).$$

Но чѣмъ Δx и Δy болѣе убываютъ, тѣмъ содержанїе между сими разностями болѣе приближается, никогда не достигая, къ содержанїю, въ которое оно перемѣнилося бы, есть ли бы сдѣлалися $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$. Чего ради въ настоящемъ примѣрѣ содержанїе $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ имѣетъ предѣломъ $\frac{m}{\beta}y^{m-1}$, и подкасательная кривой линеи, коея уравненїе $y^m = \beta x$, равна $\frac{m}{\beta}y^m = mx$. (*)

(137) Но прежде нежели далѣе поступимъ въ семъ приложенїи способа предѣловъ, небезполезно будетъ пояснить его

знанїями составитъ вторую книгу математическихъ трудовъ моихъ, и н[...] въ продолжительномъ времени издано будетъ, естьли только что не воспрепятствуетъ.

(*) Предѣлъ содержанїя $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; когда оный еще не извѣстенъ, авторъ въ послѣдствїи сего введенїя въ дифференцїальное и интегральное изчисленїе означаетъ чрезъ $\frac{p}{q}$ или $\frac{q}{p}$; такъ же предѣлъ содержанїй $\frac{\Delta \sigma}{\Delta x}$ или $\frac{\Delta \sigma}{\Delta y}$, гдѣ σ дуга кривой линей, означаетъ чрезъ $\frac{s}{p}$ или $\frac{s}{q}$, и такъ другїе; но въ самомъ сочиненїи онъ оставляетъ сїе знакоположенїе, и употребляетъ обыкновенное, сирѣчь вмѣсто $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{p}$, $\frac{s}{q}$, и проч. пишетъ $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, и проч., называя члены сихъ содержанїй *дифференцїалами* перемѣнныхъ количествъ x, y, σ и проч. Почему дабы читатель не пришелъ въ замѣшательство и не претерпѣлъ скуки, привыкнувъ сперва къ одному знакоположенїю, а потомъ оставя оное и привыкая къ другому, я въ своемъ переводѣ разсудилъ за благо употреблять одно токмо второе знакоположенїе, какъ то онъ самъ сдѣлалъ въ первомъ изданїи сего сочиненїя.

чрезъ нѣкоторые примѣры. Возмемъ перемѣнныя количества x, y, z, u и означимъ предѣлы содержаній $\frac{\Delta x}{\Delta u}$, $\frac{\Delta y}{\Delta u}$, $\frac{\Delta z}{\Delta u}$ чрезъ $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, или предѣлы содержаній $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, или предѣлы содержаній, и проч.; требуется уравнеие заключающее въ себѣ содержание между предѣлами, когда уравненїе между перемѣнными есть $z = yu$? изъ онаго найдешь $\frac{\Delta z}{\Delta u} = u\frac{\Delta y}{\Delta u} + y + \Delta y$; откуда выдетъ [$\frac{\partial z}{\partial u} = u\frac{\partial y}{\partial u} + y$, или] $\partial z = u\partial y + y\partial u$. Естьли предложится уравнение $z = \frac{y}{u}$, то изъ онаго выдетъ $zu = y$, $\partial y = u\partial z + z\partial u$ и $\partial z = \frac{u\partial y - y\partial u}{u^2}$. Посредствомъ первой изъ сихъ двухъ формулъ мы докажемъ, что когда $z = ay^m$, гдѣ m есть цѣлое положительное число, а a какое нибудь постоянное количество, тогда должно быть $\partial z = amy^{m-1}\partial y$. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ упомянутой формулѣ $u = ay$, получишь $\partial u = a\partial y$, и изъ того найдешь $\partial z = 2ay\partial y$, когда $z = ay^2$; когда же $z = ay^3$, то положивъ $u = ay^2$, выдетъ $\partial u = 2ay\partial y$ и $\partial z = 3ay^2\partial y$; когда $z = ay^4$, то положивъ $u = ay^3$, получишь $\partial u = 3ay\partial y$ и $\partial z = 4ay^3\partial y$; и такъ далѣе.

Предлагается уравненїе $z = ay^{\frac{m}{n}}$, въ которомъ показатели m и n или оба положительные или оба отрицательные; изъ онаго произойдетъ $z^n = a^n y^m$, и слѣдственно $nz^{n-1}\partial z = a^n m y^{m-1}\partial y$; посему $\partial z = \frac{m}{n} a y^{\frac{m}{n}-1}\partial y$. Естьли $z = ay^{-\frac{m}{n}}$, то будетъ $zy^{\frac{m}{n}} = a$, $y^{\frac{m}{n}}\partial z + \frac{m}{n} z y^{\frac{m}{n}-1}\partial y = 0$, и оттуда выдетъ $\partial z = -\frac{m}{n} a y^{-\frac{m}{n}-1}\partial y$. И такъ естьли $z = ay^m$, гдѣ m есть всякое, какое хочешь число, то будетъ $\partial z = amy^{m-1}\partial y$ (*).

(*) Относительно всякаго числа, не изключая глухаго или съ единицею не сoизмѣримаго, изъ предложеннаго авторомъ сiе ещё не слѣдуетъ, и требуетъ совсѣмъ инаго начала: сперва надлежитъ доказать, что когда

Пусть $y = x+\sqrt{a^2+x^2}$, будетъ $y^2-2xy=a^2$, $y\partial y-x\partial y-y\partial x=0$, и $\partial y = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}.\partial x$. Пусть $z = \frac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$, положи $x+\sqrt{a^2+x^2}=y$, будетъ $z=\frac{x}{y}$ и $\partial z = \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$; откуда выдетъ $\partial z [= (x+\sqrt{a^2+x^2})\partial x - \frac{x(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}}\partial x : (x+\sqrt{a^2+x^2})^2 = \frac{(\sqrt{a^2+x^2}-x)(x+\sqrt{a^2+x^2})\partial x}{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2\sqrt{a^2+x^2}}] = \frac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{(\sqrt{a^2+x^2}+x)\sqrt{a^2+x^2}}\partial x = \frac{a^2\partial x}{(\sqrt{a^2+x^2}+x)^2\sqrt{a^2+x^2}} [= \frac{a^2\partial x.(\sqrt{a^2+x^2}-x)^2}{(\sqrt{a^2+x^2}+x)^2(\sqrt{a^2+x^2}-x)^2\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2\partial x(a^2+2x^2-2x\sqrt{a^2+x^2})}{a^4\sqrt{a^2+x^2}}] = \frac{a^2+2x^2}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\partial x - \frac{2x\partial x}{a^2}$. (*)

(138) Пусть теперь предложенная кривая линея будетъ втораго порядка, коея уравненіе можно изобразить такъ

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

то изъ онаго извлечешь предѣлъ содержанія $\frac{x\Delta}{y\Delta} = -\frac{bx+2cy+e}{2ax+by+d}$. Но тоже самое содержаніе предѣломъ имѣетъ еще $\frac{PT}{y}$; слѣдовательно $PT = -\frac{bxy+2cy^2+ey}{2ax+by+d}$.

Изъ выраженія линеи PT, извлечешь выраженіе $AT = PT-x$, и выраженіе касательной At, которая равна $\frac{y.AT}{PT}$. (**) И такъ въ семъ примѣрѣ

$$AT = \frac{ey+dx+2f}{2ax+by+d} \text{ и } At = -\frac{ey+dx+2f}{bx+2cy+e}.$$

[Ибо уравненіе $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ даетъ $2ax^2+2bx+2cy^2=-2dx-2ey-2f$.]

$z=ay^m$, тогда будетъ $\log.z=\log.a+m\log.y$, хотя бы буква m означала число, или всякую линею; потомъ изъ того вывесть, что $\frac{\partial z}{z}=m.\frac{\partial y}{y}$, и $\partial z = mz\frac{\partial y}{y} = amy^{m-1}\partial y$. Въ разсужденіи сего, я надѣюсь, меня лучше уразумѣютъ изъ другаго сочиненія, о которомъ я въ предъидущемъ примѣчаніи упомянулъ.

(†) Сей часнъ вмѣсто 137го у автора былъ 152мъ; внимательной читатель тотчасъ увидитъ причину, къ сему перемѣщенію меня побудившую.

(*) По принятому нами знакоположенію будетъ подкасательная $PT=\frac{y\partial x}{\partial y}$, $AT=\frac{y\partial x}{\partial y}-x$ и $At\left(=\frac{y.AT}{PT}\right)=y-\frac{x\partial y}{\partial x}$.

Когда кривая линея имѣетъ асимптоту, то найдется точка K, въ которой сія асимптота встрѣчается съ осью, дѣлая въ выраженіи линеи AT, x и y безконечными, и точка E, въ которой она встрѣчается съ касательною къ кривой въ точкѣ A протянутою, чиня тѣ же въ выраженіе линеи At вставливанія. Но когда y и x безконечны, тогда предложенное уравненіе обращается въ $c\frac{y^2}{x^2}+b\frac{y}{x}+a=0$, и AT, At сдѣлаются $\frac{c\frac{y}{x}+d}{b\frac{y}{x}+2a}$, $-\frac{c\frac{y}{x}+d}{2c\frac{y}{x}+b}$, куда вмѣсто содержанія $\frac{y}{x}$ надлежитъ поставить его величину $-\frac{b}{2c}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$; симъ образомъ будешь имѣть $AK=\frac{2cd-e(b\mp\sqrt{b^2-4ac})}{4ac-(b\mp\sqrt{b^2-4ac})}$, $AE=\frac{-2cd+e(b\mp\sqrt{b^2-4ac})}{+2c\sqrt{b^2-4ac}}$; или для большей простоты сдѣлавъ $b=0$, $e=0$, будешь имѣть $AK=\frac{d}{2a}$, $AE=\mp\frac{d}{2\sqrt{-ac}}$.

И такъ удобно видѣть можно, что въ случаѣ еллипсиса, гдѣ a и c суть положительныя количества, выраженіе линеи AE есть мнимое, что въ случаѣ параболы, гдѣ одно изъ сихъ количествъ a или c есть нуль, выраженія линей AK и AE суть безконечныя; посему между коническими сѣченіями одна токмо гипербола имѣетъ двѣ асимптоты, которыя построятся, протянувъ изъ центра двѣ прямыя пресѣкающія касательную къ кривой въ точкѣ A, такимъ образомъ что бы по ту и другую сторону сея точки была $AE=\frac{d}{2\sqrt{-ac}}$. Сіе заключеніе совершенно сходствуетъ съ тѣмъ, которое мы вывели другимъ образомъ (въ членѣ 32). (*)

(*) Для упражненія я предложу еще два примѣра, взятые изъ кривыхъ линей вышшаго порядка.

1) Пусть дано уравненіе кривой линеи $y^3=ax^2+x^3$, будетъ $AT\left(=\frac{y\partial x}{\partial y}-x\right)=\frac{3y^3}{2ax+3x^2}-x=\frac{3ax^2+3x^3}{2ax+3x^2}-x=\frac{ax}{2a+3x}$, и $At\left(=y-\frac{x\partial y}{\partial x}\right)=y-\frac{2ax^2+3x^3}{3y^2}=\frac{ax^2}{3y^2}=\frac{ax}{3\sqrt[3]{x(a+x)^2}}$; въ сіи два выраженія поставивъ $\frac{1}{0}$ на мѣсто x, получишь $AK=$

$$\frac{a \cdot \frac{1}{0}}{2a + 3 \cdot \frac{1}{0}} = \frac{a \cdot \frac{1}{0}}{3 \cdot \frac{1}{0}} = \frac{a}{3}, \text{ и } AE = \frac{a \cdot \frac{1}{0}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{0}(a + \frac{1}{0})^2}} = \frac{a \cdot \frac{1}{0}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{0}(\frac{1}{0})^2}} = \frac{a}{3}.$$

2) Пусть уравненіе кривой линіи будетъ $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$; откуда выдетъ $AT\left(= \frac{y\partial x}{\partial y} - x\right) = \frac{y \cdot a(m+n)y^{m+n-1}}{b(mx^{m-1}(a+x)^n + nx^m(a+x)^{n-1})}$

$$- x = \frac{(m+n)x^m(a+x)^n}{mx^{m-1}(a+x)^n + nx^m(a+x)^{n-1}} - x = \frac{(m+n)(ax+x^2)}{m(a+x)+nx}$$

$- x = \frac{nax}{ma+(m+n)x}$, и $At\left(= y - \frac{x\partial y}{\partial x}\right) =$

$$y - \frac{b(mx^m(a+x)^n + nx^{m+1}(a+x)^{n-1})}{a(m+n)y^{m+n-1}} =$$

$$\frac{b(m+n)x^m(a+x)^n - b(mx^m(a+x)^n + nx^{m+1}(a+x)^{n-1})}{a(m+n)\frac{b}{a}x^m(a+x)^n \cdot (\frac{b}{a})^{-\frac{1}{m+n}}x^{-\frac{m}{m+n}} \cdot (a+x)^{-\frac{n}{m+n}}} =$$

$$\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}} \cdot nx^m(a+x)^n\left(1 - \frac{x}{a+x}\right)}{(m+n)x^m(a+x)^n x^{-\frac{m}{m+n}} \cdot (a+x)^{-\frac{n}{m+n}}} =$$

$$\frac{n}{m+n} \cdot b^{\frac{1}{m+n}} a^{1-\frac{1}{m+n}} \cdot \frac{x^{\frac{m}{m+a}}}{(a+x)^{1-\frac{n}{m+n}}} =$$

$\frac{n}{m+n}\sqrt[m+n]{ba^{m+n-1}}\sqrt[m+n]{\frac{x^m}{(a+x)^m}}$; въ сіи два выраженія поставивъ $\frac{1}{0}$ вмѣсто x, получишь $AK = \frac{na}{m+n}$ и $AE = \frac{n}{m+n}\sqrt[m+n]{ba^{m+n-1}}$

(139) Мы предложили въ 19 членѣ способъ извлекать изъ выраженія подкасательной выраженія суб-нормаля, самаго нормаля и касательной. Но чтобы привести къ концу изчисленіе прямоугольнаго треугольника TPM, мы замѣтимъ, что оный даетъ еще сіи двѣ пропорціи TP: PM = 1: tang. PTM, PM: PT = 1: tang. PMT; откуда найдемъ, что величины tang. PTM и tang. PMT суть предѣлы содержаній $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. (*) Первой изъ оныхъ предѣловъ есть нуль, когда касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси абсциссъ; вмѣсто того предѣлъ содержанія $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ есть нуль, когда таже самая касательная параллельна ординатамъ. Для кривыхъ линей втораго порядка оная точка, въ которой касательная параллельна оси абсциссъ, найдется, сдѣлавъ $2ax + by + d = 0$, и точка, въ которой касательная параллельна ординатамъ, сыщется, сдѣлавъ $bx + 2cy + e = 0$; сіи уравненія надлежитъ соединить съ уравненіемъ $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, дабы получить въ томъ и другомъ случаѣ величины координатъ y и x. Положивъ для краткости b, e и f нулями, изъ перваго извлечешь $x = -\frac{d}{2a}$, и слѣдственно $y^2 = \frac{d^2}{4ac}$, которое выраженіе тогда токмо будетъ положительное, когда то и другое изъ количествъ a и c есть положительное или отрицательное. Но въ гиперболѣ одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное, въ параболѣ же одно или другое нуль; слѣдовательно одинъ токмо еллипсисъ имѣетъ двѣ касательныя, которыя параллельны оси абсциссъ, и которыя суть тѣ, кои проходятъ чрезъ концы второй оси. Изъ втораго уравненія извлечешь $y = 0$, и слѣдственно $ax^2 + dx = 0$; откуда найдешь $x = 0$ и $x = -\frac{d}{a}$. И такъ еллипсисъ и противоположенныя гиперболы имѣютъ двѣ ординатамъ па-

(*) И того ради по принятому нами знакоположенію будетъ tang PTM $= \frac{\partial y}{\partial x}$ и tang. PMT $= \frac{\partial x}{\partial y}$.

раллельныя касательныя, которыя проходятъ чрезъ концы большей оси. Парабола такъ же имѣетъ параллельную ординатамъ касательную, которая проходитъ чрезъ вершину ея.

Естьли MP, NQ будутъ ординаты принадлежащія къ какому нибудь діаметру, то по причинѣ параллельныхъ MP NQ не менѣе будетъ $\Delta y : \Delta x = y : PS$, и PT равна ординатѣ y умноженной на предѣлъ содержанія между разностями Δx, Δy. Такъ же найдешь, что TP: PM = sin. TMP: sin. T; откуда заключишь, что предѣлъ содержанія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть нуль, когда касательная параллельна оси абсциссъ, и что вмѣсто того предѣлъ содержанія $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ есть нуль, когда касательная параллельна ординатамъ. И такъ предъидущее предложеніе можетъ быть приведено во всеобщность, и выражено такъ: Въ еллипсисѣ всякая касательная проходящая чрезъ конецъ сопряженнаго діаметра параллельна другому діаметру, которой берется за ось абсциссъ; въ еллипсисѣ и противоположенныхъ гиперболахъ касательныя, проходящія чрезъ двѣ точки, въ коихъ діаметръ встрѣчается съ кривою, параллельны ординатамъ принадлежащимъ къ сему діаметру; въ параболѣ касательная проходящая чрезъ точку, въ которой діаметръ встрѣчается съ кривою, параллельна ординатамъ принадлежащимъ къ оному діаметру.

Присовокупленіе къ предъидущему приложенію, заключающее въ себѣ ѳеорію точекъ кратныхъ.

(140) Мы предложимъ другіе примѣры взятые изъ кривыхъ линей вышшаго порядка, и вопервыхъ мы разсмотримъ кривую линею, которой уравненіе $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$. Изъ онаго найдется уравненіе между разностями
$2a(y-b)\Delta y - (3x-a)(x-a)\Delta x + a\Delta y^2 - (3x-2a)\Delta x^2 - \Delta x^3 = 0$, потомъ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3x-a)(x-a) + (3x-2a)\Delta x + \Delta x^2}{2a(y-b) + a\Delta y}$, которое содержаніе имѣетъ предѣломъ $\frac{(3x-a)(x-a)}{2a(y-b)}$.

Въ разсматриваніи кривой линеи надлежитъ изслѣдывать всѣ точки; и такъ примѣчаемъ, что въ точкѣ, при которой $x = a$, и при которой слѣдственно $y = b$, найденной нами предѣлъ представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$; но заключимъ ли изъ того, что способъ въ семъ случаѣ не разрѣшаетъ вопроса? Въ точкѣ, при которой $x = a$ и $y = b$, уравненіе между разностями обратится въ $a\Delta y^2 - a\Delta x^2 - \Delta x^3 = 0$, и оттуда найдется $\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta x}{a}$, и для предѣла содержанія $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \pm 1$. Слѣдовательно въ точкѣ, которая изслѣдывается, предѣлъ опредѣляется чрезъ уравненіе второй степени, коего оба корня равные, но разныхъ знаковъ; что не можетъ иначе построиться, какъ вообразивъ себѣ проходящія чрезъ сію точку M (черт. XXXI) двѣ вѣтви, кои взаимно пресѣкаются такимъ образомъ, что по проведеніи двухъ касательныхъ MT и Mt, и ординаты MP, имѣетъ PT = Pt. И такъ всякой разъ, когда при какой нибудь точкѣ предѣлъ опредѣляется чрезъ уравненіе второй степени, чрезъ нея проходятъ двѣ вѣтви кривой линеи, буде два корня уравненія не суть мнимые; буде же они и дѣйствительные, но равные между собою и одного знака, то двѣ вѣтви не пресѣкутся, но токмо будутъ взаимно прикасаться.

Точка, которая есть общая двухъ вѣтвей той же кривой линеи, называется *двукратною*.

Пусть предложена кривая линея, коея уравненіе $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$, и онаго уравненіе между разностями $(4y^3 - 2axy)\Delta y + (3bx^2 - ay^2)\Delta x + (6y^2 - ax)\Delta y^2 - 2ay\Delta x\Delta y + 3bx\Delta x^2 + 4y\Delta y^3 - a\Delta x\Delta y^2 + b\Delta x^3 + \Delta y^4 = 0$; требуется провести къ ней касательную въ точкѣ, при которой $x = 0$ и $y = 0$? Ясно видно, что сіе положеніе обращаетъ уравненіе между разностями въ сіе $b\Delta x^3 - a\Delta x\Delta y^2 + \Delta y^4 = 0$, и естьли означимъ чрезъ $\frac{\partial x}{\partial y}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, то для опредѣленія онаго будемъ имѣть уравненіе третьей степени $b\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 - a\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0$, коего три корня $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial y} = +\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\partial x}{\partial y} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ показуютъ, что чрезъ сію точку проходятъ три вѣтви кривой линеи, которыя пересѣкаются такимъ образомъ, что одна изъ нихъ въ упомянутой точкѣ имѣетъ касательную параллельную ординатамъ. Точка, чрезъ которую проходятъ три вѣтви той же кривой линеи, именуется *трикратною*.

(141) Естьли кривая линея, которой *требуется* принадлежности, будетъ порядка n; то содержаніе между координатами опредѣлится чрезъ уравненіе α, предложенное въ членѣ 107, и содержаніе между конечными разностями найдется чрезъ уравненія β, а изъ онаго вообще получится предѣлъ $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{B}{A}$. Но естьли при извѣстной какой нибудь точкѣ кривой линеи особенныя величины количествъ y и x учинятъ въ то же время A и B нулями, то два члена $A\Delta x + B\Delta y$ не войдутъ въ уравненіе β, и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ получится изъ уравненія $C\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + D\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) + E = 0$; сей самой предѣлъ получится изъ уравненія третьей степени $F\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 + G\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + H\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) + I = 0$, когда тѣже вставливанія истребятъ сверьхъ того еще C, D и E; и такъ далѣе. Словомъ степень кратности какой нибудь точки будетъ таже самая, что и степень уравненія, предѣлъ въ себѣ заключающаго; пусть уравненіе между коорди-

натами будетъ степени n, то уравненіе между разностями будетъ той же степени; но слѣдуетъ ли изъ сего, что бы кривая линея степени n могла имѣть точки равной оной степени n кратности? Естьли бы сіе было, то бы предѣлъ содержанія между разностями долженъ былъ получиться изъ уравненія

$$a\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^n + b\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{n-1} + c\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + g = 0,$$

въ которомъ предстоящія a, b, ... g суть постоянныя количества, не зависящія ни отъ какого положенія учиненнаго въ координатахъ, и которое по причинѣ что всегда можетъ разрѣшиться на n уравненій первой степени, показуетъ что точка, о которой разсуждаемъ, не принадлежитъ къ кривой линеи, но къ собранію n прямыхъ линей, въ сей точкѣ пресѣкающихся; слѣдовательно кривая линея порядка n не можетъ имѣть точки большей кратности, какъ $n - 1$. И посему кривыя линеи втораго порядка совсѣмъ не могутъ имѣть кратныхъ точекъ; кривыя же линея третьяго порядка могутъ имѣть токмо двукратныя точки, кривыя линеи четвертаго порядка могутъ имѣть двукратныя и трикратныя точки, и такъ далѣе. (*).

(*) Весь сей членъ требуетъ поясненія, которое мы здѣсь и предложимъ.

1) Предѣлъ $\frac{\partial x}{\partial y}$ или $\frac{\partial y}{\partial x}$ имѣетъ многія величины и въ такихъ кривыхъ линеяхъ, которыя совсѣмъ кратныхъ точекъ не имѣютъ, такъ напримѣръ въ кривой линеи уравненія $y^2 = ax$, предѣлъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ имѣетъ двѣ величины $+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$ и $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$; но сіи многія величины предѣла $\frac{\partial y}{\partial x}$ или $\frac{\partial x}{\partial y}$ принадлежатъ не къ одной точкѣ кривой линеи, но ко многимъ, которыя хотя и соотвѣтствуютъ одной и той же абсциссѣ, однако находятся на концахъ различныхъ ординатъ. И такъ когда изъ многихъ величинъ предѣла $\frac{\partial x}{\partial y}$ заключается о кратныхъ точкахъ какой нибудь кривой линеи, тогда разумѣется, что сей предѣлъ имѣетъ многія величины при какихъ нибудь единственныхъ величинахъ координатъ x и y, принадлежащихъ къ одной и той же точкѣ кривой линеи. И сіе заключеніе

по всей строгости справедливо. Ибо, когда многія величины предѣла $\frac{\partial x}{\partial y}$ означаютъ многіе тангенсы угловъ составляемыхъ касательными въ одной точкѣ кривой линеи съ непремѣннымъ направленіемъ ординатъ, то должны быть многія вѣтви, чрезъ сію точку проходящія.

2) Возмемъ уравненіе

$(\alpha)\ldots\ ax^n + bx^{n-1}y + \ldots gy^n + a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + \ldots + k = 0,$

и онаго уравненіе между разностями

$(\beta)\ \ldots\ A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \ldots\ldots$
$+ a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + \ldots\ldots + g\Delta y^n = 0;$

я говорю, что естьли въ кривой линеи уравненія α, положишь n кратную точку, то уравненіе β долженствуетъ принять сей видъ $a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + \ldots\ldots + g\Delta y^n = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ напримѣръ, что уравненіе α есть третьей степени $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k = 0$; то уравненіе β будетъ $(3ax^2 + 2bxy \overset{(A)}{+} cx^2 + 2ex + fy + h)\Delta x + (bx^2 + 2cxy \overset{(B)}{+} 3dy^2 + fx + 2gx + i)\Delta y + (3ax \overset{(C)}{+} by + e)\Delta x^2 + (2bx \overset{(D)}{+} 2cy + f)\Delta x\Delta y + (cx \overset{(E)}{+} 3dy + g)\Delta y^2 + a\Delta x^3 + b\Delta x^2\Delta y + c\Delta x\Delta y^2 + d\Delta y^3 = 0$; и какъ для трикратной точки надлежитъ, чтобы особенныя величины количествъ x и y удовлетворящія уравненію α и дѣлающія A и B нулями, дѣлали сверьхъ того еще C, D и E нулями, то выдетъ $a\Delta x^3 + b\Delta x^2\Delta y + c\Delta x\Delta y^2 + d\Delta y^3 = 0$. Слѣдовательно и вообще для n кратной точки, уравненіе β долженствуетъ принять сей видъ $a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + \ldots\ldots + g\Delta y^n = 0$. Положивъ сіе, я воображу себѣ двѣ новыя координаты p и q, которыя бы имѣли свое начало въ оной кратной точкѣ; тогда въ уравненіе α поставь $x + p$ вмѣсто x, и $y + q$ вмѣсто y, и отнявъ свое уравненіе α, будешь имѣть преобразованное уравненіе, въ которомъ предстоящія будутъ тѣже самыя, что и въ уравненіи β, и которое слѣдственно, по причинѣ что изъ оныхъ предстоящихъ A $= 0$, B $= 0$, C $= 0$, и проч., будетъ $ap^n + bp^{n-1}q + \ldots\ldots + gq^n = 0$; и какъ сіе уравненіе можетъ разрѣшиться на уравненія первой степени, то оно показуетъ, что точка, о которой разсуждаемъ, не принадлежитъ къ кривой линеи, но къ собранію n прямыхъ линей, въ сей точкѣ пресѣкающихся.

Въ прочемъ, вотъ самое простѣйшее сему доказательство: Естьли кривая линея n порядка n можетъ имѣть n кратную точку, то всякая прямая, проходящая чрезъ сію точку можетъ быть почитаема пресѣкающею кривую въ n точкахъ; и посему прямая проходящая чрезъ сію точку и какую нибудь другую на кривой взятую, можетъ быть почитаема пересѣкающею кривую линею въ $n + 1$ точкахъ; что невозможно; слѣдов. и проч.

(142) Предложена какая ниесть кривая линея; требуется определить ея кратныя точки? Пусть α всегда уравненїе кривой линеи и β уравненїе заключающее въ себѣ содержанїе между разностями координатъ; уравни $A = o$ и $B = o$, и будешь имѣть столько кратныхъ точекъ, сколько найдешь различныхъ величинъ для y, которыя бы съ соотвѣтствующими величинами количества x удовлетворить могли уравненю α, включая въ сїи различныя величины количества y какъ тѣ, которыя величиною равны, но знаками различны, такъ и тѣ, которыя величиною и знаками одинаковы, но соотвѣтствуютъ различнымъ абсциссамъ. Но не болѣе будемъ принимать въ разсужденіе, какъ одну токмо точку, придавая количествамъ x и y единственныя величины; и тогда естьли сїи величины изъ уравненій $A = o$, $B = o$ извлеченныя, удовлетворятъ токмо уравненїю α, точка будетъ двукратная; она будетъ трикратная, когда тѣ же величины учинятъ сверьхъ того нулями предстоящїя C, D и E; четырекратная, когда оныя величины удовлетворятъ уравненїю α и учинятъ нулями предстоящїя C, D, E, F, G, H и I; и такъ далѣе.

Чтобы найти кратныя точки кривой линеи, коея уравненіи $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = o$, положи въ уравненіи между разностями $y-b=o$, $(3x-a)(x-a)=o$; и поелику единыя токмо величины $y=b$, $x=a$ удовлетворяютъ предложенному уравненю, то кривая линея не болѣе, какъ одну кратную точку имѣетъ, и оная точка будетъ двукратная. Такимъ же образомъ надлежитъ поступать при сысканїи кратныхъ точекъ кривой линеи, коея уравненїе $y^4 - axy^2 + bx^3 = o$. Положи въ уравненїи между разностями $4y^3 - 2axy = o$, $3bx^2 - ay^2 = o$, и поелику $x = o$ и $y = o$ суть единыя величины, которыя удовлетворяютъ предложенному уравненю, и притомъ въ то же самое время оныя величины истребляютъ члены уравненїя между разностями, въ коихъ Δx^2, $\Delta x\Delta y$ и Δy^2 находятся, то слѣдуетъ что кривая линея имѣетъ не болѣе, какъ одну при

началѣ координатъ крайнюю точку, и что оная точка есть трикрайная. [И дѣйствительно данное уравненіе приведенное въ слѣдующій видъ $y = \pm \sqrt{\frac{ax}{2} \pm \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - 4bx}}$, показываетъ, что сія кривая линея состоитъ не болѣе какъ изъ трехъ взаимно при началѣ пресѣкающихся вѣтвей, изъ коихъ первую даютъ два корня $\pm \sqrt{\frac{ax}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - 4bx}}$, а двѣ другія остальныя два корня $\pm \sqrt{\frac{ax}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - 4bx}}$. Первая вѣтвь идетъ отъ начала по ту и другую сторону оси абсциссъ, и оканчивается при $x = \frac{a^2}{4b}$, а другія двѣ отсюда идутъ къ началу и взаимно пресѣкшись въ ономъ, простираются безконечно.]

Предлагается еще найти крайныя точки кривой линеи, коея уравненіе $hy^3 - x^3y - ix^3$? Составь уравненіе между разностями $(3hy^2 - x^3)\Delta y - (3x^2y + 3ix^2)\Delta x + 3hy\Delta y^2 - 3x^2\Delta x\Delta y - (3xy + 3ix)\Delta x^2 + h\Delta y^3 - (y + i)\Delta x^3 - 3x\Delta x^2\Delta y - \Delta y\Delta x^3 = 0$, и положи потомъ $3hy^2 - x^3 = 0$, $3x^2(y + i) = 0$; откуда взявъ двѣ величины $x = 0$, $y = 0$, которыя единыя токмо удовлетворяютъ предложенному уравненію, обратишь уравненіе между разностями, въ $h\Delta y^3 - i\Delta x^3 - \Delta y\Delta x^3 = 0$; откуда выдетъ уравненіе, предѣлъ въ себѣ заключающее, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 = \frac{h}{i}$, которое имѣетъ токмо одинъ дѣйствительный корень $\frac{\partial x}{\partial y} = \sqrt[3]{\frac{h}{i}}$. И такъ дѣйствительно чрезъ начало координатъ одна токмо вѣтвь проходитъ; и предложеніе, выше изображенное, будетъ точнѣе выражено, когда скажется, что степень крайности какой нибудь точки равна числу дѣйствительныхъ корней уравненія, предѣлъ въ себѣ заключающаго. (*)

(*) Предложенное здѣсь авторомъ правило объ опредѣленіи точекъ крайныхъ, послѣ учиненнаго нами перемѣщенія члена 152го въ членъ 137й, гораздо сокращено быть можетъ, какъ то изъ слѣдующаго явствуетъ.

Выше видѣли, что вообще предѣлъ содержанія между разностями перемѣнныхъ количествъ x, y заключающихся въ уравненіи α опредѣляется изъ уравненія разностей β чрезъ посредство уравненія

(a) . . . . $A\partial x + B\partial y = 0$;

такъ же видѣли, что естьли отъ какихъ нибудь соотвѣтствующихъ величинъ количествъ x, y предстоящія A, B обращаются въ одно и тоже время въ нуль, то тотъ предѣлъ содержанія опредѣляется изъ уравненія β чрезъ посредство уравненія

(b) . . . . . $C\partial x^2 + D\partial x\partial y + E\partial y^2 = 0$,

которое предзнаменуетъ двѣ вѣтви взаимно пресѣкающіяся и точку двукратную; равнымъ образомъ видѣли, что естьли сверьхъ того уничтожатся и предстоящія C, D и E, то тотъ же самой предѣлъ опредѣляется изъ уравненія β чрезъ посредство уравненія

(c) . . . . . $F\partial x^3 + G\partial x^2\partial y + H\partial x\partial y^2 + I\partial y^3 = 0$,

которое предзнаменуетъ три вѣтви взаимно пресѣкающіяся и точку трикратную, и такъ далѣе.

Я говорю, что уравненіе b есть не иное что какъ уравненіе a, въ которомъ взятъ предѣлъ содержанія между разностями, приемля ∂x, ∂y за постоянныя количества; что уравненіе c есть не иное что какъ уравненіе b, въ которомъ взятъ предѣлъ содержанія между разностями, полагая ∂x, ∂y постоянными количествами; и такъ далѣе. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Пусть уравненіе α будетъ $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; выдетъ

β . . . . $(2ax + by + d)\Delta x + (bx + 2cy + e)\Delta y + a\Delta x^2 + b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2 = 0$,

a . . . . $(2ax + by + d)\partial x + (bx + 2cy + e)\partial y = 0$,

b . . . . $a\partial x^2 + b\partial x\partial y + c\partial y^2 = 0$;

и взявъ предѣлъ содержанія между разностями перемѣнныхъ количествъ x, y въ уравненіи a, приемля ∂x, ∂y за постоянныя, найдешь $(2a\partial x + b\partial y)\partial x + (b\partial x + 2c\partial y)\partial y = 0$, или по сокращеніи и раздѣленіи на 2, $a\partial x^2 + b\partial x\partial y + c\partial y^2 = 0$, что есть уравненіе b.

2) Пусть еще уравненіе α будетъ $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k = 0$; выдетъ

β. . . . $(3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h)\Delta x + (bx^2 + 2cxy + 3dy^2 + fx + 2y + i)\Delta y + (3ax + by + e)\Delta x^2 + (2bx + 2cy + f)\Delta x\Delta y + (cx + 3dy + g)\Delta y^2 + a\Delta^3 + b\Delta x^2\Delta y + c\Delta x\Delta y^2 + d\Delta y^3 = 0$,

a . . . $(3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h)\partial x + (bx^2 + 2cxy + 3dy^2 + fx + 2gy + i)\partial y = 0$,

b . . . $(3ax + by + e)\partial x^2 + (2bx + 2cy + f)\partial x\partial y + (cx + 3dy + g)\partial y^2 = 0$,

c . . . . $a\partial x^3 + b\partial x^2\partial y + c\partial x\partial y^2 + d\partial y^3 = 0$;

и взявъ предѣлъ содержанія между разностями перемѣнныхъ количествъ

x, y въ уравненіи a, полагая ∂x, ∂y постоянными, найдешь
$(6ax\partial x + 2by\partial x + 2bx\partial y + 2cy\partial y + 2e\partial x + f\partial y)\partial x + (2bx\partial x + 2cy\partial x + 2cx\partial y + 6dy\partial y + f\partial x + 2g\partial y)\partial y = 0$ или по сокращеніи и раздѣленіи на 2, $(3ax + by + e)\partial x^2 + (2bx + 2cy + f)\partial x\partial y + (cx + 3dy + g)\partial y^2 = 0$, то есть уравненіе b; такъ же взявъ предѣлъ содержанія въ семъ уравненіи b, полагая ∂x, ∂y постоянными, получишь
$(3a\partial x + b\partial y)\partial x^2 + (2b\partial x + 2c\partial y)\partial x\partial y + (c\partial x + 3d\partial y)\partial y^2 = 0$, или по сокращеніи и раздѣленіи на 3, $a\partial x^3 + b\partial x^2\partial y + c\partial x\partial y^2 + d\partial y^3 = 0$, то есть уравненіе c. И такъ далѣе.

Слѣдовательно, послѣ члена 137, при опредѣленіи точекъ кратныхъ нѣтъ уже нужды изъ уравненія кривой линеи α искать уравненія между разностями β, но прямо надлежитъ взять уравненія, предѣлъ содержанія въ себѣ заключающія, a, b, c, такъ далѣе, пока не дойдешь до такого уравненія, чрезъ которое оный предѣлъ опредѣлиться можетъ. Мы сіе сокращенное правило пояснимъ нѣсколькими примѣрами.

1) Пусть требуется опредѣлить кратныя точки въ кривой линеи, коея уравненіе $y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0$. Взявъ уравненіе, предѣлъ въ себѣ заключающее, $(a) \ldots 4y^3\partial y + 4x^3\partial x - 6ay^2\partial y + 2bx^2\partial y + 4bxy\partial x = 0$, и преобразивъ оное въ сіе $(4x^3 + 4bxy)\partial x + (4y^3 - 6ay^2 + 2bx^2)\partial y = 0$, положи $4x^3 + 4bxy = 0$ и $4y^3 - 6ay^2 + 2bx^2 = 0$; чрезъ что изъ перваго уравненія нашедъ $x = 0$, $x = \pm\sqrt{-by}$, получишь $y = 0$, $y = 0$ и $y = \frac{3}{2}a$, когда во второе уравненіе вмѣсто x поставишь 0, и $y = 0$, $y = \frac{3}{4}a \pm \sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{9a^2}{16}}$, когда въ то же второе уравненіе вмѣсто x поставишь $\pm\sqrt{-by}$. Однако данному уравненію удовлетворяютъ токмо координаты $x = 0$ и $y = 0$; изъ чего заключить надлежитъ, что кривая линея имѣетъ только одну кратную точку. Чтобы опредѣлить степень кратности сея точки, озьми въ уравненіи a предѣлъ содержанія между разностями, полагая ∂x, ∂y постоянными; чрезъ сіе получишь уравненіе $(b) \ldots (12x^2 + 4by)\partial x^2 + 8bx\partial x\partial y + (12y^2 - 12ay)\partial y^2 = 0$; и поелику отъ $x = 0$ и $y = 0$, всѣ члены сего уравненія истребляются, то возьми въ немъ еще предѣлъ содержанія, полагая ∂x, ∂y постоянными, и будешь имѣть уравненіе $(c) \ldots 24x\partial x^3 + 12b\partial x^2\partial y + (24y - 12a)\partial y^3 = 0$, въ которомъ, отъ $x = 0$ и $y = 0$, всѣ члены не истребляются, и которое отъ того обращается въ $b\partial x^2\partial y - a\partial y^3 = 0$ или еще въ $\frac{\partial y^3}{\partial x^3} - \frac{b}{a}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, кое уравненіе для $\frac{\partial y}{\partial x}$ даетъ величины дѣйствительныя 0 и $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; почему заключаемъ, что въ данной кривой линеи имѣется точка трикратная, въ коей одна изъ трехъ касательныхъ есть самая ось абсциссъ, а двѣ другія суть прямыя съ оною осью уголъ составляю-

щія, котораго тангенсъ $= \sqrt{\frac{b}{a}}$. Сія кривая линея вѣтвями своими заключаетъ три пространства, на подобіе листковъ древесныхъ.

2) Пусть еще требуется опредѣлить кратныя точки въ кривой линеи, коея уравненіе $x^4 - 2ay^3 - 2a^2x^2 - 3a^2y^2 + a^4 = 0$. Взявъ уравненіе, предѣлъ въ себѣ заключающее (a) . . . $(4x^3 - 4a^2x)\partial x - (6ay^2 + 6a^2y)\partial y = 0$, положи $4x^3 - 4a^2x = 0$, $6ay^2 + 6a^2y = 0$; получишь $x = 0$, $x = \pm a$ и $y = 0$, $y = -a$. И данному уравненію удовлетворяютъ троякія координаты, а именно $x = 0$ съ $y = a$, $x = a$ съ $y = 0$ и $x = -a$ съ $y = 0$; почему кривая линея будетъ имѣть три кратныя точки, изъ коихъ каждая будетъ токмо двукратная, потому что взявъ предѣлъ содержанія въ уравненіи a, полагая ∂x, ∂y постоянными, найдешь, что отъ упомянутыхъ трехъ координатъ всѣ члены уравненія b не истребляются. Сія кривая линея вѣтвями своими пресѣкается на подобіе нити когда изъ оной дѣлается узелъ.

3) Дано уравненіе $ay^2 - x^3 + (b - c)x^2 + bcx = 0$, вопрошается будетъ ли изображаемая онымъ кривая линея имѣть кратныя точки? Взявъ уравненіе, предѣлъ въ себѣ заключающее, (a) . . . $(-3x^2 + 2(b - c)x + bc)\partial x + 2ay\partial y = 0$, положи $-3x^2 + 2(b - c)x + bc = 0$ и $2ay = 0$, выдетъ $y = 0$ и $x = \frac{b - c}{3} \pm \sqrt{\frac{bc}{3} + \left(\frac{b - c}{3}\right)^2}$; и какъ $y = 0$ ни съ которою величиною количества x предложенному уравненію не удовлетворяютъ, то слѣдуетъ, что кривая линея, онымъ изображаемая, никакой кратной точки не имѣетъ. И дѣйствительно по приведеніи даннаго уравненія въ слѣдующій видъ $y = \pm\sqrt{\frac{x(x - b)(x + c)}{a}}$, найдется, что она состоитъ изъ двухъ вѣтвей, отъ начала въ разстояніи $= b$ сливающихся и безконечно простирающихся, и овала, ось $= c$ имѣющаго. Но естьли мы истребимъ овалъ, положивъ $c = 0$, то данное уравненіе сдѣлается $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$, и уравненіе (a), предѣлъ содержанія въ себѣ заключающее, учинится $(-3x^2 + 2bx)\partial x + 2ay\partial y = 0$, гдѣ положивъ $-3x^2 + 2bx = 0$ и $2ay = 0$, найдешь $y = 0$, $x = 0$ и $x = \frac{2b}{3}$, и удобно усмотришь, что координаты $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяютъ предложенному уравненію; почему долженствовало бы заключить, что въ кривой линеи имѣется точка кратная, не по причинѣ что второе уравненіе (b), предѣлъ въ себѣ заключающее, будучи $a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + b = 0$, даетъ для $\frac{\partial y}{\partial x}$ мнимыя величины $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, надлежитъ заключить совсѣмъ тому противное. Между тѣмъ, когда изъ того, что въ уравненіи $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$ по сдѣланіи $y = 0$, получаемъ $x = 0$, $x = 0$, и $x = -b$, обыкновенно заключается, что кривая линея проходитъ

два раза чрезъ начало; то можно на сїю точку взирать какъ на двукратную, называя ее, для отличїя отъ истинной, *двукратною невидимою точкою.*

Приложеніе того же способа къ опредѣленію касательныхъ въ трансцендентныхъ кривыхъ линеяхъ.

(143) Предъидущіе примѣры взяты изъ алгебраическихъ кривыхъ линей, то есть такихъ, у коихъ уравненіе между координатами есть алгебраическое. Но естьли оныя уравненія будутъ и другаго рода, какъ $y = \log. x$, гдѣ чрезъ $\log. x$ разумѣется логариѳмъ количества x, $y = \sin. x$, $y = \cos. x$, $y = A \sin. x$, $y = A \tang. x$, и проч., гдѣ чрезъ $A \sin x$, $A \tang. x$, и проч. разумѣется дуга, коея синусъ x, тангенсъ x, и проч.; то цаки все дѣло будетъ состоять токмо въ найденіи предѣла содержанія между разностями Δy и Δx. [Кривыя линеи имѣющія таковыя уравненія называются *трансцендентными*; ниже мы увидимъ точнѣйшее имъ опредѣленіе].

Кривая линея, коея уравненіе $y = \log. x$, Геометрами названа *логариѳмикою*. Главное ея свойство состоитъ въ томъ, что естьли абсциссы AP, AP′, и проч. (черт. XXXII) находятся въ ариѳметической прогрессіи, то ординаты PM, PM′, и проч. суть въ прогрессіи геометрической; сирѣчь въ томъ, что каждая ордината имѣетъ соотвѣтствующую абсциссу своимъ логариѳмомъ. Естьли послѣ сего опредѣленія означимъ чрезъ y, y', y'', y''', и проч. ординаты соотвѣтствующія абсциссамъ x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, и проч., то будемъ имѣть $\div y : y' : y'' : y'''$: и проч., и $y' - y : y'' - y'$: и проч. $= y : y'$: и проч. Вообще да будутъ y и z двѣ ординаты сей кривой линеи, x и u соотвѣтствующія абсциссы, y' и z' тѣ величины ординатъ, въ кои оныя обращаются, когда абсциссы сдѣлаются $x + \rho$, $u + \rho$; будетъ имѣть $y' - y : z' - z = y : z$, сирѣчь, какая бы разность абсциссы ни была, но лишь бы почиталася постоянною, содержаніе между разностями двухъ ординатъ будетъ тоже, что и

содержанїе самыхъ ординатъ. Изъ чего найдешь, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta z}{\Delta x} = y : z$. И поелику сїи содержанїя $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ сохраняютъ между собою одно непремѣнное содержанїе, то оное должно быть и содержанїе ихъ предѣловъ, и y къ z должно быть въ томъ же содержанїи, какъ и предѣлъ содержанїя $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ къ предѣлу содержанїя $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. Итакъ во всякой логариѳмикѣ подкасательныя равны между собою, и предѣлъ содержанїя, между разностями ординаты и абсциссы, пропорцїоналенъ ординатѣ.

Слѣдовательно, когда содержанїе между двумя перемѣнными количествами y и x дано будетъ чрезъ уравненїе $x = \log. y$, тогда будешь имѣть $\frac{\partial y}{\partial x} = y$, взявъ подкасательную за единицу. Въ обыкновенныхъ таблицахъ сїя подкасательная равна 0,43429448, и проч. [какъ то ниже окажется]. Геометры исчислили такъ же таблицы, положивъ подкасательную единицею, и логариѳмы, въ нихъ заключающїеся, назвали *гиперболоическими*, для причинъ, о которыхъ мы вскорѣ скажемъ. Но какїя бы сїи причины ни были, знакъ log. поставленный предъ какимъ нибудь количествомъ, въ послѣдствїи всегда означать будетъ гиперболоической логариѳмъ сего количества.

(144) Понеже доказано, что естьли $z = \log. y$, то будетъ $\partial z = \frac{\partial y}{y}$; почему естьли $z = \log. (x + \sqrt{a^2 + x^2})$, то выдетъ $\partial z = \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Пусть еще предложено найти предѣлъ содержанїя между разностями, когда $z = \log. \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a}$? Естьли бы дано было $y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a}$, то бы мы положили $\sqrt{a^2 + x^2} + a = u$, и изъ того нашли $\sqrt{a^2 + x^2} - a = u - 2a$ и $y = \frac{u - 2a}{u}$; и какъ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ и $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2a}{u^2}$, то бы вышло $\partial y = \frac{2ax\partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}\,(\sqrt{a^2 + x^2} + a)^2}$; но предложено $z = \log. y$, чего ради будетъ $\partial z = \frac{\partial y}{y} = \frac{2ax\partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}\,(\sqrt{a^2 + x^2} - a)\,(\sqrt{a^2 + x^2} + a)} = \frac{2a\partial x}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$. Таким же

образомъ докажется, что естьли $z = \log. \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$, то должно выдти $\partial z = \frac{2a\partial x}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Пусть $z = (\log. x^n)^m$; положи $\log. x^n = y$, будетъ $n \log. x = y$ и $\partial y = \frac{n\partial x}{x}$; но [по причинѣ $z = y^m$] $\partial z = my^{m-1}\partial y$, слѣдовательно $\partial z = mn (\log. x^n)^{m-1} \frac{\partial x}{x}$. Пусть $z = \log. \log. x$; положи $\log. x = y$, будетъ $\partial y = \frac{\partial x}{x}$; но по причинѣ что $z = \log. y$, выдетъ $\partial z = \frac{\partial y}{y}$, слѣдовательно $\partial z = \frac{\partial x}{x \log. x}$.

(145) Количества возвышенныя въ степень, коея показатель есть величина перемѣнная, Геометры наименовали *неопредѣленно-степенными*; таковы суть a^x, y^x, и еще слѣдующія a^{x^y}, y^{x^u}, и проч., которыя называются количествами неопредѣленно-степенными втораго порядка, потому что показатели ихъ сами суть неопредѣленно-степенныя количества перваго порядка; равнымъ образомъ именуются неопредѣленно-степенными количествами порядка n, у коихъ показатели суть неопредѣленно-степенныя количества порядка $n - 1$. Положивъ сіе, вопрошается найти предѣлъ содержанія между разностями перемѣнныхъ количествъ z и x, когда содержаніе между сими количествами дано чрезъ уравненіе $z = a^x$? Преобразивъ сіе уравненіе въ слѣдующее $\log. z = x \log. a$, получишь $\frac{\partial z}{\partial x} = z \log. a = a^x . \log. a$. Пусть $z = y^x$, будетъ $\log. z = x \log. y$ и $\frac{\partial z}{z} = \partial x \log. y + \frac{x \partial y}{y}$, а отсюда выдетъ $\partial z = y^x (\partial x \log. y + \frac{x \partial y}{y})$.

(146) Чѣмъ точка N (черт. VII) болѣе приближается къ точкѣ M, тѣмъ содержанія хорды MN къ MO и дуги MN къ той же линеи MO болѣе приближаются къ равенству между собою, такимъ образомъ, что онѣ будутъ равны, когда разность абсциссы сдѣлается нуль; но содержаніе хорды MN къ MO имѣетъ предѣломъ содержаніе MT къ TP, которое по причинѣ подобныхъ треугольниковъ MTP, RMP, равно содержанію нор-

шаля MR къ MP, и дуга MN сверьхъ того есть разность дуги AM; чего ради содержанie MT къ TP или MR къ MP есть предѣлъ содержанiя между разностями дуги AM и абсциссы AP. Не менѣе явственно, что содержанie MT къ MP или MR къ RP есть предѣлъ содержанiя между разностями дуги AM и ординаты PM.

И такъ, естьли означимъ чрезъ $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$ предѣлы содержанiй между разностями дуги (s) и абсциссы (x), и дуги (s) и ординаты (y), мы будемъ имѣть, по причинѣ что $PT = y\frac{\partial x}{\partial y}$ и $RP = y\frac{\partial y}{\partial x}$, $MT = y\frac{\partial s}{\partial y}$ и $MR = y\frac{\partial s}{\partial x}$. Но содержанie хорды MN къ MO, или $\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$ имѣетъ также предѣломъ $\sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}}$; чего ради $\frac{MT}{TP} = \frac{MR}{MP} = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}{\partial x}$, и слѣдственно $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$.

(147) Пусть AM дуга круга, имѣющая точку R центромъ, MR радiусомъ, MP синусомъ и RP косинусомъ, которой имѣетъ ту же разность, что и абсцисса, естьли оная возмется отрицательно; изъ доказаннаго предъ симъ слѣдуетъ: 1) что содержанie радiуса къ синусу дуги, есть предѣлъ содержанiя между разностями дуги и абсциссы; 2) что сie самое содержанie радiуса къ синусу, взятое отрицательно, есть предѣлъ содержанiя между разностями дуги и косинуса; 3) что содержанie радiуса къ косинусу дуги есть предѣлъ содержанiя между разностями дуги и синуса.

И такъ означивъ радiусъ чрезъ a и дугу круга AM чрезъ s, будешь имѣть $y = \text{ſin.}\, s$, $x = a - \text{coſ.}\, s$; потомъ $-\frac{\partial s}{\partial x}$ (что равно предѣлу содержанiя между разностями дуги и косинуса) $= \frac{a}{\text{ſin.}\, s}$, и $\frac{\partial s}{\partial y}$ (что равно предѣлу содержанiя между разностями дуги и синуса) $= \frac{a}{\text{coſ.}\, s}$. Поставляя же въ сiи двѣ формулы вмѣсто ſin. s и coſ. s ихъ величины $\sqrt{2ax - x^2}$, $\sqrt{a^2 - y^2}$, получишь, когда кривая линея есть кругъ, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$.

(148) Естли полагая радїусъ единицею, дано будетъ $y = \mathrm{sin.}\,u$, $x = \mathrm{cos.}\,u$, то выдетъ $\partial y = \partial u\,\mathrm{cos.}\,u$, $\partial x = -\partial u\,\mathrm{sin.}\,u$; и какъ $\mathrm{cos.}\,u = \sqrt{1 - y^2}$, $\mathrm{sin.}\,u = \sqrt{1 - x^2}$, то будетъ $\partial u = \frac{\partial y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$. Предлагается еще $z = \mathrm{tang.}\,u$; будетъ по причинѣ что $\mathrm{tang.}\,u = \frac{y}{x}$, $\partial z = \frac{x\partial y - y\partial x}{x^2}$ $\left[= \frac{\partial u\,\mathrm{cos.}\,u^2 + \partial u\,\mathrm{sin.}\,u^2}{\mathrm{cos.}\,u^2}\right] = \frac{\partial u}{\mathrm{cos.}\,u^2}$; и какъ $z^2 = \frac{\mathrm{sin.}\,u^2}{\mathrm{cos.}\,u^2} = \frac{1 - \mathrm{cos.}\,u^2}{\mathrm{cos.}\,u^2}$, и посему $\mathrm{cos.}\,u^2 = \frac{1}{1+z^2}$, то выдетъ $\partial u = \frac{\partial z}{1+z^2}$. Такимъ же образомъ докажется, что когда $z = \mathrm{cot.}\,u$, тогда должно выдти $\partial z = \frac{-\partial u}{\mathrm{sin.}\,u^2}$ и потомъ $\partial u = \frac{-\partial z}{1+z^2}$.

Пусть $z = \mathrm{sec.}\,u = \sqrt{1 + \mathrm{tang.}\,u^2}$; положи $\mathrm{tang.}\,u = y$, будетъ $\partial u = \frac{\partial y}{1+y^2}$; но $\partial z = \frac{y\partial y}{\sqrt{1+y^2}}$, слѣдовательно выдетъ $\partial u = \frac{\partial z}{y\sqrt{1+y^2}}$, гдѣ поставивъ на мѣсто y равную величину $\sqrt{z^2 - 1}$, получишь $\partial u = \frac{\partial z}{z\sqrt{z^2-1}}$. Такъ же докажется, что когда $z = \mathrm{cosec.}\,u$, тогда должно выдти $\partial u = \frac{-\partial z}{z\sqrt{z^2-1}}$.

Пусть $z = \mathrm{sin.\,v.}\,u = 1 - \mathrm{cos.}\,u$; будетъ $\partial z = \partial u\,\mathrm{sin.}\,u$; и какъ $\mathrm{cos.}\,u = 1 - z$, и посему $\mathrm{sin.}\,u = \sqrt{2z - z^2}$, то выдетъ $\partial u = \frac{\partial z}{\sqrt{2z - z^2}}$.

(149) Кривыя линеи, коихъ свойство не можетъ быть изображено чрезъ алгебраическое уравненіе между координатами, или коихъ свойство не иначе можетъ быть изображено чрезъ алгебраическое уравненіе, какъ между сими координатами и купно предѣлами содержаній между ихъ разностями, называются *трансцендентными*. Такова есть логаривмика, коея уравненіе $x = \log.\,y$ или $\partial y = y\partial x$; такова еще циклоида, которая описывается слѣдующимъ образомъ.

Вообразимъ себѣ, что полукругъ CFE (черт. XXXIII), коего діаметръ EC перпендикуляренъ къ прямой EA, катится по сей прямой EA пока точка C не достигнетъ до A; оная точка C въ продолженіе сего движенія опишетъ часть кривой линеи CBA, называемую *полуциклоидою*. Или вмѣсто сего можно

представить себѣ; что точка C описываетъ равномѣрно дугу полуокружности CFE, между тѣмъ какъ E перебѣгаетъ часть прямой EA. Тогда, естьли означивъ дугу CF чрезъ s и ординату FB параллельную EA чрезъ u, напишемъ для изображенія содержанія сихъ двухъ равномѣрныхъ движеній, сію пропорцію $s:u = h:i$, мы будемъ имѣть $s > u$ и циклоиду сжатую, когда $h > i$, $s < u$ и циклоиду растянутую, когда $h < i$; и наконецъ циклоиду простую, когда $h = i$. Положивъ сіе, предлагается провести касательную къ циклоидѣ, въ какой нибудь ея точкѣ, или вообще, предлагается провести въ какой нибудь точкѣ касательную къ кривой линеи, коея одна изъ координатъ есть дуга другой кривой линеи.

(150) Пусть AM (черт. XXXIV) кривая линея, къ которой провести касательную MΘ извѣстно уже какъ, и AN другая кривая линея, коея свойство дано чрезъ уравненіе между дугою AM и прямою MN; требуется провести въ точкѣ N касательную къ сей другой кривой линеи? Протянувъ P′M′N′ параллельно PMN и хорду N′NS встрѣчающуюся съ касательною MΘ въ точкѣ S, проведи Nn параллельно Mt; подобные треугольники N′nN, NMS дадутъ сію пропорцію $N'n : nN = NM : MS$; откуда слѣдуетъ, что полагая NT касательною, которую провести требуется, содержаніе $\frac{MT}{MN}$ будетъ = предѣлу содержанія $\frac{nN}{N'n}$. Потомъ означивъ AP чрезъ x, PM чрезъ y, MN чрезъ u и дугу AM чрезъ s, и удержавъ у ∂x, ∂y и ∂s тѣ же, что и прежде знаменованія, означимъ чрезъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ предѣлъ содержанія $\frac{N'n}{PP'}$ или $\frac{\Delta u}{\Delta x}$; мы получимъ $P\Theta = \frac{y\partial x}{\partial y}$, $M\Theta = \frac{y\partial s}{\partial y}$ и по причинѣ что $Mt : M\Theta = PP' : P\Theta$, $Mt = Nn = \frac{\partial s}{\partial x} . \Delta x$; слѣдовательно $\frac{nN}{nN'}$ ($= \frac{\partial s}{\partial x} . \frac{\Delta x}{\Delta u}$) будетъ имѣть предѣломъ $\frac{\partial s}{\partial u}$, и $MT = \frac{u\partial s}{\partial u}$, которая формула совершенно сходствуетъ съ тою, кою мы при координатахъ прямолинейныхъ нашли.

И такъ въ циклоидѣ, поелику $s = \frac{h}{i} u$ и $\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{h}{i}$, будетъ

имѣть $MT = \frac{hu}{i} = s$. Естьли $h = i$, или циклоида простая, то будетъ $NM = MT$, треугольникъ NMT равнобедренный и уголъ TMP двукратный угла TNP; но протянувъ хорду AM, заключишь изъ свойства круга, что углы PMA и AMT равны между собою, и что каждой изъ нихъ есть половина угла TMP, и посему равенъ углуTNP; слѣдовательно въ случаѣ простой циклоиды касательная параллельна хордѣ MA. (*).

Естьли же свойство кривой линеи дано будетъ чрезъ уравненіе между дугою AM и прямою PN; то означивъ PN чрезъ u, будешь имѣть $PT' = u\frac{\partial x}{\partial u}$. Но поелику по положенію линеи MΘ и PΘ суть данныя, то мы означимъ ихъ чрезъ c и e, и мы получимъ $c = \frac{y\partial s}{\partial y}$ и $e = \frac{y\partial x}{\partial y}$; откуда выдетъ $\partial x = \frac{e\partial s}{c}$, и наконецъ $PT' = \frac{eu}{c}.\frac{\partial s}{\partial u}$. [Кривая линея AN, у которой $AM (= s)$ есть дуга круга и уравненіе между сею дугою и прямою $PN (= u)$ тоже, что и уравненіе циклоиды $hu = is$, есть изъ сего роду простѣйшая и извѣстна подъ именемъ *трохоиды.*]

(*) Но все сіе прямо, безъ предположенія лемы, вывести весьма удобно можно, какъ то явствуетъ изъ слѣдующаго.

Пусть CBA (черт 12) полуциклоида кругомъ CFE произведенная; означивъ CL чрезъ x, LB чрезъ y и діаметръ CE чрезъ $2a$, будетъ по причинѣ найденнаго авторомъ уравненія $is = hu$, $y = \frac{is}{h} + \sqrt{2ax - x^2}$, и оттуда выдетъ $\partial y = \frac{i}{h}\partial s + \frac{a\partial x - x\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{i}{h}.\frac{a\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $+ \frac{a\partial x - x\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{(i+h)a\partial x - hx\partial x}{h.\sqrt{2ax - x^2}}$, и $TL \left(= \frac{y\partial x}{\partial y}\right) =$ $\frac{hy.\sqrt{2ax - x^2}}{a(i+h) - hx}$. Пусть $h = i$, будетъ $TL = \frac{hy\sqrt{2ax - x^2}}{2ha - hx} =$ $\frac{y\sqrt{2ax - x^2}}{2a - x} = \frac{yx\sqrt{2ax - x^2}}{2ax - x^2} = \frac{yx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{BL.CL}{FL}$; что даетъ сію пропорцію $FL : BL = CL : TL$, то есть въ простой циклоидѣ касательная TB параллельна хордѣ CF.

Славной Ейлеръ въ превосходномъ своемъ сочиненіи Introductio in analysin infinitorum производитъ всѣ тои рода циклоидъ инымъ пристойнѣй-

шимъ для Геометрïи образомъ. Вообразимъ, говоритъ онъ, что по прямой линеи AN катится кругъ ACB (черт. 13), и положимъ для большей общности, что описывающая кривую линею Dd точка взята не на окружности въ B, но гдѣ нибудь на продолженномъ дiаметрѣ въ D; потомъ означимъ радiусъ сего круга чрезъ a, разстоянïе CD, на которое точка D отъ центра отдалена, чрезъ b, и перейденное пространство AQ, когда кругъ придетъ въ положенïе $aQbR$, чрезъ u; будетъ дуга $aQ = u$, уголъ $acQ = \frac{u}{a}$ и уголъ $dcQ = \pi - \frac{u}{a}$, гдѣ d точка, въ которую придетъ D, когда кругъ приметъ упомянутое положенïе $aQbR$, и слѣдственно есть одна изъ точекъ искомой кривой линеи. Положивъ сïе, опустимъ изъ d на прямую AQN перпендикуляръ dp и на прямую QR перпендикуляръ dn; мы будемъ имѣть $dn = b\,\text{ſin.}\,(\pi - \frac{u}{a}) = b\,\text{ſin.}\,\frac{u}{a}$, $cn = b\,\text{coſ.}\,(\pi - \frac{u}{a}) = -b\,\text{coſ.}\,\frac{u}{a}$. Потомъ да продолжится dn пока встрѣтится съ прямою AD въ P, и да будутъ координаты $DP = x$, $Pd = y$; мы получимъ $x = b + cn = b - b\,\text{coſ.}\,\frac{u}{a}$ и $y = AQ + dn = u + b\,\text{ſin.}\,\frac{u}{a}$, и оттуда выдетъ $b\,\text{coſ.}\,\frac{u}{a} = b - x$, $\text{coſ.}\,\frac{u}{a} = 1 - \frac{x}{b}$, $b\,\text{ſin.}\,\frac{u}{a} = b\sqrt{1 - (1 - \frac{x}{b})^2} = \sqrt{2bx - x^2}$ и $u = a.\text{A}\,\text{coſ.}\,(1 - \frac{x}{b})$, или $= a.\text{A}\,\text{ſin.}\,\frac{\sqrt{2bx - x^2}}{b}$. На конецъ сïи величины поставленныя въ $y = u + b\,\text{ſin.}\,\frac{u}{a}$, даютъ $y = \sqrt{2bx - x^2} + a\,\text{A}\,\text{coſ.}\,(1 - \frac{x}{b})$ или $y = \sqrt{2bx - x^2} + a\,\text{A}\,\text{ſin.}\,\frac{\sqrt{2bx - x^2}}{b}$. Естьли за начало абсциссъ возмешь центръ и положишь $b - x = t$, то будетъ $\sqrt{2bx - x^2} = \sqrt{b^2 - t^2}$, $\text{coſ.}\,\frac{u}{a} = \frac{t}{b}$ и $y = \sqrt{b^2 - t^2} + a.\text{A}.\text{coſ.}\,\frac{t}{b}$.

Здѣсь найденныя уравненïя будутъ принадлежать къ циклоидѣ простой, естьли $b = a$, и къ циклоидѣ сжатой или растянутой, естьли $b > a$ или $b < a$.

Чрезъ посредство сихъ уравненïй, послѣ предложеннаго нами выше, касательная къ циклоидѣ столь же удобно проведена быть можетъ, какъ и чрезъ посредство авторова уравненïя.

Къ циклоидамъ должно относить *эпициклоиды* и *гипоциклоиды*, которыя происходятъ отъ движенïя круга ACB (черт. 14) катящагося по окружности AQN другаго, и описываются непремѣнною точкою D внѣ или внутри катящагося круга взятою. Пусть радiусъ OA неподвижнаго круга $= c$, радiусъ катящагося по немъ круга $CA = CB = a$, и разстоянïе CD описывающей кривую линею точки $D = b$; возмемъ прямую

OD за ось искомой кривой линеи Dd и положить, что катящiйся кругЪ оставивЪ первое свое положенiе, при которомЪ точки O, C и D суть вЪ прямой линеи, принялЪ положенiе QcR и описалЪ дугу $AQ = u$, такимЪ образомЪ, что уголЪ $AOQ = \frac{u}{c}$; будетЪ имѣть $Qa = AQ = u$, и посему уголЪ $acQ = \frac{u}{a} = Rcd$; потомЪ взявЪ прямую $cd = CD = b$, гдѣ точка d будетЪ принадлежать кЪ кривой линеи Dd, опустимЪ на ось перпендикулярЪ dP и тотЪ же перпендикулярЪ cm, и протянемЪ cn параллельно оси; отЪ чего по причинѣ что уголЪ $Rcn = AOQ = \frac{u}{c}$, будетЪ уголЪ $dcn = \frac{u}{c} + \frac{u}{a} = \left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, и оттуда выдетЪ $dn = b\,\text{fin.}\left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, и $cn = b\,\text{cof.}\left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, потомЪ по причинѣ что $OC = Oc = a + c$, будетЪ $cm = (a+c)\,\text{fin.}\,\frac{u}{c}$, и $Om = (b+c)\,\text{cof.}\,\frac{u}{c}$. И такЪ означивЪ координаты OP чрезЪ x и Pd чрезЪ y, будетЪ $x = (a+c)\text{cof.}\,\frac{u}{c} + b\,\text{cof.}\frac{(a+c)}{ac}u$ и $y = (a+c)\,\text{fin.}\,\frac{u}{c} + b\,\text{fin.}\frac{(a+c)}{ac}u$; откуда явствуетЪ, что когда $\frac{a+c}{a}$ есть количество соизмѣримое, тогда по причинѣ соизмѣримости угловЪ $\frac{u}{c}$ и $\frac{a+c}{ac}u$, можно будетЪ исключить неизвѣстную u, и слѣдственно найти алгебраическое уравненiе между x и y; вЪ другихЪ же случаяхЪ кривая линея такЪ описанная будетЪ трансцендентная.

ПричемЪ примѣтить надлежитЪ, что когда a есть отрицательное, то кривая линея сдѣлается гипоциклоидою, потому что катящiйся кругЪ будетЪ внутри недвижимаго круга. Обыкновенно разстоянiе b дѣлается равно радiусу a, и тогда выходятЪ собственно такЪ называемыя эпициклоиды и гипоциклоиды. Естьли возмется сумма квадратовЪ x^2 и y^2, то получится уравненiе $x^2 + y^2 = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c)\,\text{cof.}\,\frac{u}{c}$, посредствомЪ котораго весьма удобно учинено быть можетЪ исключенiе u, когда a и c будутЪ соизмѣримыя. Пусть напримѣрЪ $c = a = b$, будетЪ $x^2 + y^2 = 5a^2 + 4a^2\,\text{cof.}\,\frac{u}{a}$, $\text{cof.}\,\frac{u}{a} = \frac{x^2 + y^2 - 5a^2}{4a^2}$, $\text{fin.}\,\frac{u}{a} = \frac{y}{2a(1 + \text{cof.}\,\frac{u}{a})} = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$; что поставивЪ вЪ уравненiе $x = 2a\,\text{cof.}\,\frac{u}{a} + a\,\text{cof.}\,2\frac{u}{a} = 2a\,\text{cof.}\,\frac{u}{a} + a\left(\text{cof.}\,\frac{u^2}{a} - \text{fin.}\,\frac{u^2}{a}\right)$, или $= 2a\,\text{cof.}\,\frac{u}{a} + 2a\,\text{cof.}\,\frac{u^2}{a} - a$, получишь уравненiе самой простѣйшей Эпициклоиды, между координатами x и y, $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6a^2y^2 - 6a^2x^2 - 8a^3x - 3a^4 = 0$.

Что бы провести къ эпициклоидѣ, какъ и къ гипоциклоидѣ, касательную, то ничего болѣе не требуется, какъ взять дифференціалъ уравненія ихъ, и найти изъ онаго $\frac{ydx}{dy}$. Однако симъ образомъ не безъ труда вывести можно то простое правило для проведенія къ обыкновенной эпициклоидѣ касательной, къ которому достигъ Декартъ синтетически. Мы ниже сего покажемъ, какъ другимъ не менѣе аналитическимъ образомъ къ сему правилу достигнуть можно.

О введеніи вмѣсто координатъ радіуса вектора и угла, онымъ съ осью абсциссъ составляемаго.

(151 Естьли вмѣсто координатъ перпендикулярныхъ $AP = x$, $PM = y$ (черт. VII) будетъ облегчительнѣе ввести во изчисленіе двѣ иныя величины, какъ то линею UM, протянутую къ одной изъ точекъ кривой линеи изъ непремѣнной точки U, взятой въ тойже плоскости, и уголъ составляемый ею съ другою линеею AB, данное положеніе имѣющею; то поступи такимъ образомъ: Означивъ UA чрезъ H, UM чрезъ z, уголъ AUM чрезъ β, дугу AM чрезъ s, и предѣлы содержаній $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, и $\frac{\Delta \beta}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, будетъ имѣть, по причинѣ прямоугольнаго треугольника MPU, $y = z \sin. \beta$, $x = H - z \cos. \beta$, потомъ

$$\partial y = \partial z \sin. \beta + z \partial \beta \cos. \beta,\ \partial x = - \partial z \cos. \beta + z \partial \beta \sin. \beta,$$

и $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ $[= (\partial z^2 \sin. \beta^2 + 2 z \partial z \partial \beta \sin. \beta. \cos. \beta + z^2 \partial \beta^2 \cos. \beta^2 + \partial z^2 \cos. \beta^2 - 2 z \partial z \partial \beta \sin. \beta. \cos. \beta + z^2 \partial \beta^2 \sin. \beta^2)^{\frac{1}{2}} = (\partial z^2 (\sin. \beta^2 + \cos. \beta^2) + z^2 \partial \beta^2 (\sin. \beta^2 + \cos. \beta^2))^{\frac{1}{2}}] = \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$.

Поелику tang. $PTM = \frac{\partial y}{\partial x}$, и когда радіусъ есть 1, тогда tang. $PTM = \frac{\sin. PTM}{\cos. PTM}$; то $\sin. PTM = \frac{\partial y}{\partial s}$, $\cos. PTM = \frac{\partial x}{\partial s}$. Поставь въ сіи выраженія и еще въ слѣдующія $PT = \frac{y \partial x}{\partial y}$, $PR = \frac{y \partial y}{\partial x}$, $MT = \frac{y \partial s}{\partial y}$, $NS = \frac{y \partial s}{\partial x}$ вмѣсто $y, \partial x, \partial y$ и ∂s ихъ величины; оныя выраженія чрезъ то перемѣнятся въ другія, которыя будутъ заключать въ себѣ токмо новыя координаты и предѣлъ содержанія между ихъ разностями.

Въ послѣдствіи всѣ прямыя линеи, какова есть UM, мы будемъ называть *радіусами векторами*. Естьли кривая линея

AM пресѣкаетъ сіи радіусы векторы, составляя со всѣми ими одинъ и тотъ же уголъ, то будетъ $\sin. TMU$ постоянен. Но $TMU = TMP + PMU$ и $\sin. TMU = \sin. TMP \cos. PMU + \cos. TMP \sin. PMU$, сверхъ того $\sin. TMP = \cos. PTM = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\cos. TMP = \sin. PTM = \frac{\partial y}{\partial s}$; слѣдовательно $\sin. UTM = \frac{\partial x}{\partial s} \sin. \beta + \frac{\partial y}{\partial s} \cos. \beta$; и какъ сей синусъ долженъ быть количество постоянное, то получишь $\partial x \sin. \beta + \partial y \cos. \beta = a \partial s$. Переобрази сіе уравненіе [поставивъ въ него вмѣсто ∂x, ∂y и ∂s равныя величины $-\partial z \cos. \beta + z \partial \beta \sin. \beta$, $\partial z \sin. \beta + z \partial \beta \cos. \beta$ и $\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$] въ слѣдующее $z \partial \beta = a \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$, изъ котораго положивъ для краткости $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = c$, получишь [по причинѣ что $a = \frac{z \partial \beta}{\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}$ и что $\sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \frac{z^2 \partial \beta^2}{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}} = \frac{\partial z}{\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}$, $c = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{z \partial \beta}{\partial z}$, и] $\partial \beta = \frac{c \partial z}{z}$. Но $\frac{\partial x}{\partial y}$ [$= \frac{-\partial z \cos. \beta + z \partial \beta \sin. \beta}{\partial z \sin. \beta + z \partial \beta \cos. \beta}$, что по причинѣ $z \partial \beta = c \partial z$, $= \frac{-\partial z \cos. \beta + c \partial z \sin. \beta}{\partial z \sin. \beta + c \partial z \cos. \beta}$] $= \frac{-\cos. \beta + c \sin. \beta}{\sin. \beta + c \cos. \beta}$; слѣдовательно $UT = PT + UP$ [$= \frac{y \partial x}{\partial y} + UP = z \sin. \beta \frac{(-\cos. \beta + c \sin. \beta)}{\sin. \beta + c \cos. \beta} + z \cos. \beta$] $= \frac{cz}{\sin. \beta + c \cos. \beta}$. Мы въ другомъ членѣ паки обратимся къ сей кривой линеи. (*)

(*) Сіе нужно сдѣлать единственно токмо для того, чтобы въ своемъ мѣстѣ, то есть въ обратномъ способѣ предѣловъ, сказать что уравненіе оной кривой линеи въ опредѣленныхъ величинахъ есть $\beta = c \log. \frac{z}{h}$, гдѣ h произвольное постоянное количество, которое въ обратномъ способѣ предѣловъ, какъ и въ обратномъ способѣ разностей, всегда присовокупляется. Но въ семъ и здѣсь весьма удобно удостовѣриться можно, ибо въ уравненіи $\beta = c \log. \frac{z}{h}$ взявъ предѣлъ содержанія между разностями, получишь $\partial \beta = c \partial \frac{z}{h} : \frac{z}{h}$ или $\partial \beta = \frac{c \partial z}{z}$, сирѣчь то самое уравненіе, которое выше изъ предполагаемаго свойства кривой линеи авторомъ произведено было. Въ прочемъ представивъ себѣ произхожденіе сей кривой линеи инымъ образомъ, совсѣмъ не нужно будетъ имѣть прибѣжища къ обратному способу предѣловъ, какъ то мы ниже покажемъ, въ одномъ изъ слѣдующихъ примѣчаній, говоря о разныхъ Геометрами изобрѣтенныхъ спираляхъ.

Здѣсь же мы учинить имѣемъ другое замѣчанїе, относящееся къ проведенїю касательныхъ къ тѣмъ кривымъ линеямъ, коихъ свойство можетъ изобразиться чрезъ уравненїе между радїусомъ векторомъ и угломъ, имъ съ непремѣнною линеею составляемымъ. Ясно видно, что въ сихъ кривыхъ линеяхъ положенїе касательной опредѣлено будетъ, когда извѣстенъ будетъ или уголъ TMU или непремѣнной прямой линеи отрѣзокъ UT, или перпендикуляръ UR, изъ полюса U на радїусъ векторъ до пресѣченїя съ касательною вставленный, или перпендикуляръ TQ, изъ пресѣченїя T касательной съ непремѣнною прямою на радїусъ векторъ опущенный (черт. 15); почему при проведенїи касательной здѣсь все дѣло состоитъ только въ изложенїи общаго выраженїя одного котораго нибудь изъ сихъ четырехъ количествъ. Мы изложимъ всѣ сїи общїя выраженїя, дабы можно было употребить то, которое въ различныхъ кривыхъ линеяхъ ведетъ къ простѣйшему заключенїю. Итакъ

1) Изъ преднадписанныхъ уравненїй $z\partial\beta = a\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}$, $\sqrt{1-a^2} = \frac{\partial z}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}}$, $c = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{z\partial\beta}{\partial z}$, мы имѣемъ $\sin.\,TMU = \frac{z\partial\beta}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}}$, $\cos.\,TTU = \frac{\partial z}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}}$ и $\tan g.\,TMU = \frac{z\partial\beta}{\partial z}$; ибо a значитъ, какъ выше видѣли, синусъ угла TMU.

2) Изъ преднайденнаго уравненїя $UT = \frac{cz}{\sin.\beta + c\cos.\beta}$ поставивъ вмѣсто c равную величину $\frac{z\partial\beta}{\partial z}$, мы получимъ $UT = \frac{z^2\partial\beta}{\partial z\sin.\beta + z\partial\beta\cos.\beta}$, къ которому выраженїю въ прочемъ прямо достигнуть можно, поставивъ въ уравненїи $UT = y\frac{\partial x}{\partial y} + z\cos.\beta$ вмѣсто y, ∂x и ∂y ихъ величины.

3) Поелику положенїе оси абсциссъ зависитъ отъ нашего произволенїя, то вмѣсто оси UAT мы можемъ взять другую Uat, дѣлающую съ первою произвольной постоянной уголъ α; и тогда для полученїя Ut стоитъ только вмѣсто β поставить $\alpha+\beta$; отъ чего, по причинѣ что $\partial(\alpha+\beta) = \partial\beta$, и будетъ $Ut = \frac{z^2\partial\beta}{\partial z\sin.(\alpha+\beta) + z\partial\beta\cos.(\alpha+\beta)}$. И какъ α произвольной постоянной уголъ, отъ уравненїя кривой линеи ни мало независящїй; то можно положить $\alpha+\beta = 90°$; чрезъ что сдѣлается $Ut = UR = \frac{z^2\partial\beta}{\partial z}$. Въ прочемъ сей перпендикуляръ непосредственно опредѣляется изъ пропорцїи $1 : \tan g.\,TMU = z : UR$. И оный то перпендикуляръ UR есть то, что въ сихъ кривыхъ линеяхъ *подкасательною* называется.

4) Наконецъ перпендикуляръ $TQ = TM \sin. TMU = \frac{y\partial s}{\partial y} \cdot \frac{z\partial\beta}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}} = \frac{yz\partial\beta}{\partial y}$, куда надлежало вмѣсто y и ∂y поставить ихъ величины, чтобы имѣть выраженіе отъ радіуса вектора z и угла β токмо зависящее. Но обыкновенно Геометры довольствуются токмо перпендикуляромъ UR, и мы на семъ не останавливаемся.

Здѣсь сверхъ того надлежитъ замѣтить, что когда точка, въ которой надлежитъ протянуть къ кривой линеи касательную, дана будетъ, тогда каждаго изъ сихъ четырехъ количествъ, для которыхъ мы нашли общія выраженія, довольно ко опредѣленію положенія касательной; но когда сія точка дана не будетъ, какъ то бываетъ при асимптотахъ, тогда не токмо одного изъ нихъ, но и всѣхъ вмѣстѣ къ тому недовольно. Между тѣмъ къ сему совершенно довольно перпендикуляра US, изъ полюса на касательную опущеннаго, и еще угла SUR, буде подкасательную UR употребить не хочешь. И такъ сыщемъ сихъ количествъ общія выраженія. Въ прямоугольномъ треугольникѣ MUR будетъ $RS = \frac{\overline{RU}^2}{MR} = \frac{z^4\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{z^2 + z^4\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}} = \frac{z^3\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}}$, $MS = \frac{\overline{MU}^2}{MR} = \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + z^4\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}} = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}}$, $\overline{US}^2 = RS \times MS = \frac{z^4\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}$ и $US = \frac{z^2\frac{\partial\beta}{\partial z}}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}}$. Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ URS выдетъ

$$\sin. RUS = \frac{RS}{UR} = \frac{z^3\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}} : z^2\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{z\frac{\partial\beta}{\partial z}}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos. RUS = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}} \text{ и } \operatorname{tang.} RUS = z\frac{\partial\beta}{\partial z}.$$

Мы будемъ имѣть случай ниже сдѣлать приложеніе всѣмъ симъ общимъ выраженіямъ, а здѣсь ограничимъ себя только аналитическимъ выводомъ того правила для проведенія къ обыкновенной эпициклоидѣ касательной, къ которому достигъ Декартъ синтетически.

Для сего преимущественно служитъ формула $\cos. TMU = \frac{\partial z}{\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}$, потому что вмѣсто $\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$ поставивъ ∂s, она обращается въ другую $\cos. TMU = \frac{\partial z}{\partial s}$, въ которую уже уголъ β не входитъ. И такъ общія уравненія $x = (a+c)\cos.\frac{u}{c} + b\cos.\left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, $y = (a+c)\sin.\frac{u}{c} + b\sin.\left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, для обыкновенной эпициклоиды, перемѣнивъ на сіи $x = (a+c)\cos.\frac{u}{c} + a.\cos.\left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, $y = (a+c)\sin.\frac{u}{c} + a\sin.\left(\frac{a+c}{ac}\right)u$, и черт. 14 купно съ 15мъ на 16й, гдѣ OP будетъ абсцисса x, Pb ордината y, Rcb уголъ $\frac{u}{a}$, AOQ уголъ $\frac{u}{c}$, Bb дуга s, Ob радіусъ векторъ z и TbO уголъ TMU, станемъ искать изъ нихъ ∂z и ∂s. И чтобы удобнѣе къ тому достигнуть, положимъ уголъ $\frac{u}{c} = \vartheta$ и $\frac{u}{a} = \varphi$; отъ чего уравненія обыкновенной эпициклоиды перемѣнятся на сіи $x = (a+c)\cos.\vartheta + a\cos.(\vartheta+\varphi)$, $y = (a+c)\sin.\vartheta + a\sin.(\vartheta+\varphi)$, и будетъ

$$z^2 = x^2 + y^2 = (a+c)^2 + 2a(a+c)(\cos.(\vartheta+\varphi)\cos.\vartheta + \sin.(\vartheta+\varphi)\sin.\vartheta) + a^2 = (a+c)^2 + a^2 + 2a(a+c)\cos.(\vartheta+\varphi-\vartheta) = (a+c)^2 + a^2 + 2a(a+c)\cos.\varphi,$$

$2z\partial z = -2a(a+c)\sin.\varphi\,\partial\varphi$ и $\partial z = -\frac{a(a+c)\partial\varphi\sin.\varphi}{z}$.

Потомъ взявъ предѣлы содержаній между разностями, найдешь

$$\partial x = -(a+c)\sin.\vartheta\,\partial\vartheta - a\sin.(\vartheta+\varphi)\,\partial(\vartheta+\varphi) = -(a+c)\sin.\vartheta\,\frac{\partial u}{c} - a\sin.(\vartheta+\varphi)\left(\frac{a+c}{ac}\right)\partial u = -\left(\frac{a+c}{c}\right)\partial u(\sin.\vartheta + \sin.(\vartheta+\varphi)),$$

$$\partial y = (a+c)\cos.\vartheta\,\partial\vartheta + a\cos.(\vartheta+\varphi)\,\partial(\vartheta+\varphi) = (a+c)\cos.\vartheta\,\frac{\partial u}{c} + a\cos.(\vartheta+\varphi)\frac{(a+c)}{ac}\partial u = \left(\frac{a+c}{c}\right)\partial u(\cos.\vartheta + \cos.(\vartheta+\varphi)),$$

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \left(\frac{a+c}{c}\right)^2 \partial u^2 (2 + 2(\cos.(\vartheta+\varphi)\cos.\vartheta + \sin.(\vartheta+\varphi)\sin.\vartheta)) = 2\left(\frac{a+c}{c}\right)^2 \partial u^2 (1+\cos.\varphi) = 4\left(\frac{a+c}{c}\right)^2 \partial u^2 \cos.\frac{\varphi^2}{2},$$ и $$\partial s = 2\left(\frac{a+c}{c}\right)\partial u \cos.\frac{\varphi}{2} = 2a\left(\frac{a+c}{c}\right)\partial\varphi\cos.\frac{\varphi}{2}.$$

И такъ $\cos. TbO = \frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{a(a+c)\partial\varphi\sin.\varphi}{z} : 2a\left(\frac{a+c}{c}\right)\partial\varphi\cos.\frac{\varphi}{2} = -\frac{c\sin.\varphi}{2z\cos.\frac{\varphi}{2}} = -\frac{2c\sin.\frac{\varphi}{2}\cos.\frac{\varphi}{2}}{2z\cos.\frac{\varphi}{2}} = -\frac{c\sin.\frac{\varphi}{2}}{z}$, и потому $\cos. tbQ = \frac{c\sin.\frac{1}{2}\varphi}{z}$. Но въ треугольникѣ bQO, по причинѣ что уголъ RQb = $\frac{1}{2}$ Rcb = $\frac{1}{2}\varphi$, имѣетъ Ob (= z) : (OQ = c) = sin.RQb(= sin.$\frac{1}{2}\varphi$) : sin.QbO =

$\frac{c\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\varphi}{z}$; слѣдовательно $\text{coſ.}\,tbO = \text{ſin.}\,QbO$, и одинъ уголъ въ разсужденіи другаго есть дополненіе къ прямому; и потому касательная Tbt перпендикулярна къ хордѣ Qb. И въ семъ то состоитъ упомянутое выше правило, къ коему достигъ Декартъ синтетически. Сіе правило сходствуетъ съ тѣмъ, которое имѣетъ мѣсто и въ простой циклоидѣ, ибо когда въ простой циклоидѣ касательная BT (черт. 12) параллельна хордѣ CF, то въ положеніи GBH, соотвѣтственномъ точкѣ B, круга производищеля, оная касательная BT будетъ къ хордѣ BH перпендикулярна.

Другой вопросъ о касательныхъ, съ приложенiемъ его къ конхоидѣ Никомедовой и спирали Архимедовой.

(152) Пусть AM (черт. XXXV) кривая линея, къ которой провести касательную MΘ уже извѣстно какъ, и BN другая кривая линея, таковая что когда протянется CNM, отношенiе CM къ CN, или CN къ части кривой линеи AM, может быть изображено чрезъ всякое уравненiе, какое хочешь; предлагается провести къ ней въ точкѣ N касательную NT? Я проведу прямую CΘ дѣлающую съ CM какой нибудь уголъ β, и означу MΘ чрезъ c, CΘ чрезъ e, CM чрезъ u, CN чрезъ z, дугу AM чрезъ s, дугу BN чрезъ t, и предѣлы содержанiй $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial t}{\partial x}$, и $\frac{\Delta \beta}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial \beta}{\partial x}$. Положивъ сiе, примѣчаю, что $\sin\beta : \sin\Theta = c : u$, и что $\sin.\Theta \left[= \frac{\partial}{\partial s}\right] = \frac{\partial u \sin.\beta + u\partial\beta\cos.\beta}{\partial s}$; откуда слѣдуетъ, что $\frac{u\partial s}{c}\sin.\beta = \partial u \sin.\beta + u\partial\beta\cos.\beta$. Сверьхъ того я имѣю $C\Theta = CP + P\Theta$, или $e \left[= u\cos.\beta + M\Theta.\sin.PM\Theta = u\cos.\beta + y\frac{\partial s}{\partial y}.\frac{\partial x}{\partial s} = u\cos.\beta + u\sin.\beta\frac{\partial x}{c}\right] = u\cos.\beta - \frac{\partial u}{\partial u}\frac{\cos.\beta - u\partial\beta\sin.\beta}{\sin.\beta + u\partial\beta\cos.\beta}.u\sin.\beta = u\cos.\beta - \frac{c}{\partial s}(\partial u\cos.\beta - u\partial\beta\sin.\beta)$. И такъ по умноженiи сего уравненiя, сирѣчь $\frac{u\cos.\beta - e}{c}\partial s = \partial u\cos.\beta - u\partial\beta\sin.\beta$, на $\sin.\beta$, и отнявши его отъ прежде найденнаго $\frac{u\partial s}{c}\sin.\beta = \partial u\sin.\beta + u\partial\beta\cos.\beta$, умноженнаго на $\cos.\beta$, я получу $\frac{e\partial s}{c}\sin.\beta = u\partial\beta$. Такимъ же образомъ докажется, что $\frac{CT}{T}\partial t\sin.\beta = z\partial\beta$, и по причинѣ что $TN = \frac{z\partial t\sin.\beta}{\partial z\sin.\beta + z\partial\beta\cos.\beta}$, изъ того извлечешь $CT = \frac{z^2\partial\beta}{\partial z\sin.\beta + z\partial\beta.\cos.\beta} = \frac{e z^2\partial s}{c u\partial z + e z\partial s\cos.\beta}$, поставляя вмѣсто $\partial\beta$ равную величину $\frac{e\partial s}{c u}\sin.\beta$. Естьли CT должна быть перпендикулярна къ CN, то положи $\beta = 90°$, и будетъ $\cos.\beta = 0$ и $CT = \frac{e z^2\partial s}{c u\partial z}$.

Или поставляя въ уравненіе $\frac{u\partial s}{c}\,\mathrm{sin}\,\beta = \partial u\,\mathrm{sin}.\beta + u\partial\beta\,\mathrm{cos}.\beta$; вмѣсто $\partial\beta$ равную величину $\frac{e\partial s}{cu}\,\mathrm{sin}.\beta$, получить $\partial s = \frac{c\partial u}{u - e\,\mathrm{cos}\,\beta}$, которая величина поставленная въ найденное выше выраженіе линеи CT, перемѣняетъ его въ слѣдующее $CT = \frac{ez^2\partial u}{u^2\partial z + e\,\mathrm{cos}.\beta(z\partial u - u\partial z)}$, кое обратится въ сіе $CT = \frac{ez^2\partial u}{u^2\partial z}$, когда $\beta = 90^\circ$. (*).

(153) Естьли хочешь, чтобы AM была линея прямая; и чтобы изъ непремѣнной точки C, взятой внѣ оной прямой, протянутыхъ прямыхъ CNM часть MN была всегда равная той же данной величинѣ a, то кривая линея проходящая чрезъ всѣ точки N будетъ *конхоида* [раковина] *Никомедова*. Она имѣетъ асимптотою прямую MΘ, ибо ясно видно, что оная къ ней безпрестанно приближаться будетъ, не могши никогда ея достигнуть. Изъ уравненія сей кривой линеи $u - z = a$, извлечешь $\partial u = \partial z$, что поставленное въ $CT = \frac{ez^2\partial u}{u^2\partial z}$ даетъ $CT = \frac{ez^2}{u^2}$, которое уравненіе построится слѣдующимъ образомъ; проведи чрезъ точку N параллельную къ MΘ линею, которая да встрѣтится съ CΘ въ точкѣ E, потомъ протяни ME и

(*) Употребленіе сдѣланное авторомъ симъ формуламъ въ слѣдующихъ членахъ не далѣе простирается какъ токмо до проведенія къ тѣмъ кривымъ линеямъ касательныхъ, коихъ свойство можетъ изобразиться чрезъ уравненіе между радіусомъ векторомъ и угломъ, имъ съ непремѣнною линеею составляемымъ; и какъ на сей конецъ предложенныя нами въ предъидущемъ примѣчаніи формулы выведены несказанно скорѣе и удобнѣе, нежели сіи авторовы, то ихъ онымъ предпочесть должно, тѣмъ паче, что самое предложеніе, которое автора привело къ симъ его формуламъ; есть весьма частно, когда напротивъ того предположеніе уравненія между радіусомъ векторомъ и угломъ, имъ съ непремѣнною линеею составляемымъ, есть весьма обще; ибо на кривыя линеи можно взирать токмо двумя образами, или какъ на произшедшія изъ уравненій между прямолинѣйными координатами, или какъ на произшедшія изъ уравненій между радіусомъ векторомъ и угломъ, имъ съ осью составляемымъ.

параллельную къ ME прямую NT; оная NT будетъ касательная въ точкѣ N. Въ самомъ дѣлѣ CM : CN $=$ CΘ : CE $= \frac{cz}{u}$, и CM : CN $=$ CE : CT $= \frac{cz^2}{u^2}$ (*).

(*) Хотя сїя кривая линея и алгебраическая, однакѡ можетъ быть опредѣлена и чрезъ уравненіе между радїусомъ векторомъ и угломъ онымъ съ непремѣнною линеею составляемымъ; и потому изъясненный выше нами способъ о проведенїи касательныхъ здѣсь приложенъ быть можетъ. Въ самомъ дѣлѣ пусть AMK конхоида (черт. 17), BNL ея направленїе, A вершина и U полюсъ; то положивъ высоту вершины AB $= a$, высоту полюса UB $= b$, радїусъ векторъ UM $= z$, и уголъ AUM, съ линеею даннаго *положенїя* AU имъ составляемый, $= \beta$, будетъ $z = \frac{b}{\cos\beta} + a$, $\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{b \sin\beta}{\cos\beta^2}$, и подкасательная UR $= \frac{z^2 \partial\beta}{\partial z} = \frac{z^2 \cos\beta^2}{b \sin\beta} = \frac{(z \cos\beta)^2}{b \sin\beta}$; что показываетъ, что оная подкасательная UR равна третьей пропорцїональной къ перпендикуляру BE, изъ B на радїусъ векторъ опущенному, и прямой UP, отъ UA перпендикуляромъ MP отсѣченной; чему и весьма изрядное геометрическое строенїе учинено быть можетъ, какъ то явствуетъ изъ чертежа.

Сїя кривая линея, какъ извѣстно, имѣетъ асимптоту; почему чтобы опредѣлить положенїе оной, возьмим формулы $US = \frac{z^2 \frac{\partial\beta}{\partial z}}{\sqrt{1 + z^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}}$ и $\text{tang. RUS} = \frac{z \partial\beta}{\partial z}$, въ кои поставивъ вмѣсто $\frac{\partial\beta}{\partial z}$ равную величину $\frac{\cos\beta^2}{b \sin\beta}$, получишь $US = \frac{z^2 \cos\beta^2}{\sqrt{b^2 \sin\beta^2 + z^2 \cos\beta^4}}$, и $\text{tang. RUS} = \frac{z \cos\beta^2}{b \sin\beta}$, или поставивъ еще вмѣсто z равную величину $\frac{b + a\cos\beta}{\cos\beta}$, будешь имѣть $US = \frac{(b + a\cos\beta)^2}{\sqrt{b^2 \sin\beta^2 + (b + a\cos\beta)^2 \cos\beta^2}}$ и $\text{tang. RUS} = \frac{(b + a\cos\beta)\cos\beta}{b \sin\beta}$. Теперь положи $z = \frac{1}{0}$; что по причинѣ уравненїя $z = \frac{b + a\cos\beta}{\cos\beta}$, даетъ $\cos\beta = 0$, и слѣдственно $\sin\beta = 1$, потомъ $US = \frac{b^2}{\sqrt{b^2}} = b$ и $\text{tang. RUS} = \frac{0}{b} = 0$. И такъ, поелику въ семъ случаѣ для $\cos\beta = 0$, радїусъ векторъ параллеленъ направленїю BNL, слѣдуетъ, что подкасательная UR падаетъ на непремѣнную прямую UBA; потомъ, поелику $\text{tang. RUS} = 0$, слѣ-

ду

Естьли вообразимъ, что конецъ А (черт. XXXVI) обращающагося около центра С радіуса СА, равномѣрно описываетъ окружность АВЕА, между тѣмъ какъ движущаяся точка отъ С къ А равномѣрно же перебѣгаетъ радіусъ СА; то оная точка чрезъ совокупленіе сихъ двухъ движеній опишетъ кривую линею CDNA, которую Архимедъ назвалъ *Спиралью.* Положимъ, что когда радіусъ СА придетъ въ СМ, движущаяся точка будетъ въ N; тогда означивъ радіусъ СА чрезъ a, цѣлую окружность АВЕА чрезъ $2\pi a$, CN чрезъ z и дугу АВМ чрезъ s, будешь имѣть сію пропорцію $a : z = 2\pi a : s$; откуда найдешь $s = 2\pi z$, и что есть уравненіе спирали Архимедовой. Въ семъ примѣрѣ АМК (черт. XXXV) есть дуга круга имѣющаго свой центръ въ С, и когда $\beta = 90°$, тогда $M\Theta$ равна и параллельна $C\Theta$, $CM = a$ и $CT = \frac{z^2 \partial s}{a\, \partial z} = \frac{z^2 \partial s}{a \partial z}$. Но изъ уравненія кривой линеи сыщется $\frac{\partial s}{\partial z} = 2\pi$; слѣдовательно $CT = \frac{2\pi z^2}{a} = \frac{zs}{a}$, которое уравненіе построится слѣдующимъ образомъ: Изъ центра С (черт. XXXVI) радіусомъ CN опиши дугу круга Nea, потомъ возьми $CT = Nea$ и протяни NT, которая будетъ касательная къ кривой въ точкѣ N; ибо подобные секторы $CNea$, CMEA даютъ $CM : CN = MEA : Nea = CT = \frac{zs}{a}$ (*).

дуетъ, что въ семъ случаѣ и перпендикуляръ US изъ полюса на касательную опущенный падаетъ на ту же прямую UBA, на конецъ, поелику сей перпендикуляръ $US = b$, слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ касательная или асимптота падаетъ на направленіе BNL, или что оное направленіе есть купно и асимптота.

(*) По нашему способу сіе же самое такъ найдется: Поелику по свойству кривой линеи $s (= a\beta) : z = 2\pi : 1$, то будетъ $a\beta = 2\pi z$ и $\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{2\pi}{a}$; что поставивъ въ общую формулу подкасательной $UR = \frac{z^2 \partial \beta}{\partial z}$, получишь оную $= \frac{2\pi z^2}{a} = \frac{a\beta z}{a} = z\beta = \frac{zs}{a}$, то есть подкасательная спирали равна дугѣ круга, которая будучи описана радіусомъ векторомъ, содержится между сторонами соотвѣтствующаго ему угла.

Геометры распространяя свое о спиралях понятїе, свеpьх Архимедовой произвели еще четыре: Одна так называемая, по имени изобрѣтателя, *спираль Паппа Александрїйскаго*, другая *спираль гиперболическая*, третья *спираль параболическая* и четвертая *спираль логариөмическая*, кои изобрѣтены Яковом и Iоанном Бернулїями.

Первая или спираль Паппа Александрїйскаго принадлежит к кривым двоякую кривизну имѣющим линеям, и наипаче достопамятна щастливым Папповым подражанием Архимеду в сыскании ея квадратуры и самою сею квадратурою; и потому здѣсь занимать нас не должна. Другїя же, то есть спираль гиперболическая, параболическая и логариөмическая, так произведены быть могут.

1) Вообразим, что точка A (черт. 18), взятая на окружности круга ABC и отстоящая от непремѣннаго неопредѣленно-продолженнаго радїуса UE в извѣстном по окружности того круга разстоянии $AB = b$, движется по неопредѣленно-продолженному радїусу UAD, между тѣм как оный радїус UAD обращается около центра U, таким образом, что разстояние MQ до того же непремѣннаго радїуса UE по окружности круга описаннаго радїусом UM, опредѣленным точкою A пришедшею в M, всегда пребывает одно и тоже b; кривая линея AMZ так описанная есть та, которая гиперболическою спиралью называется. Она названїе спирали получила потому, что при обращенїи радїуса UAD в другую сторону и движенїи точки A к центру U по тому же закону, может учинить безчисленное множество около онаго оборотов, никогда однакож его не достигнув. Наименованїе же гиперболической приняла от уравненїя, которое так найдется: Означим радїус $UB = UA$, чрез a, абсциссу BP чрез u и ординату UM чрез z, будет $a : z = u : b$ и $uz = ab$; что есть уравненїе нашей спирали, которое, как подобное уравненїю гиперболы, показывает причину, для которой оная названа гиперболическою.

Чтобы провести касательную к сей спирали, я означу угол MUD составляемый радїусом вектором UM с непремѣнною линеею UAD чрез β, и угол DUE чрез μ; будет $u = a(\mu - \beta)$ и уравненїе $uz = ab$ сдѣлается $z(\mu - \beta) = b$; что дает $\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\mu - \beta}{z}$, и подкасательная UR $\left(= \frac{z^2 \partial \beta}{\partial z}\right)$ будет $= z(\mu - \beta) = b$, то есть равна разпрямленной дугѣ AB.

Сія кривая линея, какъ извѣстно, имѣетъ асимптоту; почему чтобы опредѣлить положеніе оной, возьми формулы $US = \frac{z^2 \frac{\partial \beta}{\partial z}}{\sqrt{1 + z^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2}}$ и $tang.\, RUS = z \frac{\partial \beta}{\partial z}$, въ кои вмѣсто $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ поставивъ равную величину $\frac{\mu - \beta}{z}$, получишь $US = \frac{z(\mu - \beta)}{\sqrt{1 + (\mu - \beta)^2}}$ и $tang.\, RUS = \mu - \beta$, или по причинѣ уравненія $z(\mu - \beta) = b$, вмѣсто $\mu - \beta$ поставивъ еще равную величину $\frac{b}{z}$, будешь имѣть $US = \frac{bz}{\sqrt{z^2 + b^2}}$ и $tang.\, RUS = \frac{b}{z}$. Теперь положи $z = \frac{1}{0}$; что по причинѣ уравненія $z = \frac{b}{\mu - \beta}$, даетъ $\mu - \beta = 0$ или $\beta = \mu$, потомъ $US = \frac{b \cdot \frac{1}{0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{0}\right)^2 + b^2}} = \frac{b \cdot \frac{1}{0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{0}\right)^2}} = b$ и $tang.\, RUS = b : \frac{1}{0} = 0$.
И такъ, поелику въ семъ случаѣ для $\beta = \mu$ радіусъ векторъ падаетъ на UE, слѣдуетъ, что подкасательная UR падаетъ на перпендикулярную къ UE прямую UF; потомъ, поелику $tang.\, RUS = 0$, слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ и перпендикуляръ US изъ полюса на касательную опущенный, падаетъ на туже прямую UF; наконецъ, поелику $US = b$, слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ касательная или асимптота есть прямая FK, въ разстояніи $UF = b$ параллельно UE протянутая.

2) Естьли вообразимъ, что обыкновенная парабола, коея уравненіе пусть будетъ $y^2 = pu$, осью своею, начавъ отъ точки A (черт. 19), обогнулась по окружности круга ABC, коего радіусъ AU пусть будетъ a; то ординаты сей кривой линеи будучи перпендикулярны къ своей оси, какъ и радіусы круга къ окружности, всѣ направятся по онымъ радіусамъ къ центру U и концами своими составятъ кривую линею MAM′, которая будетъ имѣть двѣ вѣтви, около центра U безчисленное множество оборотовъ дѣлающія, и которая для того параболическою спиралью называется.

Чтобы провести въ сей спирали въ какой нибудь точкѣ M касательную, возьми напримѣръ формулу $UR = z^2 \frac{\partial \beta}{\partial z}$, полагая уголъ $AUM = \beta$; и радіусъ векторъ $UM = z$; будетъ по причинѣ $AP = u = a\beta$ и $PM = y$, $z = a - y = a \mp \sqrt{pu} = a \mp \sqrt{ap\beta}$, $\partial z = \mp \frac{1}{2} \partial \beta \sqrt{\frac{ap}{\beta}}$, $\frac{\partial \beta}{\partial z} = \mp 2 \sqrt{\frac{\beta}{ap}}$ и $UR = \mp 2z^2 \sqrt{\frac{\beta}{ap}}$; и какъ $\beta = \frac{(a - z)^2}{ap}$, то выдетъ $UR = \mp 2z^2 \sqrt{\frac{(a - z)^2}{a^2 p^2}} = \mp \frac{2z^2 (a - z)}{ap} = \mp \frac{2\, UM^2 . MP}{AU . p}$.

3) Вообразимъ, что радїусъ AU (черт. 20) около центра круга U обращается, между тѣмъ какъ находящаяся на немъ точка B движется, такимъ образомъ, что разстоянїя ея BU, MU и проч. отъ центра U состоятъ въ прогрессїи геометрической, когда соотвѣтствующїя дуги, концемъ A обращающагося радїуса описуемыя, суть въ прогрессїи ариѳметической; кривая линея точкою B описанная есть та, которая *логариѳмическою спиралью* называется. Явно, что уравненїе ея подобно логариѳмики, можно изобразить такъ: $u = \log. z$, гдѣ u дуга круга AP и z соотвѣтствующїй радїусъ векторъ UM; почему будетъ $\partial u = \frac{1}{k}\,\frac{\partial z}{z}$, гдѣ $\frac{1}{k}$ тоже значитъ, что въ логариѳмикѣ подкасательная. Но означивъ уголъ AUM чрезъ β, вообще имѣеть tang. $TMU = \frac{z\partial\beta}{\partial z} = \frac{z\partial u}{a\partial z}$, гдѣ a радїусъ круга; чего ради получить tang. $TMU = \frac{1}{ka}$, то есть уголъ UMT составляемый кривою линеею съ радїусомъ векторомъ здѣсь всегда будетъ постояненъ; что есть то свойство, которое авторъ въ концѣ 151 члена предположилъ, и потому тамо разсматриваемая имъ кривая линея есть не иное что какъ наша спираль логариѳмическая, которой сїе названїе Геометры придали для того, что она около центра U можетъ учинить безчисленное множество оборотовъ, хотя въ прочемъ никогда не достигая онаго, и что строенїе ея зависитъ отъ логариѳмики. Въ сей кривой линеи подкасательная UR = z tang. $TMU = \frac{z}{ak}$.

Присовокупленіе къ другому предъ симъ предложенному вопросу о касательныхъ съ приложеніемъ къ спирали Архимедовой, квадратрицѣ Диностратовой и циссоидѣ Діоклесовой.

(154) Естьли хочешь имѣть Ct, гдѣ t точка, въ которой касательная встрѣчается съ діаметромъ AE, то надлежитъ токмо вмѣсто u, $\sin.\beta$, $\cos.\beta$ и $\frac{e}{c}$ поставить въ выраженіе $CT = \frac{ez^2\partial s}{cu\partial z + ez\partial s\cos.\beta}$ ихъ величины a, $-\frac{\sin.s}{a}$, $\frac{-\cos.s}{a}$ и $\frac{a}{\sin.s}$, перемѣнивъ у ∂s знакъ, по причинѣ что $\sin.\beta$ входитъ въ $\partial\beta$, и получишь $Ct = \frac{-az^2\partial s}{a\partial z\sin.s + z\partial s\cos.s}$ (*). Къ тому же заключенію достигнуть можно, употребивъ формулы предложенныя въ 151 мъ членѣ, которыя даютъ $CT = \frac{z^2\partial\beta}{\partial z\sin.\beta - z\partial\beta\cos.\beta}$; ибо поставивъ въ сіе выраженіе вмѣсто $\partial\beta$, $\sin.\beta$ и $\cos.\beta$ ихъ величины $\frac{\partial s}{a}$, $-\frac{\sin.s}{a}$ и $-\frac{\cos.s}{a}$, получишь $CT = \frac{-az^2\partial s}{a\partial z\sin.s + z\partial s.\cos.s}$ = [illegible] $= \frac{-as}{a\sin.s - s.\cos.s}$, чиня чрезъ посредство уравненія кривой линеи пристойныя вставливанія.

(*) Естьли чрезъ s разумѣть всю дугу ABEM, какъ то дѣйствительно авторъ выше и ниже разумѣетъ; то выраженіе $\frac{e}{c}$ получаемое изъ треугольника, составляемаго касательною въ точкѣ M съ радіусами CM и CE, должно быть равно $-\frac{a}{\sin.s}$, а не просто $\frac{a}{\sin.s}$; да и формула $\frac{e\partial s}{c}\sin.\beta = u\partial\beta$, выше авторомъ найденная, даетъ $\frac{e}{c}\partial s\sin.\beta = a\partial\beta = \partial s$ и $\frac{e}{c} = \frac{1}{\sin\beta} = -\frac{a}{\sin.s}$, а не просто $\frac{a}{\sin.s}$. И послѣ сего уже не нужно у ∂s перемѣнять знакъ.

Квадратрица Диностратова происходитъ такъ же отъ равномѣрныхъ двухъ движеній. Пусть AMB (черт. XXXVII) четверть круга, коего центръ есть C, и вообразимъ, что радіусъ CA равномѣрно обращается около центра C доколѣ придетъ въ CB, и что въ тоже самое время перпендикуляръ PN къ радіусу CA, идучи отъ A къ C, перебѣгаетъ равномѣрно радіусъ AC; тогда пресѣченіе N радіуса CA, пришедшаго въ CM, и перпендикуляра PM, будетъ въ кривой линеи ANH, которая квадратрицею называется. Изъ описанія сей кривой линеи слѣдуетъ сія пропорція AMB : AM $=$ AC : AP; чего ради означивъ CA чрезъ a, CN чрезъ z и уголъ ACM чрезъ β, будетъ имѣть AMB $= \frac{\pi a}{2}$, AM $= a\beta$, AP $= a - z\,\mathrm{cof.}\,\beta$, и уравненіе кривой линеи будетъ $a - z\,\mathrm{cof.}\,\beta = \frac{2a\beta}{\pi}$.

И такъ $z\partial\beta\,\mathrm{fin.}\,\beta - \partial z\,\mathrm{cof.}\,\beta = \frac{2a\partial\beta}{\pi}$, и естьли отсюда найдешь содержаніе $\frac{\partial\beta}{\partial z}$, и поставишь его величину въ CT $= \frac{-z^2\partial\beta}{\partial z\,\mathrm{fin.}\,\beta + z\partial\beta\,\mathrm{cof.}\,\beta}$, то получишь CT $= \frac{z^2\,\mathrm{cof.}\,\beta}{z - \frac{2a}{\pi}\,\mathrm{fin.}\,\beta}$. Посему PT $= \frac{\frac{2az}{\pi}\,\mathrm{fin.}\,\beta.\,\mathrm{cof.}\,\beta}{z - \frac{2a}{\pi}\,\mathrm{fin.}\,\beta}$, и по причинѣ что TP : PN $=$ TC : Ct, будетъ Ct $= \frac{\pi z^2}{2a}$.

Въ точкѣ H, $z =$ CH $=$ Ct; слѣдовательно CH $= \frac{2a}{\pi}$; что опредѣляетъ точку, въ которой квадратрица встрѣчается съ радіусомъ CB (*).

(*) Здѣсь обыкновенно для сего ищется перпендикуляръ TQ (черт. 21), изъ пресѣченія касательной на радіусъ векторъ опущенной. Мы сначала послѣдуемъ сему, и сего ради возмемъ формулу TQ $= \frac{z^2\partial\beta}{\partial y}$, гдѣ $z =$ UM, $y =$ MP и $\beta =$ AUM, и означимъ дугу CB чрезъ u, четверть окружности AB чрезъ c, радіусъ чрезъ a и уголъ MUB чрезъ ϑ; по свойству ква-

дратрицы будетъ $y : a = u : c$ или $cy = au = a^2\vartheta$; откуда выдетъ $a^2\partial\vartheta = c\partial y$, и затѣмъ что $\partial\vartheta = -\partial\beta$, $\partial\beta = -\frac{c\partial y}{a^2}$, $\frac{\partial\beta}{\partial y} = -\frac{c}{a^2}$ и $TQ = -\frac{cyz}{a^2} = -\frac{auz}{a^2} = -\frac{uz}{a}$, то есть тоже, что въ большей части писателей находится.

Теперь зная перпендикуляръ TQ, можемъ опредѣлить и UR; для сего надлежитъ найти сперва $MQ = \frac{y\partial z}{\partial y}$. И такъ, поелику $y = z\,\text{sin}.\vartheta$, будетъ $\partial y = z\,\text{cos}.\vartheta\,\partial\vartheta + \text{sin}.\vartheta.\partial z$, $\text{sin}.\vartheta\,\partial z = \partial y - z\,\text{cos}.\vartheta\,\partial\vartheta$ и $z\,\text{sin}.\vartheta\,\partial z = z\partial y - z^2\,\text{cos}.\vartheta\,\partial\vartheta$; откуда выдетъ $y\partial z = z\partial y - zv\partial\vartheta$, гдѣ $v = UP$, и по причинѣ что $cy = a^2\vartheta$ или что $\partial\vartheta = \frac{c\partial y}{a^2}$, $y\partial z = z\partial y - \frac{czv\,\partial y}{a^2}$ и $\frac{y\partial z}{\partial y} = z - \frac{czv}{a^2} = \frac{(a^2 - cv)z}{a^2}$. Потомъ учинивъ пропорцію MQ:MU = TQ:UR или $\frac{(a^2 - cv)z}{a^2} : z = -\frac{uz}{a} : UR$, получишь $UR = \frac{-auz}{a^2 - cv} = -\frac{cyz}{a^2 - cv} = -\frac{yz}{\frac{a^2}{c} - v}$, то есть разность между основаніемъ квадратрицы $\frac{a^2}{c}$ и абсциссою v, приемля U за начало, къ ординатѣ y, такъ радіусъ векторъ z къ подкасательной UR.

Но сіе гораздо удобнѣе и скорѣе найти можно прямо чрезъ посредство формулы $UR = \frac{z^2\partial\beta}{\partial z}$. Пусть вершина A квадратрицы будетъ начало абсциссъ, такъ что $AP = x$, $PM = y$, $AUM = \beta$ и $UM = z$; будетъ $z = \frac{a - x}{\text{cos}.\beta}$ и $\partial z = \frac{(a - x)\,\text{sin}\,\beta\partial\beta - \text{cos}.\beta.\partial x}{\text{cos}.\beta^2}$, и за тѣмъ что $x : a = a\beta : c$, и что слѣдственно $\partial x = \frac{a^2\partial\beta}{c}$, выдетъ $\partial z = \frac{(c(a - x)\,\text{sin}.\beta - a^2\,\text{cos}.\beta)\,\partial\beta}{c.\,\text{cos}.\beta^2}$, $\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{c.\,\text{cos}.\beta^2}{c(a - x)\,\text{sin}.\beta - a^2\,\text{cos}.\beta}$ и $UR = \frac{cz^2\,\text{cos}.\beta^2}{c(a - x)\,\text{sin}.\beta - a^2.\,\text{cos}.\beta} =$

$$\frac{c(a - x)^2}{c(a - x)\,\text{sin}.\beta - \frac{a^2(a - x)}{z}} = \frac{c(a - x)z}{cz\,\text{sin}\,\beta^2 - a^2} = \frac{c(a - x)z}{cy - a^2} = -\frac{(a - x)z}{\frac{a^2}{c} - y},$$

то есть тоже, что и прежде.

При чемъ замѣтить должно, что упоминаемое здѣсь основаніе квадратрицы $\frac{a^2}{c}$ есть не иное что, какъ послѣдній радіусъ векторъ найденный авторомъ $= \frac{2a}{\pi}$, и что есть ли бы можно было опредѣлить его, чтобы длина четверти окружности круга, и слѣдственно квадратура онаго, опредѣлилася. Для сего то свойства оная кривая линея названа квадратрицею

Еще замѣтить должно, что во время обращенія радіуса UMC и параллельнаго движенія неопредѣленно-продолженнаго перпендикуляра PM въ противную сторону, по тому же закону, пресѣченіемъ ихъ M, прешедшимъ точку A, опишется другая часть AZ квадратрицы, которая безконечно простираться можетъ, непрестанно приближаясь къ своей асимптотѣ и никогда ея недостигая.

Чтобы опредѣлить положеніе сея асимптоты, возмемъ формулы $US = \frac{z^2 \frac{\partial\beta}{\partial z}}{\sqrt{1 + z^2 \left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2}}$ и $\text{tang. } RUS = \frac{z\,\partial\beta}{\partial z}$, разумѣя чрезъ β уголъ BUM, и потому для уравненія квадратрицы имѣя $z = \frac{2a\beta}{\pi\,\text{fin.}\,\beta}$; изъ онаго сыскавъ $\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\text{fin.}\,\beta}{\frac{2a}{\pi} - z\,\text{cof.}\,\beta}$, поставимъ въ преднаписанныя формулы, отъ чего получимъ $US = \frac{z^2\,\text{fin.}\,\beta}{\sqrt{\left(\frac{2a}{\pi} - z\,\text{cof.}\,\beta\right)^2 + z^2\,\text{fin.}\,\beta^2}} =$

$\frac{\frac{2a\beta}{\pi}z}{\sqrt{4\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \left(z - \frac{4a\,\text{cof.}\,\beta}{\pi}\right)z}}$, и $\text{tang. } RUS = \frac{z\,\text{fin.}\,\beta}{\frac{2a}{\pi} - z\,\text{cof.}\,\beta}$. Теперь положи $z = \frac{1}{0}$; что даетъ, для уравненія кривой линеи $z = \frac{2a\beta}{\pi\,\text{fin.}\,\beta}$, $\text{fin}\,\beta = 0$, и по причинѣ что β въ семъ случаѣ не можетъ быть нуль, $\beta = \pi$, потомъ $US = \frac{2a \cdot \frac{1}{0}}{\sqrt{4\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{0} + \frac{4a}{\pi}\right)\frac{1}{0}}} = \frac{2a \cdot \frac{1}{0}}{\sqrt{4\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0}}} =$

$\frac{2a \cdot \frac{1}{0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{0}\right)^2}} = 2a$, и $\text{tang. } RUS = \frac{\frac{1}{0} \cdot 0}{\frac{2a}{\pi} + \frac{1}{0}} = \frac{\frac{1}{0} \cdot 0}{\frac{1}{0}} = 0$. И такъ, поелику въ семъ случаѣ $\beta = \pi$, слѣдуетъ, что радіусъ векторъ упадаетъ на прямую UA', а подкасательная UR на прямую UAF; потомъ, поелику уголъ RUS $= 0$, слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ и перпендикуляръ US, изъ полюса на касательную опущенный, упадетъ на ту же прямую UAF; наконецъ поелику сей перпендикуляръ $= 2a$, слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ касательная или асимптота будетъ прямая FK, отъ полюса U въ разстояніи UF $= 2a$ параллельно радіусу UB протянутая.

Наконецъ замѣтить должно, что сверхъ сей Диностратовой квадратрицы, есть еще другая извѣстная подъ именемъ Чиригаузеновой. Есьли вообразимъ, что радіусъ AU четверти круга AUB (черт. 22

движется по радїусу UB, самъ себѣ параллельно, между тѣмъ какъ неопредѣленно-продолженный перпендикуляръ PM къ радїусу AU, начиная отъ A движется по оному радїусу AU, такимъ образомъ, что AC : AB = AP : AU; то кривая линея описанная пресѣченїемъ M есть та, которая *Чиргаузеновою квадратрицею* называется. Означивъ AC чрезъ u, AP чрезъ z, четверть окружности AB чрезъ c, и радїусъ UA = UB чрезъ a, будетъ $u : c = z : a$, и $cz = au$; что есть уравненїе сей квадратрицы. Но естьли означимъ PM = QC чрезъ y, то получимъ $y = a \sin. \frac{u}{a}$, и по причинѣ что $u = \frac{cz}{a}$, $y = a \sin. \frac{cz}{a^2}$; что такъ же есть уравненїе Чиргаузеновой квадратрицы, но между прямоугольными координатами AP и PM. *Чтобы найти подкасательную* $PT = \frac{y \partial z}{\partial y}$, возьми изъ уравненїя $y = a \sin. \frac{cz}{a^2}$ дифференцїалъ, получишь $\partial y = a \cos. \frac{bz}{a^2} \cdot \frac{c}{a^2} \partial z$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{a}{c \cos. \frac{cz}{a^2}}$ и $PT \left(= \frac{y \partial z}{\partial y}\right) = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{\sin. \frac{cz}{a^2}}{\cos. \frac{cz}{a^2}} = \frac{a^2}{c} \cdot \text{tang.} \frac{cz}{a^2}$, то есть подкасательная PT Чиргаузеновой квадратрицы равна основанїю Диностратовой, умноженному на тангенсъ угла AUC.

Да будутъ AE, AB (черт. XXXVIII) двѣ прямыя линеи имѣющїя данное положенїе; на одной изъ нихъ AB, какъ дїаметрѣ, я опишу полукругъ ADB, и чрезъ центръ C протяну прямую DCE перпендикулярно къ AB; потомъ проведу прямыя, какъ AM, и на нихъ возьму RN = RM; точки N принадлежать будутъ къ кривой линеи извѣстной подъ именемъ *циссоиды Дїоклесовой*. Опустивъ на AB изъ точекъ N и M перпендикуляры NP, MQ, примѣчаемъ, что по причинѣ RN = RM, должно быть QC = PC и BQ = AP; но AP: PN = AQ: QM = QM: BQ, и слѣдственно AP: PN = QM: AP, и сверьхъ того $\overline{QM}^2 = AQ. BQ = AP. (AB - AP)$; слѣдовательно $\frac{\overline{AP}^3}{\overline{PN}^2} = AB - AP$. И такъ означивъ AB чрезъ $2a$, AP чрезъ x и PN чрезъ y, я получу уравненїе $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, а изъ онаго $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{(4a - 2x) y}{y^2 + 3x^2}$, кое даетъ $PT = \frac{2ax - x^2}{3a - x}$ и $AT = \frac{ax}{3a - x}$. Когда $x = a$, то та и другая изъ сихъ величинъ сдѣлается $= \frac{a}{2}$. Продолжи касатель-

ную до пресѣченія съ AE и означь, для найденія At, уголъ EAB чрезъ m; тогда по причинѣ, что $AtT = 180 - m - ATt$ и что $\sin. ATt = \frac{\partial z}{\partial s}$ и $\cos. ATt = \frac{\partial x}{\partial s}$, будешь имѣть $\sin. AtT = \frac{\partial x \sin. m + \partial y \cos. m}{\partial s}$ и слѣдственно $At = \frac{\partial y . AT}{\partial x \sin. m + \partial y . \cos. m}$. Естьли AE будетъ перпендикулярна къ AM, то въ особенномъ случаѣ абсциссы $x = a$ и угла $m = 45°$, найдется $At = \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{AD}{3}$. (*)

(*) Ибо тогда сдѣлается $x = y, \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2}$, $\partial y = 2\partial x$,

$$\frac{\partial y}{\partial x \sin. m + \partial y \cos. m} = \frac{2\partial x}{\partial x \sin. m + 2\partial x . \cos. m} = \frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, AT = \frac{ax}{a-x} = \frac{a}{2},$$

и $At = \frac{2\sqrt{2}}{3} . \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{AD}{3}$.

Сія кривая линея, хотя и алгебраическая, можетъ быть опредѣлена еще чрезъ уравненіе между радіусомъ векторомъ и угломъ, онымъ съ осью составляемымъ, и потому изъясненный нами выше способъ о проведеніи касательныхъ здѣсь паки прилагается. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что UMZ (черт. 23) представляетъ циссоиду Діоклесову, такъ что діаметръ UA перпендикуляренъ къ прямой AE, которая можетъ быть названа направленіемъ циссоиды, и что $MU = BS$; означивъ радіусъ $AC = CB$ чрезъ a, радіусъ векторъ UM чрезъ z и уголъ MUA, имъ съ непремѣнною линеею UA составляемый, чрезъ β, будетъ въ треугольникѣ UCB, гдѣ BQ перпендикуляръ изъ B на UC опущенный, $CQ = a . \cos. (180 - 2\beta) = - a \cos 2\beta$, $BQ = a \sin. (180 - 2\beta) = a \sin 2\beta$, $UQ = a - CQ = a + a . \cos. 2\beta = a(1 + \cos 2\beta)$, $AQ = UP = a + CQ = a - a\cos 2\beta = a(1 - \cos 2\beta)$, $UQ : QB = UP . PM$ или $a(1 + \cos 2\beta) : a\sin. 2\beta = a(1 - \cos. 2\beta) : PM = \frac{a \sin. 2\beta (1 - \cos. 2\beta)}{1 + \cos. 2\beta} = \frac{2a \sin \beta \cos. \beta (1 - \cos. \beta^2 + \sin. \beta^2)}{1 + \cos. \beta^2 - \sin. \beta^2} = \frac{4a \sin. \beta \cos \beta \sin. \beta^2}{2\cos. \beta^2} = \frac{2a \sin. \beta^3}{\cos. \beta}$; откуда выдетъ $UM^2 = z^2 = \frac{4a^2 \sin. \beta^6}{\cos. \beta^2} + (2a \sin. \beta^2)^2 = \frac{4a^2 \sin. \beta^4}{\cos \beta^2}(\sin \beta^2 + \cos. \beta^2) = \frac{4a^2 \sin. \beta^4}{\cos. \beta^2}$, и $z = \frac{2a \sin. \beta^2}{\cos. \beta}$; что есть уравненіе циссоиды между радіусомъ векторомъ и угломъ онымъ съ осью составляемымъ.

Теперь возмемъ формулу подкасательной $UR = \frac{z^2 \partial \beta}{\partial z}$, и сыщемъ изъ уравненія циссоиды $z = \frac{2a \sin. \beta^2}{\cos. \beta}$, $\partial z = \frac{4a\cos. \beta . \sin. \beta \cos. \beta \partial\beta + 2a \sin \beta^2 . \sin \beta \partial\beta}{\cos. \beta^2}$

$\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2a\,\text{ſin.}\,\beta\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,\beta^2 + \text{ſin.}\,\beta^2}{\text{coſ.}\,\beta^3}\right) = \frac{2a\,\text{ſin.}\,\beta\,(\text{coſ.}\,\beta^2 + \text{coſ.}\,\beta^2 + \text{ſin}\,\beta^2)}{\text{coſ.}\,\beta^2} =$ $\frac{2a\,\text{ſin.}\,\beta\,(1 + \text{coſ.}\,\beta^2)}{\text{coſ.}\,\beta^2}$, $\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\text{coſ.}\,\beta^2}{2a\,\text{ſin.}\,\beta\,(1 + \text{coſ.}\,\beta^2)}$; что поставивъ въ формулу $UR = \frac{z^2\,\partial\beta}{\partial z}$, получимъ $UR = \frac{4a^2\,\text{ſin.}\,\beta^4}{\text{coſ.}\,\beta^2} \cdot \frac{\text{coſ.}\,\beta^2}{2a\,\text{ſin.}\,\beta\,(1 + \text{coſ.}\,\beta^2)} = \frac{2a\,\text{ſin.}\,\beta^3}{1 + \text{coſ.}\,\beta^2}$.

Сiя кривая линея имѣетъ асимптоту, которой положенiе опредѣлится подобнымъ образомъ, какъ выше мы опредѣлили въ конхоидѣ Никомедовой, спиралѣ гиперболической и квадратрицѣ Диностратовой.

Проведенiе къ кривымъ линеямъ касательныхъ по сему моему способу есть одинъ изъ вопросовъ, которые я разсматривалъ въ представленной Академiи 1797 года диссертацiи, напечатанной на французскомъ языкѣ въ XII томѣ новыхъ ея дѣянiй; здѣсь она какъ служащая дополненiемъ и имѣющая предметомъ кривыя линеи, у коихъ ординаты, называемыя радiусы векторы, выходятъ изъ одной непремѣнной точки, въ пристойныхъ мѣстахъ вся почти помѣщена будетъ.

предѣлахъ содержаній между разностями высшихъ порядковъ.

(155) Мы употребили выраженія $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$, для изъявленія предѣловъ содержаній $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; теперь чтобы изъявить предѣлы содержаній $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$ между вторыми разностями, мы употребимъ сіи выраженія $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, такъ какъ и для изъявленія предѣловъ содержаній $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, $\frac{\Delta^4 x}{\Delta x^4}$, и проч. слѣдующія $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 x}{\partial x^4}$, и проч.

Положимъ сначала, что разность количества x есть постоянна, и возмемъ для примѣра $y = x^m$ (член. 109); мы будемъ имѣть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}\Delta x + \text{и проч.},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = m.\overline{m-1}.x^{m-2} + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}\Delta x + \text{и проч.},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3} + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.3x^{m-4}\Delta x + \text{и проч.}$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.x^{m-4} + \text{и проч.},$$

и проч.; откуда найдемъ $\frac{\partial y}{\partial x} = mx^{m-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m.\overline{m-2}.x^{m-1}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\,x^{m-3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.x^{m-4}$, и проч. Но какъ изъявить предѣлы содержаній

$$\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial x}}{\Delta x},\ \frac{\Delta\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\Delta x},\ \frac{\Delta\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\Delta x},\ \frac{\Delta\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}}{\Delta x},\ \text{и проч.?}$$

Въ приведенномъ теперь нами примѣрѣ $\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial x}}{\Delta x} = m(\overline{m-1}.x^{m-2} + \overline{m-1}.\frac{m-2}{2}x^{m-3}\Delta x + \text{и проч.})$, чего предѣлъ есть тоже самое количество $m.\overline{m-1}.x^{m-2}$, что и содержанія $\frac{\Delta}{\Delta x^2}$, си

рѣчь, въ семъ примѣрѣ одно и тоже содержаніе $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ изъявляетъ какъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, такъ и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta \frac{\partial y}{\partial x}}{\Delta x}$. Такъ же $\frac{\Delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\Delta x} = m.\overline{m-1}\,(\overline{m-2}\,x^{m-3} + \overline{m-2}.\frac{m-4}{2}\,x^{m-4}\Delta x$ + и проч.), чего предѣлъ есть тоже самое количество $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}$, что и содержанія $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; сирѣчь, естьли выраженіе $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ изъявляетъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, то оно изъявитъ такъ же предѣлъ и содержанія $\frac{\Delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\Delta x}$; равнымъ образомъ естьли выраженіе $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ изъявляетъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, то оно изъявитъ такъ же предѣлъ и содержанія $\frac{\Delta \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\Delta x}$; и такъ далѣе. Мы вскорѣ сіе предложеніе докажемъ общимъ образомъ.

Употребленіе способа предѣловъ при приведеніи въ простоту и всеобщность формулы служащей къ опредѣленію величины приемлемой какою нибудь функціею, когда перемѣнныя количества въ ней содержащіяся, прибавятся или убавятся на количество данное, съ приложеніемъ сея формулы къ сысканію разностей перваго порядка какъ алгебраическихъ такъ и трансцендентныхъ функцій.

(156) Мы доказали (въ членѣ 111), что когда y есть ордината соотвѣтствующая абсциссѣ x, тогда ордината Y соотвѣтствующая абсциссѣ $n\Delta x$, получитъ слѣдующее опредѣленіе

$$Y = y + n\Delta y + n.\frac{n-1}{2}\Delta^2 y + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 y + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}\Delta^4 y + \text{и проч.}$$

Я переображу сію формулу въ слѣдующую

$$Y = y + n\Delta x.\frac{\Delta y}{\Delta x} + n.\frac{n-1}{2}\Delta x^2.\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\Delta x^3.\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \text{и проч.}$$

или, положивъ $n = \frac{1}{m}$ въ сію.

$$Y = y + \frac{\Delta x}{m}.\frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(\frac{\Delta x^2}{2m^2} - \frac{\Delta x}{2n}\Delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \left(\frac{\Delta x^3}{2.3.m^3} - \frac{\Delta x^2}{2m^2}\Delta x + \frac{\Delta x}{3m}\Delta x^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \text{и проч.}$$

Ясно видно, что какая бы величина разности Δx ни была, наша формула всегда будетъ справедлива; но когда разность Δx будетъ нуль, тогда содержанія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, и проч. перемѣнятся въ сіи $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, и проч.; при чемъ я могу положить, что Δx и m непрестанно убывая, дѣлаются нулями въ одно и тоже время, и означить чрезъ q то, во что тогда обратится $\frac{\Delta x}{m}$. Чего ради въ послѣднее выраженіе ординаты Y, поставивъ $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, и проч. вмѣсто $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3}$, и проч. и q вмѣсто $\frac{\Delta x}{m}$, и потомъ отбросивъ тѣ члены, которые послѣ онаго вставливанія будутъ еще умножены на Δx, Δx^2, Δx^3, и проч., оную формулу обратишь въ сію

$$Y = y + q \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \text{ и проч.} \quad (*)$$

Для большей всеобщности означимъ чрезъ Y ту величину, которую приметъ y, когда x сдѣлается $x \pm q$; ясно видно, что тогда мы будемъ имѣть

$$Y = y \pm q \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm \frac{q^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm \text{ и проч.}$$

Не менѣе такъ же ясно, что $Y - y$ есть разность количества y, хотя бы x прибывало или убывало, и что предъидущая формула весьма способна къ нахожденїю разностей алгебраическихъ и другихъ функцій.

(157) И такъ требуется разность функціи $y = x^m$? Я получу изъ сего уравненія $\frac{\partial y}{\partial x} = mx^{m-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m.\overline{m-1}.x^{m-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}$, и проч.; чего ради (означивъ q чрезъ Δx) будетъ

$$\Delta y = \pm mx^{m-1}\Delta x + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}\Delta x^2 \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^{m-3}\Delta x^3$$
$+$ и проч.

Пусть $y = \log. x$, будетъ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{2.3}{x^4}$ и проч. Поставивъ сіи величины въ формулу, выдетъ искомая

(*) Здѣсь количество q изображающее предѣлъ содержанія $\frac{\Delta x}{m}$, по причинѣ $m = \frac{1}{n}$ есть не иное что какъ $n\Delta x$; и посему вмѣсто того, что бы вводить новую букву m, довольно бы было положить $n\Delta x$ постоянною величиною; и что всегда сдѣлать можно, ибо уменьшеніе разности Δx и увеличиваніе числа n совершенно зависитъ отъ нашего произволу; и тогда бы не полагая Δx и Δy нулями, само собою вышло то, что авторъ найти хотѣлъ. Я сію формулу, извѣстную подъ именемъ Тейлоровой ѳеоремы, строго доказалъ въ упомянутой выше моей диссертаціи, раздѣливъ ее на два случая, а именно: на случай, въ коемъ ордината y имѣетъ напослѣдокъ постоянныя разности, и на случай въ коемъ постоянныхъ разностей не имѣетъ. Въ первомъ случаѣ рядъ $y + q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q^2}{2.3}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ + и проч. конецъ имѣть будетъ, а въ другомъ безконечно простираться можетъ.

разность $\pm\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}\pm\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\frac{\Delta x^4}{4x^4}\pm$ и проч.

Такъ же чтобы найти разность количества $a^x=y$, замѣтимъ, что $\frac{\partial y}{\partial x}=a^x\log.a$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=a^x(\log.a)^2$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=a^x(\log.a)^3$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=a^x(\log.a)^4$, и проч.; откуда выдетъ искомая разность
$\pm\Delta x a^x\log.a+\frac{\Delta x^2}{2}a^x(\log.a)^2\pm\frac{\Delta x^3}{2.3}.a^x(\log.a)^3+\frac{\Delta x^4}{2.3.4}a^x(\log.a)^4\pm$ и проч.

Взявъ радїусъ за единицу, требуется разность сего количества $\sin.x=y$? По причинѣ что $\frac{\partial y}{\partial x}=\cos.x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\sin.x$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-\cos.x$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\sin.x$, и проч., будетъ искомая разность $\pm\Delta x\cos.x-\frac{\Delta x^2}{2}\sin.x\mp\frac{\Delta x^3}{2.3}.\cos.x+\frac{\Delta x^4}{2.3.4}.\sin.x\pm$ и проч. Предлагается еще найти разность количества $\cos.x=y$? По причинѣ $\frac{\partial y}{\partial x}=-\sin.x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\cos.x$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\sin.x$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\cos.x$, и проч., будетъ искомая разность $\mp\Delta x\sin.x-\frac{\Delta x^2}{2}.\cos.x\pm\frac{\Delta x^3}{2.3}.\sin.x$ $+\frac{\Delta x^4}{2.3.4}.\cos.x\mp$ и проч.

(158) Изъ сего слѣдуетъ, что предложенїе упомянутое въ 156 членѣ мы можемъ распространить ко всѣмъ функцїямъ количества x, и изобразить его такъ: Какая бы ни была функцїя количества x, разность ея всегда можно представить чрезъ

$$\pm A\Delta x+B\Delta x^2\pm C\Delta x^3+\text{ и проч.},$$

гдѣ A, B, C и проч. суть функцїи количества x и постоянныхъ, и верхнїй знакъ, сопровождающїй нечетныя степени разности Δx, имѣетъ мѣсто въ случаѣ возрастанїя количества x, а нижнїй въ случаѣ его убыванїя. Поступимъ теперь къ общему доказательству другаго предложенїя, упомянутаго въ 155 членѣ.

Естьли имѣя $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+$ и проч., положишь
$\Delta A=A'\Delta x+A''\Delta x^2+$ и проч., $\Delta B=B'\Delta x+B''\Delta x^2+$ и проч.
$\Delta A'=A1\Delta x+A2\Delta x^2+$ и пр. и проч., $\Delta A1=A(1)\Delta x+$ и пр. и проч.;

то по причинѣ что

$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = A' + A''\Delta x +$ и проч., $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = A1 + A2\Delta x +$ и проч.,
$+ B'\Delta x +$ и проч. $\qquad +$ и проч.

$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = A(1) +$ и проч. и проч., получишь

$\frac{\partial y}{\partial x} = A$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A'$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A1$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = A(1)$, и проч. Но по причинѣ что $\frac{\partial y}{\partial x} = A$, A' есть такъ же предѣлъ и содержанія между разностями количествъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ и x, равнымъ образомъ по причинѣ что $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A'$, $A1$ есть такъ же предѣлъ и содержанія между разностями количествъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и x, и по причинѣ что $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A1$, $A(1)$ есть такъ же предѣлъ и содержанія между разностями количествъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ и x, и проч. (*); слѣдовательно положивъ первую разность количества x постоянною, можно изъявить чрезъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x}$, чрезъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\Delta x}$, чрезъ $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)}{\Delta x}$, и такъ далѣе.

(*) Ибо изъ самаго предположенія $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 +$ и проч., $\Delta A = A'\Delta x + A''\Delta x^2 +$ и проч., $\Delta A' = A1\Delta x + A2\Delta x^2 +$ и проч., $\Delta A1 = A(1)\Delta x + A(2)\Delta x^2 +$ и проч., и проч., слѣдуетъ, что $A = \frac{\partial}{\partial x}$, $A' = \frac{\partial A}{\partial x}$, $A1 = \frac{\partial A'}{\partial x}$, $A(1) = \frac{\partial A1}{\partial x}$, и проч.

О предѣлахъ содержаній между разностями вышшихъ порядковъ, когда никакая изъ разностей постоянною не полагается.

(159) Естьли никакая изъ разностей постоянною не полагается, то будешь имѣть $\Delta^2 y = A\Delta^2 x + 2B\Delta x\Delta^2 x +$ и проч. $+ A'\Delta x^2 + A''\Delta x^3 +$ и проч. $+ B'\Delta x^3 +$ и проч. $+$ и проч., и $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - A\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} = 2B\Delta x\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} +$ и проч. $+ A' + (A'' + B')\Delta x +$ и проч. $+$ и проч.; откуда получишь, когда $\Delta x = 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - A\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = A'$. Слѣдовательно, по причинѣ $A = \frac{\partial y}{\partial x}$ [и по причинѣ $A' = \frac{\partial A}{\partial x}$] выраженіе $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ означаетъ предѣлъ содержанія между разностями количествъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ и x, когда никакая изъ разностей постоянною не полагается, и $-\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ есть выраженіе того же самаго предѣла, когда разность количества y положится постоянною.

Да будетъ между перемѣнными количествами y и x уравненіе $xy + x^2 + ax + by + c = 0$; изъ онаго найдешь $a + 2x + y + (b + x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, и перемѣняя x равномѣрно, $(b + x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2(\frac{\partial y}{\partial x} + 1) = 0$. Чтобы найти уравненіе, какое выдетъ, когда y равномѣрно перемѣняется, то въ найденное теперь вмѣсто $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ поставь $-\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, и произшедшее отъ того уравненіе $(b + x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - 2(\frac{\partial x}{\partial y} + 1) = 0$ будетъ искомое. Въ самомъ дѣлѣ, почитая разность количества y постоянною, изъ уравненія $b + x + (a + 2x + y)\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ найдешь сіе $(a + 2x + y)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2\frac{\partial x}{\partial y}(\frac{\partial x}{\partial y} + 1) = 0$, изъ котораго исключивъ a посредствомъ перваго, получишь $(b + x)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - 2(\frac{\partial x}{\partial y})^2(\frac{\partial x}{\partial y} + 1) = 0$, или $(b + x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - 2(\frac{\partial x}{\partial y} + 1) = 0$. Я приступлю къ разностямъ третьяго порядка.

(160) Найдется $\Delta^3 y = A\Delta^3 x +$ и проч. $+ A'\Delta x\Delta^2 x +$ и проч. $+ 2A'\Delta x\Delta^2 x +$ и проч. $+ A1\Delta x^3 +$ и проч. $+$ и проч., и $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = A\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3} +$ и проч. $+ 3A'\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} +$ и проч. $+ A1 +$ и проч. $+$ и проч.; откуда выдетъ, когда $\Delta x = 0$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A.\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + 3A'\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + A1$, и поставляя $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ вмѣсто A, A', будетъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right) = A1$, которое выраженіе [по причинѣ $A1 = \frac{\partial A'}{\partial x}$] означаетъ предѣлъ содержанія между разностями количествъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ и x, когда никакая изъ разностей постоянною не полагается, такъ какъ и $-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)$ предѣлъ содержанія между разностями количествъ $-\frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ и x, когда разность количества y есть постоянна.

Изъ уравненія $(b + x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 1\right) = 0$ найдется, перемѣняя x равномѣрно, $(b + x)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, и исключивъ b, $2\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 1\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 = 0$. Что бы найти то уравненіе, какое произойдетъ, когда y перемѣняется равномѣрно, въ найденное теперь поставь $-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + 3.\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2$ вмѣсто $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, и $-\frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ вмѣсто $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, и произшедшее отъ того уравненіе $2\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 1\right)\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 2\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2 = 0$ будетъ искомое. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе $(b + x)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right) = 0$ даетъ $(b + x)\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} - 3\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - 6\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2.\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$, и исключивъ b, будетъ $2\left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right)\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} - 3\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 2\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2 = 0$, или $2\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 1\right)\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\left(\frac{\partial y}{\partial x} + 2\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2 = 0$.

Подобнымъ образомъ найдется $\Delta^4 y = A\Delta^4 x +$ и проч. $+ A'\Delta x\Delta^3 x +$ и проч. $+ 3A'\Delta x\Delta^3 x + 3A'\Delta^2 x^2 +$ и проч. $+ 3A1\Delta x^2\Delta^2 x +$ и проч. $+ 3A1\Delta x^2\Delta^2 x +$ и проч. $+ A(1)\Delta x^4 +$ и проч. $+$ и проч., и $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = A\frac{\Delta^4 x}{\Delta x^4} +$ и проч. $+ 4A'\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3} +$ и проч. $+ 3A'\frac{\Delta^2 x^2}{\Delta x^4} +$ и проч. $+ 6A1\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} +$ и проч. $+ A(1) +$ и проч.

$+$ и проч. Чего ради будетъ $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = A.\frac{\partial^4 x}{\partial x^4} + 4A'\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + 3A'\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2 + 6A1\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + A(1)$, и поставляя $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, и $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2$ вмѣсто A, A' и $A1$, выдетъ $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 6\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 4\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 15\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2 + 10\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 15\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^3 - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^4 x}{\partial x^4} = A'1)$, которое выраженіе [по причинѣ $A(1) = \frac{\partial A1}{\partial x}$] означаетъ предѣлъ содержанія между разностями количествъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2$ и x, когда никакая изъ разностей постоянною не полагается, такъ какъ и $10\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 15\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^3 - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^4 x}{\partial x^4}$ предѣлъ содержанія между разностями количествъ $-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2$ и x, когда y равномѣрно перемѣняется. И такъ далѣе.

Приложеніе доказанной выше формулы къ сысканію разностей высшихъ порядковъ какъ алгебраическихъ такъ и трансцендентныхъ функцій, также къ сысканію величины функціи, которую оная примѣтъ, когда перемѣнная величина въ ней содержащаяся сдѣлается равною нулю, и къ разложенію функцій въ ряды.

(161) Мы доказали (въ 156 членѣ) что

$$\Delta y = \pm \Delta x . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{2 . 3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{2 . 3 . 4} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \text{и проч.};$$

чего ради не переставая полагать количество x равномѣрно перемѣняющимся, будетъ

$$\Delta^2 y = \pm \Delta x . \Delta \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \Delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{2 . 3} . \Delta \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{и проч.};$$

но

$$\Delta \frac{\partial y}{\partial x} = \pm \Delta x . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \pm \frac{\Delta x^3}{2 . 3} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \text{и проч.}$$

$$\Delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm \Delta x . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm \text{и проч.}$$

$$\Delta \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \pm \Delta x . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \text{и проч.}$$

и проч.; слѣдовательно

$$\Delta^2 y = \Delta x^2 . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm \Delta x^3 . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{7 \Delta x^4}{3 . 4} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm \text{и проч.}$$

Такимъ же образомъ найдется

$$\Delta^3 y = \pm \Delta x^3 . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{3 . \Delta x^4}{2} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm \frac{5 \Delta x^5}{4} . \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \text{и проч.}$$

$$\Delta^4 y = \Delta x^4 . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm 2 \Delta x^5 . \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \frac{13 \Delta x^6}{6} . \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} \pm \text{и проч.},$$

и другія высшаго порядка разности. Сіи формулы даже удобно можно преобразить въ другія, въ коихъ никакая изъ разностей постоянною не полагается.

(162) Положивъ y ординатою соотвѣтствующею абсциссѣ x, означимъ чрезъ Y ту ординату, которая соотвѣтствуетъ $x + \Delta x$, и чрезъ Z ту, которая соотвѣтствуетъ $x - \Delta x$, и мы будемъ имѣть

$Y = y + \Delta x . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\Delta 3 x}{2.3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} +$ и проч.,
$Z = y - \Delta x . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{2.3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} +$ и проч.

Поставляя x вмѣсто Δx во вторую формулу, найдешь ту величину, въ которую обратится y, когда положишь въ сей функцiи $x = 0$: означимъ сiю величину количества y чрезъ h, и мы будемъ имѣть

$$h = y - x . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^2}{2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{x^3}{2.3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{ и проч.}$$

Естьли $y = \frac{1}{1+x}$, то $x = 0$ даетъ $y = 1$, и должно слѣдственно быть
$\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x^2}{(1+x)^3} + \frac{x^3}{(1-x)^4} +$ и проч. $= 1$: но
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 -$ и проч., $\frac{x}{(1+x)^2} = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4$ + и проч., $\frac{x^2}{(1+x)^3} = x^2 - 3x^3 + 6x^4 -$ и проч., $\frac{x^3}{(1+x)^4} = x^3 - 4x^4 +$ и проч., $\frac{x^4}{(1+x)^5} = x^4 -$ и проч.; слѣдовательнно и проч.

(163) Естьли означивъ чрезъ h ординату соотвѣтствующую абсциссѣ $x = 0$, изобразимъ чрезъ A', B', C', D', и проч. тѣ количества, въ которыя содержанiя $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, и проч. обратятся, когда сдѣлаешь $x = 0$ и $y = h$; то изъ первой формулы выдетъ

$y = h + A'x + \frac{B'}{2} x^2 + \frac{C'}{2.3} . x^3 + \frac{D'}{2.3.4} x^4 +$ и проч.

Сiю прейзрядную ѳеорему, которая намъ весьма полезна будетъ при разложенiи въ ряды всякихъ, какихъ хочешь, функцiй, издалъ первый Тейлоръ въ сочиненiи своемъ: Methodus incrementorum. Вотъ какъ онъ тутъ ее доказываетъ.

Пусть y будетъ функцiя количества x и постоянныхъ, требуется разложить ее въ рядъ сего вида $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ и проч.? Составь слѣдующiя уравненiя

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{и проч.},$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \quad + B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{и проч.},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \quad + 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{и проч.},$$
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \quad + 2.3D + 2.3.4Ex + \text{и проч.},$$
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \quad + 2.3.4E + \text{и проч.},$$

и проч.; которыя уравненїя долженствуютъ быть справедливы, какая бы величина количества x ни была; сего ради положи $x = 0$ и перемѣни ихъ чрезъ то въ сїи

$h = A$, $A' = B$, $B' = 2C$, $C' = 2.3D$, $D' = 2.3.4E$, и проч.,

изъ коихъ выдетъ

$A = h$, $B = A'$, $C = \frac{B'}{2}$, $D = \frac{C'}{2.3}$, $E = \frac{D'}{2.3.4}$, и проч.

Или для большей всеобщности, пусть U функцїя количества u и постоянныхъ, которую требуется разложить въ рядъ слѣдующаго вида

$Au^{\lambda} + Bu^{\lambda+\mu} + Cu^{\lambda+2\mu} + Du^{\lambda+3\mu} +$ и проч.:

положи $u^{\mu} = x$, $A + Bx + Cx^2 +$ и проч. $= y$, будешь имѣть, какъ и прежде, $A = h$, $B = A'$, и проч., и оттуда

$U = hu^{\lambda} + A'u^{\lambda+\mu} + \frac{B'}{2}u^{\lambda+2\mu} + \frac{C'}{2.3}u^{\lambda+3\mu} + \frac{D'}{2.3.4}u^{\lambda+4\mu} +$ и проч.

Изъяснимъ все сїе нѣсколькими примѣрами.

(163) Пусть $y = \log.(1 \pm x)$; ясно видно что $x = 0$, даетъ $y = 0$, и слѣдовательно такъ же $h = 0$; потомъ будетъ $A' = \pm 1$, $B' = -1$, $C' = \pm 2$, $D' = -2.3$, и проч. и $y = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ и проч. Откуда слѣдуетъ, что $\log.(1 + x) - \log(1 - x) = \log.\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} +$ и проч.). Но уравнявъ $\frac{1+x}{1-x}$ всякому, какому хочешь цѣлому числу, выдетъ для x число дробное меньшее единицы, и нашъ рядъ, по причинѣ что x есть дробное число, будетъ весьма приближающїйся; слѣдова-

тельно оной рядъ можетъ служить къ сысканїю логариѳма всякаго числа весьма приближеннымъ образомъ (*)

(*) Сей рядъ даетъ токмо логариѳмы натуральные или Неперовы, а не обыкновенные или Бриггсовы. Чтобы найти сїи последнїе, надобно привести себѣ на память, что въ логариѳмикѣ, коея уравненїе можно изобразить такъ $z = \log. u$, содержанїе $\frac{\partial u}{\partial z} : u$ есть постоянное, такъ что означивъ оное чрезъ k, будетъ $\frac{\partial u}{\partial z} = k u$ и $\partial z = \partial(\log. u) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{u}$, гдѣ множитель $\frac{1}{k}$ *логариѳмическимъ модулемъ* называется, и подкасательной логариѳмики равняется. Потомъ не полагая сей модуль единицею изъ уравненїя $y = \log.(1 \pm x)$ вмѣсто найденнаго авторомъ выдетъ $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{1}{k} \frac{1}{1 \pm x}$ и $A' = \pm \frac{1}{k}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1 \pm x)^2}$ и $B' = -\frac{1}{k}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \pm \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{(1 \pm x)^3}$ и $C' = \pm \frac{2}{k}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{2 \cdot 3}{(1 \pm x)^4}$ и $D' = -\frac{2 \cdot 3}{k}$, и проч. И такъ $\log.(1 \pm x) = \frac{1}{k}(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ и проч.) и $\log. \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{2}{k}(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} +$ и проч.). Пусть $\frac{1 + x}{1 - x} = n$, будетъ, положивъ модуль $\frac{1}{k} = 1$, натуральной логариѳмъ числа $n = 2\left(\frac{n - 1}{n + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^7\right.$ + и проч.) и всякой другой логариѳмъ того же числа $n = \frac{1}{k} \cdot 2\left(\frac{n - 1}{n + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^7\right.$ + и проч.); откуда явствуетъ, что всякой другой логариѳмъ какого нибудь числа найдется, когда натуральной логариѳмъ того же числа умножится на модуль. И такъ все дѣло состоитъ въ найденїи сего модуля. На сей конецъ въ последнюю формулу вмѣсто n поставивъ логариѳмическое основанїе a, коего логариѳмъ $= 1$, получимъ знаменатель модуля $k = 2\left(\frac{a - 1}{a + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)^5\right.$ + и проч.); естьли $a = 10$, какъ то полагается въ обыкновенныхъ логариѳмахъ, то выдетъ $k = 2,30258509299404568401799145468$4 и проч., и

$\frac{1}{k} = 0,4342944819032518276511289189166050$82 и проч.

По найденїи же сего модуля, изчисленїе обыкновенныхъ логариѳмическихъ табалицъ такъ сократиться можетъ: Положи $n = \frac{\mu}{\mu - 1}$, будетъ въ Неперовой системѣ $\log. \mu = \log.((\mu - 1) + 2\left(\frac{1}{2\mu - 1} + \frac{1}{3(2\mu - 1)^3}\right.$

$+\frac{1}{5(2\mu-1)^5}+$ и проч.); чрезъ которой рядъ натуральные логариѳмы по порядку взятыхъ чиселъ весьма скоро найдены быть могутъ, а потомъ и обыкновенные сыщутся.

При изчисленіи логариѳмовъ часто съ пользою употребляется слѣдующая пропорція: малыя разности нарочито большихъ чиселъ содержатся почти какъ разности ихъ логариѳмовъ. Чтобы доказать оную, положи въ ряду $\log. n = \frac{2}{k}\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 +\right.$ и проч.) $n = \frac{p+q}{p}$, будетъ $\log.(p+q) - \log p = \frac{2}{k}\left(\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{(2p+q)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{q^5}{(2p+q)^5} +\right.$ и проч.), и естьли p есть число нарочито великое и q не больше 1, то рядъ $\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{(2p+q)^3} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{(2p+q)^5} +$ и проч. будетъ приближающійся такъ, что довольно въ немъ взять одинъ токмо членъ; чего ради выдетъ
$\log.(p+q) - \log. p = \frac{2q}{k(2p+q)}$ и $p+\frac{1}{2}q : q = \frac{1}{k} : \log.(p+q) - \log. p$;
такъ же докажется, что и $p+\frac{1}{2}r : r = \frac{1}{k} : \log.(p+r) - \log. p$, и какъ q и r не велики, то можно принять $p+\frac{1}{2}q$ и $p+\frac{1}{2}r$ за равныя, и будетъ $q : r = \log.(p+q) - \log. p : \log.(p+r) - \log. p$.

Въ заключеніе сего остается намъ токмо предложить, какъ по данному логариѳму найти соотвѣтствующее число.

На сей конецъ возмемъ формулу $y = a^x$, гдѣ a какое нибудь постоянное количество, и будетъ $h = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = k a^x \log. a$ и $A' = k \log. a$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 a^x (\log. a)^2$ и $B' = k^2(\log. a)^2$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = k^3 a^x (\log. a)^3$ и $C' = k^3(\log. a)^3$, и проч. И такъ $y = a^x = 1 + kx\log. a + \frac{k^2x^2(\log. a)^2}{2} + \frac{k^3x^3(\log. a)^3}{2.3} +$ и проч. Теперь естьли a положится логариѳмическимъ основаніемъ, и n числомъ соотвѣтствующимъ логариѳму x, то будетъ $\log. a = 1$, $x\,(=\log. y) = \log. n$, и $n = 1 + k\log. n + \frac{(k\log. n)^2}{2} + \frac{(k.\log. n)^3}{2.3} +$ и проч.

Пусть модуль $\frac{1}{k} = 1$, и соотвѣтственное логариѳмическое основаніе $= e$, будетъ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} +$ и проч. Когда $x = 1$, то будетъ основаніе натуральныхъ логариѳмовъ $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} +$ и проч. $= 2,7182818284590452353602874713526 6249$, и проч.

Естьли $y = \sin. x$, то для $x=0$ выдетъ $y=0$, и будетъ $h=0$, потомъ $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = -1$, $D' = 0$, $E' = 1$, и проч.; откуда найдется $\sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} -$ и проч. Естьли $y = \cos. x$, то для $x = 0$ выдетъ $y = 1$, и будетъ $h = 1$, потомъ $A' = 0$, $B' = -1$, $C' = 0$, $D' = 1$, и проч.; откуда найдется $\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} -$ и проч. (*).

(*) Здѣсь весьма достойно примѣчанія то, что члены сихъ двухъ найденныхъ авторомъ рядовъ всѣ безъ изъятія находятся въ ряду $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} +$ и проч., которой мы нашли въ предъидущемъ примѣчаніи; откуда заключить должно, что есть возможность найти $\sin. x$ и $\cos. x$ въ функціяхъ количества e^x. И въ самомъ дѣлѣ естьли мы въ оной найденной нами рядъ поставимъ вмѣсто x попеременно $+z\sqrt{-1}$ и $-z\sqrt{-1}$, то получимъ

$$e^{+z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} - \frac{z^7\sqrt{-1}}{2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.}$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = 1 - z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \frac{z^7\sqrt{-1}}{2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.}$$

откуда по учиненіи вычитанія и сложенія выдетъ

$$\frac{e^{+z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.} = \sin. z,$$

$$\frac{e^{+z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \text{и проч.} = \cos. z.$$

И такъ $\sin. x = \dfrac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ и $\cos. x = \dfrac{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$.

И по сему $\text{tang}. x = \dfrac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{-1}} = \dfrac{e^{+2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{+2x\sqrt{-1}} + 1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{-1}}$,

$$\cot. x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{e^{+2x\sqrt{-1}} + 1}{e^{+2x\sqrt{-1}} - 1} \cdot \sqrt{-1}.$$

Отсюда удобно найти можно дугу x, какъ то явствуетъ изъ слѣдующаго.

Изъ перваго уравненія найдется $e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\,\sin. x\sqrt{-1}$, а изъ другаго $e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos. x$, которыя уравненія по сложеніи одного съ другимъ и отнятіи одного отъ другаго, даютъ $e^{+x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sin. x\sqrt{-1}$ и $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sin. x\sqrt{-1}$, а сіи по раздѣленіи одного на другое, $e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\cos. x + \sin. x\sqrt{-1}}{\cos. x - \sin. x\sqrt{-1}}$; въ оныхъ послѣднихъ уравненіяхъ взявъ логариѳмы, получишь наконецъ $+x\sqrt{-1}\log. e = +x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})$ или $x = \frac{1}{+\sqrt{-1}}\log. (\cos x + \sin x\sqrt{-1})$, $-x\sqrt{-1}\log. e = -x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})$ или $x = \frac{1}{-\sqrt{-1}}\log. (\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})$, $2x\sqrt{-1}\log. e = 2x\sqrt{-1} = \log. \frac{\cos. x + \sin. x\sqrt{-1}}{\cos. x - \sin. x\sqrt{-1}}$ или $x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log. \frac{\cos. x + \sin. x\sqrt{-1}}{\cos. x - \sin. x\sqrt{-1}}$.

Изъ сихъ теперь найденныхъ выраженій можно произвести многія достопримѣчательныя слѣдствія; мы здѣсь ограничимъ себя четырмя слѣдующими.

1) Возмемъ первыя два выраженія, совокупивъ ихъ воедино, $\pm x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x \pm \sin. x\sqrt{-1})$, и положимъ $x = (2i + 1)\pi$, гдѣ i какое нибудь есть цѣлое число, будетъ $\sin. x = 0$, $\cos. x = -1$ и $\pm(2i + 1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$. Изъ сего слѣдуетъ, что логариѳмъ отрицательной единицы имѣетъ безчисленное множество, по мнимыхъ или не возможныхъ величинъ; чему и удивляться не должно, по причинѣ что въ однемъ и томъ же уравнении имѣютъ мѣсто многіе корни и что одному и тому же синусу соотвѣтсвуетъ безчисленное множество дугъ.

Равнымъ образомъ логариѳмъ и всякаго отрицательнаго количества $-a$ имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда $\log. -a = \log. a + \log. -1$, то будетъ $\log. -a = \log. a \pm (2i + 1)\pi\sqrt{-1}$.

Причемъ не безполезно замѣтить, что и логариѳмы положительныхъ количествъ имѣютъ безчисленное множество величинъ, но одна изъ нихъ всегда есть дѣйствительная, а прочія мнимыя. Ибо, когда въ формулѣ $\pm x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x \pm \sin. x\sqrt{-1})$ положить $x = 2i\pi$, то будетъ $\cos. x = 1$, $\sin. x = 0$ и $\pm 2i\pi\sqrt{-1} = \log. -1$, которое уравненіе показываетъ, что логариѳмъ положительной единицы имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ величинъ, и одну только дѣйствительно равную нулю,

которая получается положивЪ $i = 0$. ТакЪ же вЪ уравненїе $\log. a = \log a + \log. 1$, вмѣсто $\log. 1$ поставивЪ равную величину $\pm 2 i \pi \sqrt{-1}$, найдешь, что $\log. a = \log. a \pm 2 i \pi \sqrt{-1}$, то есть, что логариѳмЪ и всякаго положительнаго количества a имѣетЪ безчисленное множество мнимыхЪ величинЪ и одну токмо дѣйствительную, которая отЪ мнимости освобождается положивЪ $i = 0$.

2) Общее выраженїе мнимаго количества есть таково $a \pm b \sqrt{-1}$; посмотримЪ какое будетЪ количество логариѳмЪ онаго. Я положу $\frac{b}{a} = \text{tang.} x$, будетЪ $\log. (a + b \sqrt{-1}) = \log. a + \log. (1 \pm \sqrt{-1} \text{ tang.} x) = \log. a - \log. \cos. x + \log. (\cos. x \pm \sin. x \sqrt{-1}) = \log a - \log. \cos. x \pm x \sqrt{-1}$. И такЪ логариѳмЪ всякаго мнимаго количества есть мнимое же количество.

3) Естьли вЪ тѣхЪ же уравненїяхЪ, воедино совокупленныхЪ, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. (\cos. x \pm \sin. x \sqrt{-1})$ положится $x = \text{A}. \sin. z$ и еще $x = \text{A}. \sin. z \sqrt{-1}$; то вЪ первомЪ случаѣ выдетЪ

$\text{A}. \sin. z = \pm \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. (\sqrt{1 - z^2} \pm z \sqrt{-1})$,

вЪ другомЪ же будетЪ

$\pm \sqrt{-1} \text{ A}. \sin. z \sqrt{-1} = \log. (\sqrt{1 + z^2} \mp z)$.

И такЪ логариѳмическїя выраженїя имѣющїя видЪ мнимыхЪ количествЪ перемѣняются иногда вЪ выраженїя дугЪ круга дѣйствительныхЪ, и обратно.

4) ВозмемЪ теперь третье изЪ предпайденныхЪ уравненїй $x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} . \log. \frac{\cos. x + \sin. x \sqrt{-1}}{\cos. x - \sin. x \sqrt{-1}}$ и раздѣливЪ числителя и знаменателя дроби $\frac{\cos. x + \sin. x \sqrt{-1}}{\cos. x - \sin. x \sqrt{-1}}$ на $\cos. x$, преобразимЪ его вЪ сїе $x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \text{tang.} x \sqrt{-1}}{1 - \text{tang.} x \sqrt{-1}}$. Поелику доказано было, что $\log. \frac{1 + z}{1 - z} = 2 (z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} +$ и проч.), то вмѣсто z возставивЪ $\text{tang.} x \sqrt{-1}$ выдетЪ $x = \text{tang.} x - \frac{\text{tang.} x^3}{3} + \frac{\text{tang.} x^5}{5} - \frac{\text{tang.} x^7}{7} +$ и проч. Пусть дуга x положится вЪ 45°, будетЪ $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ и проч., которой рядЪ ЛейбницЪ далЪ первой для опредѣленїя длины окружности круга.

Но сей рядЪ есть весьма медленно еще приближающійся; чего ради вмѣсто дуги вЪ 45°, обыкновенно берется дуга вЪ 30°, которой тангенсЪ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, потому что тангенсы меньшихЪ дугЪ, сЪ окружностію соизмѣримыхЪ, еще болѣе сЪ единицею несоизмѣримы; и такЪ по причинѣ что дуга вЪ $30° = \frac{\pi}{6}$, будетЪ $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} -$ и проч., и $\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} +$ и проч. ПосредствомЪ сего то ряда сЪ невѣроятнымЪ трудомЪ найдена та величина полуокружности π, которую мы вЪ первомЪ примѣчаніи кЪ члену 128 предложили.

Изчисленіе, которое тутЪ учинить должно было, тѣмЪ наипаче затруднительно, что всѣ члены онаго ряда суть несоизмѣримые, и что каждой изЪ нихЪ меньше токмо третьей части своего предЪидущаго; но сему неудобству такЪ пособить можно: ВозмемЪ дугу вЪ 45° и положимЪ ее раздѣленною на двѣ a и b, такЪ что $a + b = \frac{\pi}{4} =$ дуг. вЪ 45°; будетЪ $\text{tang.}(a + b) = 1 = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 - \text{tang.}\,a\,\text{tang.}\,b}$, $1 - \text{tang.}\,a\,\text{tang.}\,b = \text{tang.}\,a + \text{tang}\,b$ и $\text{tang.}\,b = \frac{1 - \text{tang.}\,a}{1 + \text{tang.}\,a}$; положи теперь $\text{tang.}\,a = \frac{1}{2}$, выдетЪ $\text{tang.}\,b = \frac{1}{3}$, и двѣ дуги a и b изобразятся чрезЪ соизмѣримые весьма скоро приближающіеся ряды, коихЪ сумма дастЪ величину дуги $\frac{\pi}{4}$, и самая полуокружность π будетЪ

$$= 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{и проч.} \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{и проч.} \end{array} \right\}$$

Зная сію полуокружность круга, коего радіусЪ единица, удобно сочинятся и тригонометрическія таблицы. ВЪ самомЪ дѣлѣ вЪ преднайденныхЪ рядахЪ

$$\text{sin.}\,x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{и проч.}$$

$$\text{cos.}\,x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{и проч.}$$

положивЪ $x = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, получишь другіе два ряда

$$\text{sin.}\,\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{m^3}{n^3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{m^5}{n^5} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \text{и проч.}$$

$$\text{cos.}\,\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{n^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{m^4}{n^4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \text{и проч.},$$

чрезЪ посредство коихЪ найдутся всѣ синусы и косинусы четверти круга, поставляя вмѣсто $\frac{m}{n}$ такую дробь, какую отЪ 90° составляетЪ дуга, коей ищется синусЪ и косинусЪ. Сія дробь никогда болѣе $\frac{1}{2}$ быть недолжна,

потому что синусы и косинусы дугЪ отЪ 45° до 90 заключаются вЪ косинусахЪ и синусахЪ дугЪ отЪ 0 до 45°; и того ради оные ряды будутЪ весьма скоро приближающїеся.

Нашедши такимЪ образомЪ синусы и косинусы, прочїя тригонометрическїя линеи найдешь изЪ оныхЪ синусовЪ и косинусовЪ чрезЪ посредство извѣстныхЪ формулЪ.

Но чтобы найти логариѳмы синусовЪ и косинусовЪ, то мы замѣтимЪ, что вторая часть предписанныхЪ уравненїй

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.}$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{и проч.}$$

всегда обратится вЪ нуль, когда первая, то есть $\sin. x$ и $\cos. x$, учинится $= 0$; но извѣстно, что всегда $\sin. i\pi = 0$ и $\cos. \frac{(4i \pm 1)}{2}\pi = 0$, гдѣ i какое ниесть цѣлое положительное или отрицательное число; чего ради вторая часть перваго уравненія всегда обратится вЪ нуль, когда x будетЪ имѣть какую ниесть изЪ величинЪ, которыя изЪ уравненія $x = \pm i\pi$ извлечь возможно; такЪ же вторая часть другаго уравненїя всегда обратится вЪ нуль, когда x будетЪ имѣть какую ниесть изЪ величинЪ, которыя изЪ уравненїя $x = \pm \frac{4i \pm 1}{2}.\pi$ извлечь возможно; слѣдовательно сЪ помощїю ѳеорїи уравненїй, отсюда заключить можемЪ, что множители сихЪ двухЪ рядовЪ

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{и проч.}$$

непремѣнно содержатся вЪ сихЪ двухЪ выраженїяхЪ $x \mp i\pi$, $x \mp \frac{4i \pm 1}{2}\pi$, кои сами однакожЪ не суть множители. Что бы извлечь изЪ нихЪ истинные множители, то, поелику первой членЪ какЪ перваго ряда, раздѣленнаго на x, такЪ и другаго просто взятаго, есть 1, надлежитЪ отЪ выраженїй $x \mp i\pi$, $x \mp \frac{4i \pm 1}{2}\pi$ отдѣлить нѣкїе множители, что бы остальные имѣли вЪ первомЪ членѣ 1; и такимЪ образомЪ, поелику $x \mp i\pi = (1 \mp \frac{x}{i\pi})(\mp i\pi)$ и $x \mp \frac{4i \pm 1}{2}.\pi = (1 \mp \frac{2x}{(4i \pm 1)\pi})(\mp \frac{4i \pm 1}{2}\pi)$, находимЪ, что истинные множители предписанныхЪ рядовЪ суть $1 \mp \frac{x}{i\pi}$ и $1 \mp \frac{2x}{(4i \pm 1)\pi}$. СверьхЪ того примѣчаю, что они суть единственные, которые тѣ ряды имѣть могутЪ, ибо ни вЪ какомЪ другомЪ случаѣ, кромѣ $x = \pm i\pi$ или $x = \mp \frac{4i \pm 1}{2}\pi$, синусЪ или косинусЪ дуги x

въ нуль не обращается: такъ естьли къ величинамъ $\mp i\pi$, $\pm\frac{4i\pm1}{2}\pi$ прибавимъ или убавимъ какую нынѣсть дугу β, то выдетъ какъ $\sin.(\pm i\pi\pm\beta)$ такъ и $\cos.(\frac{4i\pm1}{2}\pm\beta)$ равенъ положительному или отрицательному $\sin.\beta$, и слѣдственно не нулю, сколь бы дуга β мала ни была. И такъ заключимъ изъ сего:

1) что общій множитель перваго ряда, кромѣ непосредственно представляющагося множителя x, есть $1\mp\frac{x}{i\pi}$, и что поелику оный рядъ $=\sin.x$, будетъ

$$\sin.x=x.(1-\tfrac{x}{\pi}).(1+\tfrac{x}{\pi}).(1-\tfrac{x}{2\pi}).(1+\tfrac{x}{2\pi}).(1-\tfrac{x}{3\pi}).(1+\tfrac{x}{3\pi}),\ \text{и проч.}$$

2) Что общій множитель втораго ряда есть $1\mp\frac{2x}{(4i\pm1)\pi}$, и что поелику оный рядъ $=\cos.x$, выдетъ

$$\cos.x=(1-\tfrac{2x}{\pi}).(1+\tfrac{2x}{\pi}).(1-\tfrac{2x}{3\pi}).(1+\tfrac{2x}{3\pi}).(1-\tfrac{2x}{5\pi}).(1+\tfrac{2x}{5\pi}).\ \text{и проч.}$$

Пусть $x=\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$; то перемноживъ сіи множители по два, мы получимъ чрезъ посредство логариѳмовъ слѣдующіе два ряда:

$$\log.\sin.\tfrac{m}{n}.\tfrac{\pi}{2}=\log.\tfrac{m\pi}{2n}+\log.(1-\tfrac{m^2}{4n^2})+\log.(1-\tfrac{m^2}{16n^2})+\log.(1-\tfrac{m^2}{36n^2})$$
$$+\log.(1-\tfrac{m^2}{64n^2})+\text{и проч.}\ (X),$$

$$\log.\cos.\tfrac{m}{n}.\tfrac{\pi}{2}=\log.(1-\tfrac{m^2}{n^2})+\log(1-\tfrac{m^2}{9n^2})+\log(1-\tfrac{m^2}{25n^2})+\log.(1-\tfrac{m^2}{49n^2})$$
$$+\log.(1-\tfrac{m^2}{81n^2})+\text{и проч.}\ (Y),$$

которые ряды чрезъ посредство формулы $\log.(1-z)=-\frac{1}{k}(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\text{и проч.})$ можно еще разложить въ сіи два другіе ряда

$$\log.\sin.\tfrac{m}{n}.\tfrac{\pi}{2}=\log.\tfrac{1}{2}\pi+\log m-\log.n$$
$$-\tfrac{m^2}{n^2}.\tfrac{1}{k}(\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{6^2}+\tfrac{1}{8^2}+\text{и проч.})$$
$$-\tfrac{m^4}{n^4}.\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{4^4}+\tfrac{1}{6^4}+\tfrac{1}{8^4}+\text{и проч.})$$
$$-\tfrac{m^6}{n^6}.\tfrac{1}{3k}(\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{4^6}+\tfrac{1}{6^6}+\tfrac{1}{8^6}+\text{и проч.})$$
$$-\text{и проч.}$$

$$\log.\cos.\tfrac{m}{n}.\tfrac{\pi}{2}=-\tfrac{m^2}{n^2}.\tfrac{1}{k}(1+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{7^2}+\text{и проч.})$$
$$-\tfrac{m^4}{n^4}.\tfrac{1}{2k}(1+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{5^4}+\tfrac{1}{7^4}+\text{и проч.})$$
$$-\tfrac{m^6}{n^6}.\tfrac{1}{3k}(1+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{5^6}+\tfrac{1}{7^6}+\text{и проч.})$$
$$-\text{и проч.}$$

Но едва ли сіи послѣдніе ряды имѣютъ какое либо преимущество предъ первыми X, Y.

Пусть $y = A.\sin.\, x$, будетъ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{9x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3.5.x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \frac{9}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2.5.9.x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, $\frac{\partial^6 y}{\partial x^6} = \frac{5.5.9.x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{2.3.5.5.7.x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3.5.7.9.x^4}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}}$,
$\frac{\partial^7 y}{\partial x^7} = \frac{5.5.9}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3.5.5.7.9.x^2}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{5.7.9.9.x^4}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} + \frac{3.5.7.9.11.x^6}{(1-x^2)^{\frac{13}{2}}}$, и проч.; и какъ $x = 0$, долженъ дать $y = 0$, то будетъ $h = 0$, потомъ $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = 1$, $D' = 0$, $E' = 9$, $F' = 0$, $G = 5.5.9$, и проч., и слѣдственно
$A.\sin.\, x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} +$ и проч.

Чтобы найти дугу въ 30°, то положи $x = \frac{1}{2}$, и будетъ величина сея дуги $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4.3} + \frac{3}{2^6.4.5} + \frac{3.5}{2^8.4.6.7} +$ и проч., которой рядъ чрезвычайно приближающийся, и котораго сумма, взятая десяти первыхъ членовъ, равна 0,52359877. Умноживъ сие число на 6, выдетъ полуокружность $\pi = 3,14159262$, которое выражение отъ найденнаго въ 128 членѣ разнится токмо въ седьмой цифрѣ десятичной дроби.

И такъ найденные нами ряды даютъ весьма точно логариѳмы какихъ ниесть чиселъ, величины дугъ въ синусахъ или косинусахъ, и величины синусовъ и косинусовъ въ дугахъ; и поелику оные ряды всѣ изчислены въ логариѳмическихъ и тригонометрическихъ таблицахъ, которыя всякой при себѣ имѣть можетъ, то каждой вопросъ, которой можетъ быть приведенъ къ онымъ, мы будемъ почитать за разрѣшенный такимъ образомъ, какъ токмо желать возможно. (*)

(*) Здѣсь, безъ сомнѣния, есть пристойнѣйшее мѣсто предложить Лежандрово о несоизмѣримости окружности круга съ диаметромъ онаго доказательство, упоминаемое нами въ послѣднемъ примѣчании къ члену 128 му. И такъ:

Примемъ въ разсужденіе до безконечности простертый рядъ

$$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \text{ и проч.}$$

и положимъ что $\phi:(z)$ представляетъ сумму онаго или ту функцію количества z, которой оный рядъ есть разложеніе; явно, что естьли вмѣсто z поставится $z+1$, то $\phi:(z+1)$ равнымъ образомъ изобразитъ сумму сего ряда

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{(z+1)(z+2)} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{a^3}{(z+1)(z+2)(z+3)} \text{ и проч.}$$

Отнимемъ одинъ изъ сихъ рядовъ отъ другаго, каждой членъ одного отъ каждаго члена другаго, мы будемъ имѣть остатокъ

$$\frac{a}{z(z+1)} + \frac{a^2}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \text{ и проч.}$$

и для суммы онаго $\phi:(z) - \phi:(z+1)$.

Но сей самой остатокъ, преобразованной въ видъ

$$\frac{a}{z(z+1)} \left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{(z+2)(z+3)} + \text{ и проч.}\right)$$

имѣетъ суммою $\frac{a}{z(z+1)} \cdot \phi:(z+2)$; чего ради вообще будетъ

$$\phi:(z) - \phi:(z+1) = \frac{a}{z(z+1)} \cdot \phi:(z+2).$$

Раздѣлимъ сіе уравненіе на $\phi:(z+1)$, и для большей простоты положимъ что ψ есть новая такова количества z функція, что $\psi:(z) = \frac{a}{z} \cdot \frac{\phi:(z+1)}{\phi:(z)}$; будетъ $\frac{\phi:(z)}{\phi:(z+1)} - 1 = \frac{a}{z(z+1)} \cdot \frac{\phi:(z+2)}{\phi:(z+1)}$, потомъ $\frac{\phi:(z)}{\phi:(z+1)} = \frac{a}{z.\psi:(z)}$ и $\frac{\phi:(z+2)}{\phi:(z+1)} = \frac{(z+1).\psi:(z+1)}{a}$; изъ чего выдетъ $\frac{a}{z.\psi:(z)} - 1 = \frac{\psi:(z+1)}{z}$, $\frac{a}{\psi:(z)} - z = \psi:(z+1)$ и $\psi:(z) = \frac{a}{z+\psi:(z+1)}$.

Но въ сіе уравненіе вмѣсто z поставляя попеременно $z+1$, $z+2$, $z+3$, и такъ далѣе, имѣемъ $\psi:(z+1) = \frac{a}{(z+1)+\psi:(z+2)}$, $\psi:(z+2) = \frac{a}{(z+2)+\psi:(z+3)}$, $\psi:(z+3) = \frac{a}{(z+3)+\psi:(z+4)}$, и такъ далѣе; чего ради, въ тоже уравненіе вмѣсто $\psi:(z+1)$, потомъ вмѣсто $\psi:(z+2)$, и такъ далѣе, поставляя равныя величины, получимъ

$$\psi:(z) = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{(z+1)+\psi:(z+2)}} = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{(z+1) + \cfrac{a}{(z+2)+\psi:(z+3)}}} = \text{ и такъ далѣе.}$$

И такъ величина функціи $\psi:(z)$ можетъ изобразиться непрерывною дробью

$$\psi:(z) = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{(z+1) + \cfrac{a}{(z+2) + \cfrac{a}{(z+3)} + \text{ и проч.}}}}$$

И какъ по положенїю $\psi:(z) = \frac{a}{z}\cdot\frac{\Phi:(z+1)}{\Phi:(z)}$, и $\frac{a}{z}\cdot\frac{\Phi:(z+1)}{\Phi:(z)} =$

$$\frac{a}{z}\cdot\frac{1+\frac{a}{z}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\text{ и проч.}}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z(z+1)}+\text{ и проч.}},$$

то сїе частное двухъ рядовъ умноженное на $\frac{a}{z}$ и оная непрерывная дробь суммою имѣютъ одну и туже функцїю количествъ z и a.

Положивъ сїе, пусть $z = \frac{1}{2}$; дробь непрерывная сдѣлается

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{ и проч.}}}}\quad(X)$$

и предписанное частное двухъ рядовъ, умноженное на $\frac{a}{z}$, учинится

$$2a\cdot\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3.4.5.6.7}+\text{ и проч.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3.4.5.6}+\text{ и проч.}}.\quad(Y)$$

И какъ положивъ $4a = -u^2$, оное частное Y обращается въ сїе

$$-\frac{1}{2}u\,\frac{u-\frac{u^3}{2.3}+\frac{u^5}{2.3.4.5}-\frac{u^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{ и проч.}}{1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2.3.4}-\frac{u^6}{2.3.4.5.6}+\text{ и проч.}},$$

котораго сумма, какъ то изъ предъидущаго примѣчанїя явствуетъ, есть

$$-\frac{1}{2}u\cdot\frac{e^{+u\sqrt{-1}}-e^{-u\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\cdot(e^{+u\sqrt{-1}}+e^{-u\sqrt{-1}})};$$

то въ сїе послѣднее выраженїе вмѣсто $+u\sqrt{-1}$, $-u\sqrt{-1}$ и u поставивъ равныя величины $+2\sqrt{a}$, $-2\sqrt{a}$ и $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-1}}$, найдешь для суммы предъидущаго частнаго Y, и слѣдственно такъ же для суммы непрерывной дроби X, сїе выраженїе

$$\frac{e^{+2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{+2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\sqrt{a},$$

и такимъ образомъ вообще будешь имѣть

$$\frac{e^{+2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{+2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\,2.\sqrt{a} = \cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{ и проч.}}}}$$

Изъ чего происходятъ двѣ главныя формулы, смотря на количество a, положительное ли оно или отрицательное. Пусть сперва $4a = x^2$, будетъ

$$\frac{e^{+x} - e^{-x}}{e^{+x} + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \text{и проч.}}}}$$

Потомъ пусть $4a = -x^2$, выдетъ, по причинѣ что

$$\frac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1} \,.\, \text{tang.}\, x,$$

$$\text{tang.}\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \text{и проч.}}}}}$$

На сей то формулѣ основано Лежандрово доказательство о несоизмѣримости окружности круга съ его діаметромъ. Но прежде нежели къ оному приступить можемъ, надлежитъ знать слѣдующія двѣ лемы.

1) Пусть будетъ непрерывная до безконечности простертая дробь;

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \text{и проч.}}}},$$

въ которой всѣ числа m, n, m', n', и проч. суть цѣлыя положительныя или отрицательныя; я говорю, что естьли положимъ составляющія дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, и проч. всѣ меньше единицы, то цѣлая величина непрерывной дроби непосредственно будетъ несоизмѣримая.

Во первыхъ я утверждаю, что сія величина будетъ менѣе единицы. Въ самомъ дѣлѣ, неуменьшая всеобщности приписуемой непрерывной дроби, можно положить, что знаменатели n, n', n'', и проч. всѣ суть положительныя числа. И такимъ образомъ взявъ одинъ членъ преднаписаннаго ряда по положенію имѣешь $\frac{m}{n} < 1$, потомъ, взявъ два члена, найдешь, по причинѣ $\frac{m'}{n'} < 1$, что $n - 1 < n + \frac{m'}{n'}$, и что, поелику, $m < n$ и то и другое изъ сихъ чиселъ есть цѣлое, $m < n - 1 < n + \frac{m'}{n'}$, и потому оттуда заключишь, что произходящая отъ двухъ членовъ величина

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n'}}$$

есть менѣе единицы; равнымъ образомъ взявъ три члена, найдешь чрезъ предложенное теперь, что $\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}$

есть менѣе единицы, и что, означивъ сїю величину чрезъ ω, $\frac{m}{n+\omega}$ есть такъ же менѣе единицы, и потому оттуда заключишь, что произходящая отъ трехъ членовъ величина $\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$

есть паки менѣе единицы. Продолжая тоже разсужденїе, увидишь, что какое бы ни взято было число членовъ предложенной непрерывной дроби, величина ея отъ того произходящая всегда будетъ менѣе единицы, и потому заключишь, что и цѣлая величина сей до безконечности простертой дроби менѣе единицы. Она не иначе могла бы быть равна единицѣ, какъ токмо въ случаѣ дроби сего вида

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{и проч.}}}}$$

Во всякомъ же другомъ случаѣ она будетъ менѣе единицы.

Теперь, естьли отвергаешь, что величина предложенной непрерывной дроби не есть несоизмѣримая, то положи, что она равна какой нибудь соизмѣримой величинѣ $\frac{B}{A}$, гдѣ B и A какія нибудь цѣлыя числа; будешь имѣть $\frac{B}{A} = \cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{и проч.}}}}$

Пусть еще C, D, E и проч. неопредѣленныя таковыя количества, что имѣютъ

$$\frac{C}{B} = \cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\text{и проч.}}}}$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{iv}}{n^{iv}+\text{и проч.}}}},$$

и такъ далѣе до безконечности; по предложенному выше сїи различныя непрерывныя дроби, имѣя всѣ свои члены менѣе единицы, имѣютъ своими величинами или суммами количества $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$ и проч., меньшія нежели единица, и потому выдетъ $B < A$, $C < B$, $D < C$, и проч., и рядъ A, B, C, D, E и проч. будетъ до безконечности убывающій. Но взаимный союзъ непрерывныхъ дробей, о коихъ говоримъ, даетъ

$\frac{B}{A} = \frac{m}{n + \frac{C}{B}}$, изъ чего произходитъ $C = mA - nB$,

$\frac{C}{B} = \frac{m'}{n' + \frac{D}{C}}$, изъ чего произходитъ $D = m'B - n'C$;

$\frac{D}{C} = \frac{m''}{n'' + \frac{E}{D}}$, изъ чего произходитъ $E = m''C - n''D$,

и проч. и проч.,

то есть, поелику по положенїю количества A и B суть числа цѣлыя, изъ того произходитъ, что и всѣ другїя доселѣ неопредѣленныя количества C, D, E и проч. суть также числа цѣлыя. Но явно само себѣ противорѣчитъ, чтобы безконечной рядъ A, B, C, D, E и проч. былъ убывающїй, и въ тоже время состоящїй изъ чиселъ цѣлыхъ; ибо въ прочемъ никакое изъ чиселъ A, B, C, D, E и проч. не можетъ быть нуль, потому что предложенная непрерывная дробь до безконечности простирается, и что такимъ образомъ суммы представленныя чрезъ $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, и проч. всегда долженствуютъ имѣть нѣкую величину, а не быть нулемъ.

И такъ положенїе, чтобы сумма предложенной непрерывной дроби была равна соизмѣримой величинѣ $\frac{B}{A}$, мѣста имѣть не можетъ; слѣдовательно сїя сумма непосредственно есть величина несоизмѣримая.

2) Естьли при всѣхъ прочихъ тѣхъ же обстоятельствахъ, составляющїя дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, и проч. въ началѣ ряда суть какой нибудь величины, но послѣ нѣкотораго продолженїя онаго ряда, будутъ постоянно менѣе единицы; то я говорю, что предложенная непрерывная дробь, всегда полагаемая до безконечности простирающеюся, будетъ величина несоизмѣримая.

Ибо, естьли положить, что напримѣръ отъ $\frac{m'''}{n'''}$, всѣ составляющїя дроби $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}$, $\frac{m^{V}}{n^{V}}$, и такъ далѣе до безконечности, суть менѣе единицы; тогда по первой леммѣ непрерывная дробь

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} + \cfrac{m^{V}}{n^{V} + \text{и проч.}}}}$$

будетъ величина несоизмѣримая; означимъ оную величину чрезъ a, и предложенная непрерывная дробь сдѣлается:

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega}}}$$

Но естьли попеременно положимъ

$\frac{m''}{n'' + \omega} = \omega'$, $\frac{m'}{n' + \omega'} = \omega''$, $\frac{m}{n + \omega''} = \omega'''$;

то, по причинѣ что ω есть величина несоизмѣримая, явно, что всѣ количества ω', ω'', ω''' будутъ равнымъ образомъ несоизмѣримыя. Слѣдовательно, поелику послѣднее изъ оныхъ ω''' равно непрерывной предложенной дроби, оная дробь будетъ величина несоизмѣримая.

Послѣ сихъ двухъ леммъ мы можемъ обратиться къ настоящему предмету и доказать сіе общее предложеніе.

Естьли дуга круга съ радіусомъ соизмѣрима, то тангенсъ ея съ тѣмъ же радіусомъ будетъ несоизмѣримъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть радіусъ $= 1$ и дуга $x = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа; преднайденная формула, по учиненіи вставливанія, дастъ

$$\operatorname{tang.} \frac{m}{n} = \cfrac{\frac{m}{n}}{1 - \cfrac{\frac{m^2}{n^2}}{3 - \cfrac{\frac{m^2}{n^2}}{5 - \cfrac{\frac{m^2}{n^2}}{7 - \text{и проч.}}}}}$$

или по умноженіи числителя и знаменателя въ каждой частной суммѣ сей непрерывной дроби на n, будетъ

$$\operatorname{tang.} \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n \quad \text{и проч.}}}}}$$

Но явно, что сія непрерывная дробь есть того же рода, что и предполагаемая во второй леммѣ, ибо по причинѣ что знаменатели $3n$, $5n$, $7n$ и проч. непрестанно прибавляются, между тѣмъ какъ числители сохраняютъ ту же величину m^2, явно, что составляющія дроби будутъ или сдѣлаются, не въ продолжительномъ времени, менѣе единицы; слѣдовательно $\operatorname{tang.} \frac{m}{n}$ есть величина несоизмѣримая, и слѣдовательно, *естьли дуга*

съ радіусомъ есть соизмѣрима, то тангенсъ ея съ тѣмъ же радіусомъ будетъ несоизмѣримъ.

Откуда происходитъ, какъ непосредственное слѣдствіе, то предложеніе, которое составляетъ предметъ сего примѣчанія. Пусть π полуокружность, коея радіусъ 1; есть ли π будетъ съ 1 соизмѣрима, то и $\frac{\pi}{4}$ будетъ такъ же соизмѣрима, а по сему тангенсъ сея дуги долженъ быть несоизмѣримъ; но напротивъ того извѣстно, что тангенсъ оной дуги $\frac{\pi}{4}$ равенъ радіусу 1, слѣдовательно π не можетъ быть соизмѣрима, и слѣдовательно *окружность круга съ его діаметромъ есть несоизмѣрима.*

Вѣроятно, что π не заключается даже въ алгебраическихъ несоизмѣримыхъ количествахъ, сирѣчь не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія, имѣющаго опредѣленное число членовъ, коихъ предстоящія суть соизмѣримы; но кажется весьма трудно по всей строгости доказать сіе предложеніе; мы можемъ токмо показать, что квадратъ изъ π есть паки величина несоизмѣримая.

Въ самомъ дѣлѣ, есть ли въ непрерывной дроби изображающей $\tan x$, положимъ $x = \pi$, то по причинѣ что $\tan \pi = 0$, будетъ

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \text{и проч.}}}}}$$

или положивъ $\omega = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \text{и проч.}}}$, выдетъ

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \omega}}, \text{ или } 0 = 3 - \omega, \text{ или}$$

$$0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \text{и проч.}}}}$$

Потомъ положивъ π^2 величиною соизмѣримою, будешь имѣть $\pi^2 = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n суть цѣлыя числа, и оттуда произойдетъ

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 - \text{и проч.}}}}}$$

Но явно, что сія непрерывная дробь есть того же рода, что и предполагаемая во второй леммѣ, слѣдовательно величина ея есть несоизмѣримая, и числу 3 отнюдь неравная. И такъ *квадратъ изъ полуокружности круга съ квадратомъ изъ діаметра есть несоизмѣримъ.*

(165) Мы знаемъ, что имѣющся четыре ряда, кои суть величины количества U въ уравненіи $mU^3 - u^\circ U - mu^3 = 0$ содержащагося, и мы знаемъ шакъ же видъ каждаго изъ нихъ (член. 94): Во первыхъ $U = Au + Bu^? + Cu^3 + Du^4 +$ и проч.; въ семъ положеніи $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $u = x$, $U = xy$ (*), и поставивъ сіи величины въ предложенное уравненіе, оное сдѣлается $my^3 - xy - m = 0$; но $x = 0$ даешъ $y = 1$, слѣдовательно $h = 1$ и $A = 1$. Потомъ найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{3my^2 - x}$, откуда $A' = \frac{1}{3m}$ и $B = \frac{1}{3m}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2\frac{\partial y}{\partial x} - 6my\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{3my^2 - x}$, откуда $B' = 0$ и $C = 0$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{6m\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + 18my\frac{\partial y}{\partial x} - 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{3my^2 - x}$, откуда $C' = \frac{-2}{27m^3}$ и $D = \frac{-1}{81m^3}$; и проч. Во вторыхъ $U = A + Bu^{-3} + Cu^{-6} + Du^{-9} +$ и проч.; чего ради $\lambda = 0$, $\mu = -3$, $u^{-3} = x$. $U = y$, и предложенное уравненіе сдѣлается $mxy^3 - y - m = 0$; но $x = 0$ даешъ $y = -m$, слѣдовательно $h = -m$ и $A = -m$. Потомъ найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-my^3}{3mxy^2 - 1}$, откуда $A' = -m^4$ и $B = -m^4$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{6mxy\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 6my^2\frac{\partial y}{\partial x}}{3mxy^2 - 1}$, откуда $B' = -6m^7$ и $C = -3m^7$; $D = -12m^{10}$; и проч. Въ третьихъ $U = Au^{\frac{1}{2}} + B + Cu^{-\frac{3}{2}} + Du^{-3} +$ и проч; чего ради по причинѣ что $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{3}{2}$, $u^{-\frac{3}{2}} = x$ и $U = \frac{y}{x}$, предложенное уравненіе сдѣлается $my^3 - y - mx = 0$; но $x = 0$ даешъ $my^2 - 1 = 0$, слѣдовательно $h = \frac{\pm 1}{\sqrt{m}}$ и $A = \frac{\pm 1}{\sqrt{m}}$. Потомъ найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m}{3my^2 - 1}$, откуда $A' = \frac{m}{2}$ и

(*) Ибо, когда въ концѣ 163 члена было положено $U = Au^\lambda + Bu^{\lambda+\mu} + Cu^{\lambda+2\mu} + Du^{\lambda+3\mu} +$ и проч., $u^\mu = x$ и $A + Bx + Cx^2 +$ и проч. $= y$; то явствуетъ, что для $U = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 +$ и проч. должно быть $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $u = x$ и $U (= u(A + Bu + Cu^2 +$ и проч.$)) = xy$.

$B = \frac{m}{2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{6my}{3my^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, откуда $B' = \mp \frac{3}{4} m^2 \sqrt{m}$ и $C = \mp \frac{3}{8} m^2 \sqrt{m}$; $D = \frac{m^4}{2}$; и проч.

Пусть предложено будетъ еще другое уравненіе $U^3 - a^2 U + auU - u^3 = 0$, и положимъ вопервыхъ $U = Au + B + Cu^{-1} + Du^{-2} +$ и проч., будетъ $\lambda = 1$, $\mu = -1$; $u^{-1} = x$. $U = \frac{y}{x}$, и поставляя сіи величины въ предложенное уравненіе, выдетъ $y^3 - a^2 y x^2 + ayx - 1 = 0$; но $x = 0$ даетъ $y = 1$, слѣдовательно $h = 1$ и $A = 1$. Потомъ найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^2xy - ay}{3y^2 - a^2x^2 + ax}$, откуда $A' = \frac{-a}{3}$ и $B = -\frac{a}{3}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} =$

$$\frac{-6y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (4a^2 x - 2a)\frac{\partial y}{\partial x} + 2a^2 y}{3y^2 - a^2x^2 + ax},$$

откуда $B' = \frac{2a^2}{3}$ и $C = \frac{a^2}{3}$; $D = \frac{a^3}{81}$; и проч. Во вторыхъ $U = Au^3 + Bu^4 + Cu^5 +$ и проч.; по причинѣ что здѣсь $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $u = x$, $U = yx^3$, предложенное уравненіе сдѣлается $y^3 x^3 - a^2 y + axy - 1 = 0$; но $x = 0$ даетъ $y = \frac{-1}{a^2}$, слѣдовательно $h = \frac{-1}{a^2}$ и $A = \frac{-1}{a^2}$. Потомъ найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-3y^3x^2 - ay}{3y^2x^3 - a^2 + ax}$, откуда $A' = \frac{-1}{a^3}$ и $B = \frac{-1}{a^3}$; $C = \frac{-1}{a^4}$; и проч. Въ третьихъ $U = A + Bu + Cu^2 + Du^3 +$ и проч.; что даетъ $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $u = x$ и $U = g$; но изъ уравненія $y^3 - a^2 y + ayx - x^3 = 0$ сдѣлавъ $x = 0$, имѣешь $y = \pm a$, слѣдовательно $h = \pm a$ и $A = \pm a$. Потомъ найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-ay + 3x^2}{3y^2 - a^2 + ax}$, откуда $A' = \mp \frac{1}{2}$ и $B = \mp \frac{1}{2}$; $C = \mp \frac{1}{8a}$, и проч.

Употребленіе способа предѣловъ при сысканіи величины функціи въ нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ, а именно когда оная представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$.

(166) Содержаніе между ∂y и ∂x вообще опредѣляется чрезъ уравненіе $A\partial x + B\partial y = 0$, но статься можетъ, что при нѣкоторыхъ особенныхъ величинахъ количествъ y и x, предстоящія A и B учинятся въ одно и тоже время нулями. Что бы найти какая тогда будетъ величина содержанія $\frac{\partial y}{\partial x}$, надлежитъ (по 141 члену) имѣть уравненіе между y и x, дабы изъ онаго произвести уравненіе между разностями сихъ перемѣнныхъ количествъ. Изобразимъ сіе послѣднее уравненіе чрезъ
$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\,\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 +$ и пр. $= 0$,
и приведемъ себѣ на память замѣченное въ упомянутомъ членѣ, что когда A и B учинятся нулями въ одно и тоже время, тогда содержаніе между ∂y и ∂x опредѣляется уравненіемъ второй степени

(*a*) . . . . $E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + C = 0$,

что сіе содержаніе опредѣляется уравненіемъ третьей степени

(*b*) . . . . $I\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + G\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + E = 0$,

когда A, B, C, D и E сдѣлаются нулями въ одно и тоже время, и такъ далѣе. Теперь предложимъ сей вопросъ: какъ найти оныя уравненія a, b, и проч., когда уравненія между y и x дано не будетъ? Съ малымъ вниманіемъ всякой усмотритъ, сдѣлавъ всѣ сокращенія, что уравненіе a не иное что есть какъ уравненіе $A\partial x + B\partial y = 0$, въ которомъ взять предѣлъ содержанія между разностями Δx, Δy, полагая ∂y и ∂x постоянными, что уравненіе b есть не иное что какъ

уравненіе a, въ которомъ взятъ предѣлъ содержанія между разностями Δx, Δy, полагая ∂y и ∂x постоянными, и такъ далѣе. Напримѣръ пусть будетъ уравненіе $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$ (член. 140), выдетъ изъ онаго между ∂y и ∂x слѣдующее $(4y^3 - 2axy)\,\partial y + (3bx^2 - ay^2)\,\partial x = 0$; откуда, полагая ∂y и ∂x постоянными, найдется сіе $(6y^2 - ax)\,\partial y^2 - 2ay\partial x\partial y + 3bx\partial x^2 = 0$, изъ онаго, притомъ же положеніи, слѣдующее $4y\,\partial y^3 - a\partial x\partial y^2 + b\partial x^3 = 0$, а изъ сего послѣдняго $\partial y^4 = 0$.

Откуда я произведу слѣдующее рѣшеніе предложенному вопросу: Естьли при нѣкоторыхъ особенныхъ величинахъ количествъ y и x, содержаніе $\frac{\partial y}{\partial x}$ не опредѣляется чрезъ уравненіе $A\partial x + B\partial y = 0$, то составь уравненіе a, и можетъ быть оное содержаніе будетъ заключаться въ семъ уравненіи, которое есть второй степени; естьли же нѣтъ, составь уравненіе b, и продолжая производить дѣйствіе всегда тѣмъ же образомъ, достигнешь къ уравненію, которое опредѣлитъ искомое содержаніе. Показатель степени сего уравненія уменшенный единицею будетъ равенъ числу учиненныхъ дѣйствій. Таково есть рѣшеніе, о коемъ мы упомянули въ 135 членѣ и кое въ слѣдующемъ объяснимъ нѣкоторыми примѣрами.

(167) Вопрошается величина дроби $\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$, въ случаѣ $x = 0$? Можно положить $\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{dy}{dx}$, или $a\partial x - \partial x\sqrt{a^2 - x^2} = x^2\partial y$; откуда выдетъ, сыскивая предѣлъ содержанія между разностями въ положеніи ∂y и ∂x постоянными, $\frac{x\partial x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2x\partial x\,\partial y$ и величина содержанія $\frac{\partial y}{\partial x}$, когда $x = 0$, будетъ $\frac{1}{2a}$.

Я возьму для другаго примѣра дробь $\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - x^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$, которой требуется величина въ случаѣ $x = a$. Я составлю уравненіе

$(x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2})\,\partial x = (x^2 - 2ax - a^2$
$+ 2a\sqrt{2ax - x^2})\,\partial y$,

изъ котораго найду

$(3x^2 - 8ax + 5a^2 - \frac{2a^3}{\sqrt{2ax - a^2}})\,\partial x^2 = (2x - 2a + \frac{2a(a-x)}{\sqrt{2ax - x^2}})\,\partial x \partial y$,

$$(6x - 8a + \frac{2a^4}{(2ax - a^2)^{\frac{3}{2}}})\,\partial x^3 = (2 - \frac{2a^3}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}})\,\partial x^2 \partial y,$$

$$(6 - \frac{6a^5}{(2ax - a^2)^{\frac{5}{2}}})\,\partial x^4 = \frac{6a^3(a - x)}{(2ax - x^2)^{\frac{5}{2}}}\,\partial x^3 \partial y,$$

$$- \frac{30a^5}{(2ax - a^2)^{\frac{7}{2}}}\,\partial x^5 = \left(\frac{6a^3}{(2ax - x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{30a^3(a - x)^2}{(2ax - x^2)^{\frac{7}{2}}}\right)\partial x^4 \partial y;$$

и такъ не прежде какъ по четвертомъ дѣйствіи я достигаю ко опредѣленію содержанія $\frac{\partial y}{\partial x}$ въ положеніи $x = a$, и сіе четвертое дѣйствіе дѣлаетъ оное содержаніе въ положеніи $x = a$ равнымъ $-5a$, что есть величина предложенной дроби, когда $x = a$.

Чтобы найти величину дроби $\frac{1 - \sin. x + \cos. x}{\sin. x + \cos. x - 1}$, когда x будетъ дуга въ $90°$, я составлю уравнеіе $(1 - \sin x + \cos. x)\,\partial x = (\sin. x + \cos. x - 1)\,\partial y$, и получу чрезъ единое токмо дѣйствіе $\frac{\partial x\,\partial y}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\cos. x + \sin. x}{\cos. x - \sin. x}$ или $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, когда сдѣлаешь $\sin. x = 1$ и $\cos. x = 0$; что дѣйствительно есть величина предложенной дроби, когда $x = 90°$. Сыщемъ еще величину дроби $\frac{x^x - x}{1 - x + \log. x}$, въ случаѣ $x = 1$. Изъ уравненія $(x^x - x)\,\partial x = (1 - x + \log. x)\,\partial y$ найдется $(x^x(1 + \log. x) - 1)\,\partial x^2 = (\frac{1}{x} - 1)\,\partial x\,\partial y$; и какъ положеніе $x = 1$ истребляетъ всѣ члены сего уравненія, то надлежитъ приступить ко второму дѣйствію, которое дастъ $(x^x(1 + \log. x)^2 + x^{x-1})\,\partial x^3 = -\frac{1}{x^2}\,\partial x^2 \partial y$, и содержаніе $\frac{\partial y}{\partial x}$, когда $x = 1$, будетъ $= -2$. Сіе правило есть общее и можетъ быть приложено къ функціямъ многихъ пере-

мѣнныхъ количествъ, равно какъ и къ заключающимъ въ себѣ оное одно токмо; и такъ мы о семъ предметѣ ничего болѣе не скажемъ, и поступимъ къ оставшимся опредѣлить намъ принадлежностямъ кривыхъ линей (*).

(*) Между тѣмъ я нахожу за нужное здѣсь присовокупить, что хотя данная дробь полагается $=\frac{\partial y}{\partial x}$, однако получаемая послѣ нѣсколькихъ дѣйствій величина для $\frac{\partial y}{\partial x}$ не иначе равняется сей данной дроби, какъ токмо въ случаѣ, когда оная дробь обращается въ $\frac{0}{0}$. Такъ напримѣръ естьли дана будетъ дробь $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$; то по учиненіи одного дѣйствія получаемая для $\frac{\partial y}{\partial x}$ величина $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$ не иначе равняется данной дроби $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$ $\left(=\frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)$, какъ токмо въ случаѣ $x=0$, хотя оная данная дробь и $=\frac{\partial y}{\partial x}$. Сіе есть не премѣнное слѣдствіе того начала, на которомъ предложенное въ семъ членѣ правило основано.

Сверьхъ сего примѣчанія, я присовокуплю еще примѣръ: въ 154 членѣ видѣли, что уравненіе квадратрицы Диностратовой есть $a - z\cos.\beta = \frac{2a\beta}{\pi}$, или $z = \frac{a-\frac{2a\beta}{\pi}}{\cos.\beta}$; но когда $\beta=\frac{\pi}{2}$ или $=$ дугѣ круга въ 90°, коего радіусъ 1, тогда выходитъ $z=\frac{0}{0}$; и такъ требуется величина радіуса вектора въ семъ положеніи? уравняй $\frac{a-\frac{2a\beta}{\pi}}{\cos.\beta}=\frac{\partial y}{\partial\beta}$, будетъ $\left(a-\frac{2a\beta}{\pi}\right)\partial\beta=\cos.\beta\,\partial y$, и по учиненіи одного дѣйствія выдетъ $-\frac{2a\,\partial\beta^2}{\pi}=-\partial\beta\,\partial y\sin.\beta$, $\frac{\partial y}{\partial\beta}=\frac{2a}{\pi\sin.\beta}$ и $\frac{\partial y}{\partial\beta}=\frac{2a}{\pi}$, когда $\beta=\frac{\pi}{2}$; и такъ послѣдній радіусъ векторъ или основаніе квадратрицы $=\frac{2a}{\pi}$.

Уравненіе сей кривой линеи можно изобразить еще такъ: $y=(a-x)\tang\frac{cx}{a^2}=\frac{a-x}{\cot.\frac{cx}{a^2}}$, гдѣ x абсцисса взятая отъ вершины, y ордината и c четверть окружности круга производителя, коего радіусъ $=a$; но равнымъ образомъ въ случаѣ $x=a$, выдетъ $y=\frac{a^2}{c}\left(=\frac{2a}{\pi}\right)$; то есть, что основаніе квадратрицы равняется третьей пропорціональной къ четверти окружности и радіусу.

О наибольшихъ и наименьшихъ абсциссахъ и ординатахъ кривыхъ линей.

(168) Ордината, которая больше или меньше прилежащихъ къ ней по ту и другую сторону ординатъ той же вѣтви кривой линеи, называется *наибольшею* или *наименьшею*. Бываютъ такъ же *наибольшія* или *наименьшія* абсциссы. Въ еллипсисѣ двѣ ординаты соотвѣтствующія точкамъ, въ коихъ касательныя параллельны оси абсциссъ, суть наибольшія изъ всѣхъ ординатъ; такъ же изъ двухъ абсциссъ соотвѣтствующихъ точкамъ, въ коихъ касательныя параллельны ординатамъ, одна, равная нулю, есть наименьшая, а другая, равная большей оси, есть наибольшая.

Всегда когда имѣется наибольшая или наименьшая изъ абсциссъ, касательная параллельна ординатамъ и предѣлъ $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$; такъ же всегда когда имѣется наибольшая или наименьшая изъ ординатъ, касательная параллельна оси абсциссъ и предѣлъ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Но дабы обратное сему предложение было справедливо, надлежитъ, что бы изъ уравненія $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ возможно было заключить, что прилежащія ординаты суть меньше или больше нежели ордината Y, смотря по тому, наибольшая или наименьшая она будетъ.

Означимъ чрезъ Y ординату соотвѣтствующую абсциссѣ $x + q$, гдѣ q есть весьма малое количество, и чрезъ Z ординату соотвѣтствующую абсциссѣ $x - q$; будешь имѣть [по чле. 162], замѣтивъ что $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$:

$$Y = y + \frac{q}{2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q^3}{2.3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{2.3.4} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \text{ и проч.}$$

$$Z = y + \frac{q^2}{2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{q^3}{2.3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{q^4}{2.3.4} . \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{ и проч.}$$

Ясно видно, что естьли при точкѣ, у которой $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, предѣлъ $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ имѣетъ дѣйствительную величину, то та и другая изъ сихъ

прилежащихъ ординатъ будетъ больше или меньше ординаты Y, соотвѣтственной тойже точкѣ; онѣ обѣ будутъ больше, естьли сей предѣлъ будетъ величина положительная, и меньше, естьли отрицательная; въ первомъ случаѣ ордината y будетъ наименьшая, а въ другомъ наибольшая. Естьли же при той самой точкѣ предѣлъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ будетъ нуль, а $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ дѣйствительное количество, то по причинѣ что сїе послѣднее количество въ выраженїяхъ ординатъ Y и Z имѣетъ знаки разные, одна изъ нихъ не можетъ быть менше или больше ординаты y, естьли другая не будетъ больше или меньше оной; и въ семъ случаѣ не выдетъ ни наибольшей ни наименьшей ординаты.

Но когда при той же точкѣ $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ будутъ нули а $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ будетъ имѣть дѣйствительную величину, тогда Y и Z будутъ меньше y, естьли оная дѣйствительная величина будетъ отрицательная, и больше, естьли положительная; въ первомъ случаѣ ордината y будетъ наибольшая, а въ другомъ наименьшая. Вообще, дабы при какой нибудь точкѣ ордината y была наибольшая или наименьшая, надобно, чтобы обращающїеся при сей точкѣ въ нуль предѣлы содержанїй между разностями ея функцїи, по порядку взятыми, и степенями Δx, Δx^2, Δx^3, и проч. разности абсциссы x, были въ нечетномъ числѣ; и оная ордината будетъ наибольшая, естьли предѣлъ, непосредственно слѣдующїй за послѣднимъ изъ тѣхъ, которые изчезли, будетъ величина отрицательная, и наименьшая, естьли положительная. По разсмотрѣнїи уравненїя $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, надлежитъ разсмотрѣть такимъ же образомъ и уравненїе $\frac{\partial x}{\partial y}=0$, и будетъ знать все, что можетъ относиться къ наибольшимъ и наименьшимъ ординатамъ и абсциссамъ предложенной кривой линеи.

(169) Требуются наибольшїя и наименьшїя ординаты и абсциссы въ кривой линеи, коея уравненїе $y^3+x^3=axy$

(черт. XXXIX)? Во первыхъ удобно видѣть можно, что въ началѣ координатъ A двѣ вѣтви кривой линеи пресѣкаются такимъ образомъ, что одна изъ нихъ имѣетъ касательную параллельную оси абсциссъ, а другая касательную параллельную ординатамъ; во вторыхъ изъ уравнения кривой линеи найдется

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ay - 3x^2}{3y^2 - ax},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a\frac{\partial y}{\partial x} - 6y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 6x}{3y^2 - ax};$$

и поелику положение $ay - 3x^2 = 0$ (*) не дѣлаетъ предѣлъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ нулемъ и величина, которую оный отъ того получаетъ, есть отрицательная, то слѣдуетъ, что есть наибольшая изъ ординатъ при точкѣ D, гдѣ $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$ и $y = \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$. Въ третьихъ, изъ того же уравненія выдетъ

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3y^2 - ax}{ay - 3x^2},\ \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2a\frac{\partial x}{\partial y} - 6x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 - 6y}{3x^2 - ay};$$

и поелику положеніе $3y^2 - ax = 0$ не дѣлаетъ предѣлъ $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ нулемъ и произходящая отъ того величина его есть отрицательная, то слѣдуетъ, что есть наибольшая изъ абсциссъ при точкѣ F, гдѣ $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$ и $y = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$. Сей самой точкѣ F соотвѣтствуетъ еще другая ордината $FG' = -\frac{2a}{3}\sqrt[3]{2}$; но когда положительныя абсциссы меньше AF, тогда каждой изъ нихъ соотвѣтствуютъ три ординаты; и такъ точкѣ D сверьхъ ординаты DE, которая есть наибольшая, сотвѣтствуютъ еще двѣ другія $DE' = -\frac{a}{6}\sqrt[3]{4} + \frac{a}{6}\sqrt{6}\sqrt[3]{2}$, $DE'' = -\frac{a}{6}\sqrt[3]{4} - \frac{a}{6}\sqrt{6}\sqrt[3]{2}$. Наконецъ двѣ вѣтви AG', AH простираются безконечно и имѣютъ

(*) Когда сіе уравненіе есть первой степени, то безъ всякаго изчисленія заключить должно, что есть наибольшая или наименьшая величина.

асимптоту Kt, коей положенїе опредѣляется чрезъ AK $=$ At $= \frac{a}{3}$ (*).

(*) Ординату FG′ авторъ нашелъ поставляя въ данное уравненїе $y^3 + x^3 = axy$ вмѣсто x равную величину $\frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$, и произшедшее уравненїе $y^3 - \frac{a^2}{3} y\sqrt{4} + \frac{4a^3}{27} = 0$ раздѣля на $y - \frac{a}{3}\sqrt{2} = 0$. Такъ же нашелъ и ординаты DE′ и DE″.

Положенїе же асимптоты опредѣлилъ по правилу, о коемъ онъ говорилъ въ 138 членѣ, а именно такъ: Поелику вообще, когда вѣтвь кривой линеи простирается въ углѣ координатъ положительныхъ, усѣченная абсциссою подкасательная $= y\frac{\partial x}{\partial y} - x$, и перпендикуляръ изъ начала абсциссъ до касательной протянутой $= y - x\frac{\partial y}{\partial x}$; то поставивъ вмѣсто $\frac{\partial x}{\partial y}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$ ихъ величины, будетъ первая линея $= y\left(\frac{3y^2 - ax}{ay - 3x^2}\right) - x = \frac{3y^3 + 3x^3 - 2axy}{ay - 3x^2} = \frac{axy}{ay - 3x^2}$, и другая $= y - x\left(\frac{ay - 3x^2}{3y^2 - ax}\right) = \frac{axy}{3y^2 - ax}$, и какъ по свойству кривой линеи безконечная ея вѣтвь простирается или въ углѣ абсциссъ положительныхъ и ординатъ отрицательныхъ, или въ углѣ абсциссъ отрицательныхъ и ординатъ положительныхъ, то найденныя выраженїя, дабы могли быть принаровлены къ опредѣленїю положенїя асимптоты, надлежитъ перемѣнить на сїи

$$\frac{-axy}{\mp ay - 3x^2} \text{ и } \frac{-axy}{3y^2 \mp ax};$$

потомъ положивъ въ оныхъ, какъ x такъ и y, $= \frac{1}{0}$, поелику x и y купно возрастаютъ, получишь AK $= \frac{-a \cdot \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0}}{\mp a \cdot \frac{1}{0} - 3 \cdot \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0}} = \frac{-a \cdot \frac{1}{0}}{\mp a - 3 \cdot \frac{1}{0}} = \frac{-a \cdot \frac{1}{0}}{-3 \cdot \frac{1}{0}} = + \frac{a}{3}$, и A$t = -\frac{a}{3}$.

Здѣсь для упражненїя и навыка въ опредѣленїи наибольшихъ или наименьшихъ величинъ мы предложимъ еще нѣкоторые примѣры, изъ первоначальной Геометрїи взятые, въ коихъ безъ помощи Тейлеровой ѳеоремы, само собою видно бытїе наибольшаго или наименьшаго количества.

1) Изъ треугольниковъ имѣющихъ одну и ту же данную площадь опредѣлить тотъ, котораго периметръ есть наименьшїй.

Сперва опредѣлимъ таковый треугольникъ предполагая основанїе и слѣдственно такъ же и высоту его данными. Означимъ основанїе чрезъ a и вы-

сошу чрезЪ b, а одинЪ изЪ отрѣзковЪ основанія чрезЪ x; мы будемЪ имѣть $a + \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a - x)^2 + b^2} =$ *наименьшему количеству*; потомЪ изЪявляя оное выраженіе чрезЪ y и взирая на $y = a + \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a - x)^2 + b^2}$ какЪ на уравненіе кривой линеи, получимЪ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + b^2}} = \frac{x\sqrt{(a - x)^2 + b^2} - (a - x)\sqrt{x^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + b^2}\,\sqrt{(a - x)^2 + b^2}} = 0$; откуда выдетЪ $x\sqrt{(a - x)^2 + b^2} = (a - x)\sqrt{x^2 + b^2}$, $b^2 x^2 = b^2 (a - x)^2$ и $x = \frac{a}{2}$. И шакЪ треугольникЪ при данномЪ основаніи и данной площади тогда имѣетЪ наименьшій периметрЪ, когда есть равнобедренный.

Теперь положимЪ, что основаніе треугольника и слѣдственно шакЪ же и высота его перемѣняются. ОзначимЪ основаніе чрезЪ u и высоту чрезЪ x, мы будемЪ имѣть $\frac{xu}{2} = c^2$, гдѣ c^2 данная площадь треугольника, и $y = u + 2\sqrt{x^2 + \frac{u^2}{4}} = u + \sqrt{4x^2 + u^2} = \frac{2c^2}{x} + \sqrt{4x^2 + \frac{4c^4}{x^2}} = \frac{2(c^2 + \sqrt{x^4 + c^4})}{x} =$ *наименьшему количеству*; откуда выдетЪ $\frac{\partial y}{\partial x} =$

$$\frac{2\left(2x^4(x^4 + c^4)^{-\frac{1}{2}} - (c^2 + \sqrt{x^4 + c^4})\right)}{x^2} = \frac{2(x^4 - c^4 - c^2\sqrt{x^4 + c^4})}{x^2\sqrt{x^4 + c^4}} = 0,$$

$x^4 - c^4 = c^2\sqrt{x^4 + c^4}$, $x^8 = 3c^4x^4$ и $x^2 = c^2\sqrt{3}$, и поелику $u^2 = \frac{4c^4}{x^2} = \frac{4c^2}{\sqrt{3}}$, будетЪ $x^2 : u^2 = 3 : 4$. И шакЪ треугольникЪ при данной площади тогда имѣетЪ наименьшій периметрЪ, когда есть равносторонный.

ПосмотримЪ, какой будетЪ треугольникЪ, которой при томЪ же данномЪ периметрѣ имѣетЪ площадь наибольшую.

ПоложимЪ сперва основаніе искомаго треугольника и слѣдственно шакЪ же и сумму двухЪ прочихЪ сторонЪ данными. ОзначивЪ ихЪ чрезЪ a и b, а одинЪ изЪ отрѣзковЪ основанія чрезЪ x и соотвѣтственную ему сторону чрезЪ z, мы будемЪ имѣть $2ax = a^2 + z^2 - (b - z)^2$, $z = \frac{2ax - a^2 + b^2}{2b}$, $\sqrt{z^2 - x^2} = \frac{\sqrt{(2ax - a^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}}{2b}$ и $\frac{a\sqrt{(2ax - a^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}}{4b} =$ *наибольшему количеству*, потомЪ изЪявляя сіе выраженіе чрезЪ y и взирая на $y = \frac{a}{4b}\sqrt{(2ax - a^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}$ какЪ на уравненіе кривой линеи, вЪ которомЪ одно изЪ постоянныхЪ количествЪ взято за единицу, получимЪ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{4b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2ax - a^2 + b)\,2a - 2\cdot 4b^2x}{\sqrt{(2ax - a^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}} = 0$; откуда выдетЪ $2a(2ax - a^2 + b^2) = 4b^2x$ и $x = \frac{a}{2}$. И шакЪ паки треугольникЪ при данномЪ основаніи и дан-

томЪ периметрѣ тогда имѣетЪ наибольшую площадь, когда есть равнобедренный.

Теперь положимЪ, что основанie треугольника и слѣдственно такЪ же и высота его перемѣняются. ОзначивЪ основанie чрезЪ u и высоту чрезЪ x, а периметрЪ чрезЪ b, мы будемЪ имѣть $u + 2\sqrt{x^2+\frac{u^2}{4}} = u + \sqrt{4x^2+u^2} = b$ и $\frac{xu}{2}$ = *наибольшему количеству*, или, сыскавЪ изЪ перваго уравненiя $x = \frac{\sqrt{(b-u)^2-u^2}}{2}$ и поставивЪ во второе, $\frac{u\sqrt{(b-u)^2-u^2}}{2}$ = *наибольшему количеству*; откуда, означивЪ сie выраженie чрезЪ y, выдетЪ $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{(b-u)^2-u^2-bu}{\sqrt{(b-u)^2-u^2}} = 0$, $(b-u)^2-u^2-bu = 0$ и $u = \frac{b}{3}$. И такЪ паки треугольникЪ при данномЪ периметрѣ тогда имѣетЪ наибольшую площадь, когда есть равносторонный.

2) ИзЪ прямыхЪ конусовЪ имѣющихЪ одну и ту же толщину опредѣлить тотЪ, котораго цѣлая поверхность есть наименьшая.

Пусть x высота, u радiусЪ основанiя и a^3 толщина искомаго конуса; будешь имѣть $\frac{\pi u^2 x}{3} = a^3$, или $\pi u^2 x = 3a^3$, и $\pi u^2 + \pi u\sqrt{x^2+u^2}$ = *наименьшему количеству*, или, вмѣсто u поставивЪ равную величину $a\sqrt{\frac{3a}{\pi x}}$, $\frac{3a^3}{x} + \frac{a\sqrt{3a\pi x^3+9a^4}}{x}$ = *наименьшему количеству*; потомЪ означивЪ сie выраженie чрезЪ y, найдешь $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3a^3}{x^2} +$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot ax(3a\pi x^3+9a^4)^{-\frac{1}{2}}\,9a\pi x^2 - a\sqrt{3a\pi x^3+9a^4}}{x^2} =$$

$\frac{3a^2\pi x^3 - 18a^5 - 6a^3\sqrt{3a\pi x^3+9a^4}}{2x^2\sqrt{3a\pi x^3+9a^4}} = 0$, или $\pi x^3 - 6a^3 - 2a\sqrt{3a\pi x^3+9a^4} = 0$; откуда выдетЪ $\pi^2 x^6 - 12\pi a^3 x^3 = 12a^3\pi x^3$, $\pi x^3 = 24a^3$ и $x = 2a\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$, и чрезЪ то будетЪ $u\left(= a\sqrt{\frac{3}{\pi x}}\right) = a\sqrt[6]{\frac{9}{8\pi^2}}$. И такЪ прямой конусЪ при данной толщинѣ тогда имѣетЪ наименьшую поверхность, когда квадратЪ высоты его кЪ квадрату дiаметра основанiя какЪ 2 кЪ 1.

Естьли напротивЪ того изЪ прямыхЪ конусовЪ имѣющихЪ одну и ту же данную поверхность требуется тотЪ, котораго толщина есть наибольшая, то означивЪ данную поверхность чрезЪ b^2, будетЪ имѣть $\pi u^2 + \pi u\sqrt{x^2+u^2} = b^2$ и $\frac{\pi u^2 x}{3}$ = *наибольшему количеству*, или, сы-

скавъ изъ перваго уравненія $x = \frac{b\sqrt{b^2 - 2\pi u^2}}{\pi u}$ и поставивъ во второе; $\frac{bu\sqrt{b^2 - 2\pi u^2}}{3}$ = *наибольшему количеству*; потомъ означивъ сіе выраженіе чрезъ y, найдешь $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{3}\left(\sqrt{b^2 - 2\pi u^2} - \frac{2\pi u^2}{\sqrt{b^2 - 2\pi u^2}}\right) = \frac{b(b^2 - 4\pi u^2)}{3\sqrt{b^2 - 2\pi u^2}} = 0$, или $b^2 - 4\pi u^2 = 0$; откуда выдетъ $u = \frac{b}{2\sqrt{\pi}}$ и $x = b\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. И такъ паки прямой конусъ при данной поверьхности тогда имѣетъ наибольшую толстоту, когда квадратъ высоты его къ квадрату діаметра основанія какъ 2 къ 1.

3) Изъ прямоугольниковъ имѣющихъ одну и туже данную площадь опредѣлить тотъ, котораго периметръ есть наименьшій.

Положивъ x основаніемъ и y высотою искомаго прямоугольника, пусть площадь онаго $xy = a^2$; будетъ $2(x + y) = 2\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = 2\left(\frac{x^2 + a^2}{x}\right)$ = *наименьшему количеству*, и оттуда найдется $x = a$ и $y = a$, сирѣчь искомой прямоугольникъ есть равносторонный или квадратъ.

Естьли напротивъ того изъ прямоугольниковъ имѣющихъ данной периметръ требуется тотъ, котораго площадь есть наибольшая, то означивъ $x + y$ чрезъ b, будетъ $xy = x(b - x) = bx - x^2$ = *наибольшему количеству*, и оттуда найдется $x = \frac{b}{2}$ и $y = \frac{b}{2}$, сирѣчь паки искомой прямоугольникъ есть равносторонный или квадратъ.

4) Изъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ имѣющихъ одну и туже данную толщину опредѣлить тотъ, котораго цѣлая поверьхность есть наименьшая.

Сперва опредѣлимъ таковый параллелепипедъ предполагая одно изъ размѣреній его, напримѣръ высоту, данною. Означивъ оную чрезъ b, прочія два размѣренія чрезъ x и y, и данную толщину чрезъ a^3; мы будемъ имѣть $bxy = a^3$ и $2(xy + bx + by)$ = *наименьшему количеству*, или, изъ перваго уравненія сыскавъ $y = \frac{a^3}{bx}$ и поставивъ во второе, $2\left(\frac{a^3}{b} + bx + \frac{a^3}{x}\right)$ = *наименьшему количеству*; откуда найдется $x = a\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $y = a\sqrt{\frac{a}{b}}$. И такъ прямоугольной параллелепипедъ при данной высотѣ b и данной толщинѣ a^3 тогда имѣетъ наименьшую поверьхность, когда основаніе его есть квадратъ.

Теперь положимъ, что высота параллелепипеда и слѣдственно такъ же и каждое изъ размѣреній основанія его перемѣняющся. Означивъ высоту чрезъ z, мы будемъ имѣть $x = a\sqrt{\frac{a}{z}}$ и $y = a\sqrt{\frac{a}{z}}$ и $2\left(\frac{a^3}{z} + 2az\sqrt{\frac{a}{z}}\right)$ = *наименьшему количеству*; откуда найдется $z = a$, и посему такъ же

$x = a$ и $y = a$. И такъ прямоугольной параллелепипедъ при данной толщинѣ тогда имѣетъ наименьшую поверьхность, когда есть равносторонный или кубъ.

Къ тому же заключенію достигнешь и прямо слѣдующимъ образомъ, которой образъ читатель можетъ прилагать къ другимъ подобнымъ вопросамъ.

Пусть x, y и z три размѣренія искомаго параллелепипеда и a^3 данная толщина его; составь сіи уравненія $xyz = a^3$ и $2(xy + xz + yz) =$ *наименьшему количеству*, получишь по ученіи дифференціальнаго исчисленія, сіи два уравненія $yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z = 0$ и $y\partial x + x\partial y + z\partial x + x\partial z + z\partial y + y\partial z = 0$, кои по сысканіи изъ перваго ∂z и по постановленіи во второе, даютъ

$$\left(y - \frac{yz}{x}\right)\partial x + \left(x - \frac{xz}{y}\right)\partial y = 0.$$

И какъ всѣ условія вопроса выполнены и два дифференціала ∂x, ∂y остаются не зависимы другъ отъ друга, то, дабы послѣднее предначертанное уравненіе имѣло мѣсто, надлежитъ чтобы предстоящія ихъ, каждое особо, были равны нулю; слѣдовательно $y - \frac{yz}{x} = 0$ и $x - \frac{xz}{y} = 0$; что даетъ $x = z$ и $y = z$. И такъ три размѣренія искомаго параллелепипеда равны между собою и величина каждаго изъ нихъ опредѣляется чрезъ посредство уравненія $xyz = a^3$, которое обращается въ сіе $x^3 = a^3$, дающее $x = y = z = a$.

Естьли напротивъ того изъ параллелепипедовъ имѣющихъ одну и ту же данную поверьхность требуется тотъ, котораго толщина есть наибольшая, то означивъ оную поверьхность чрезъ b^2, достигнешь къ тѣмъ же дифференціальнымъ уравненіямъ, и слѣдовательно къ тому же заключенію, что и въ прямомъ вопросѣ.

5) Изъ треугольниковъ вписанныхъ въ данномъ кругѣ опредѣлить тотъ, котораго площадь есть наибольшая.

Сперва въ данномъ кругѣ опредѣлимъ таковый треугольникъ ADB предполагая его стоящимъ на данной хордѣ AB какъ основаніи (черт. 24). Для сего опустимъ изъ вершины D на хорду AB перпендикуляръ DQ, и изъ центра C круга на сей перпендикуляръ и ту же хорду перпендикуляры CN и CP, и означимъ радіусъ CA, $=$ CD, чрезъ a, хорду AB чрезъ b, перпендикуляръ CP чрезъ c и отрѣзокъ AQ чрезъ x; мы будемъ имѣть $CN = PQ = x - \frac{b}{2}$, $DN = \sqrt{a^2 - (x - \frac{b}{2})^2}$, $DQ = c + \sqrt{a^2 - (x - \frac{b}{2})^2}$ и $\frac{b}{2}(c + \sqrt{a^2 - (x - \frac{b}{2})^2}) =$ *наибольшему количеству*; откуда, изъявивъ сіе выраженіе чрезъ y, выдетъ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{4} \cdot \frac{2x - b}{\sqrt{x^2 - bx + c^2}} = 0$ и $x = \frac{b}{2}$. И такъ искомой треугольникъ есть AEB, котораго вершина E находится на проходящемъ чрезъ центръ C перпендикулярѣ PE къ хордѣ AB.

Теперь положимъ, что хорда AB всегда перпендикулярная къ дїаметру EF перемѣняется, какъ и перпендикуляръ EP. Означивъ сей перпендикуляръ чрезъ x, мы будемъ имѣть $AB = 2\sqrt{2ax - x^2}$ и $x\sqrt{2ax - x^2} =$ *наибольшему количеству*; откуда выдетъ $x = \frac{3a}{2}$. И такъ изъ треугольниковъ вписанныхъ въ кругѣ наибольшую площадь имѣющїй есть равносторонный.

Чтобы опредѣлить тотъ изъ сихъ вписанныхъ треугольниковъ, котораго периметръ есть наибольшїй, то вообразивъ себѣ какой нибудь вписанной въ кругѣ треугольникъ ADB, означимъ уголъ ACB чрезъ m, предполагая его постояннымъ, и уголъ BCD, которой пусть перемѣняется, чрезъ ϕ; мы получимъ $AB = 2a \sin.\frac{m}{2}$, $BD = 2a \sin.\frac{\phi}{2}$, $AD = 2a \sin.\left(\frac{\pi - (m + \phi)}{2}\right) = 2a \sin.\left(\frac{m}{2} + \frac{\phi}{2}\right)$ и $2a\left(\sin.\frac{m}{2} + \sin.\frac{\phi}{2} + \sin.\left(\frac{m}{2} + \frac{\phi}{2}\right)\right) =$ *наибольшему количеству*; откуда выдетъ $\cos.\frac{\phi}{2} - \sin.\frac{m}{2}\sin.\frac{\phi}{2} + \cos.\frac{m}{2}\cos.\frac{\phi}{2} = 0$, или $\cos\frac{\phi}{2} = -\left(\cos.\frac{m}{2}\cos.\frac{\phi}{2} - \sin.\frac{m}{2}.\sin.\frac{\phi}{2}\right) = -\cos.\left(\frac{m}{2} + \frac{\phi}{2}\right)$, что даетъ $\frac{\phi}{2} = \pi - \left(\frac{m}{2} + \frac{\phi}{2}\right)$ или $\phi = \pi - \frac{m}{2}$. И такъ при постоянномъ углѣ ACB или все тоже при постоянной хордѣ AB, искомой треугольникъ есть AEB. Теперь положи $EP = x$, будетъ $AP = \sqrt{2ax - x^2}$, $AE = \sqrt{2ax}$ и $2\sqrt{2ax} + 2\sqrt{2ax - x^2} =$ *наибольшему количеству*; откуда найдется $a\sqrt{2ax - x^2} = (x - a)\sqrt{2ax}$ и $x = \frac{3a}{2}$. Итакъ паки искомой треугольникъ есть равносторонный.

6) Изъ прямыхъ конусовъ вписанныхъ въ данномъ шарѣ опредѣлить тотъ, котораго толщина есть наибольшая.

Сей вопросъ, какъ и другїи подобные въ поверхности конуса относящїйся, гораздо легче предъидущаго, и потому читатель удобно самъ разрѣшить его может.

Во всѣхъ сихъ предложенныхъ нами вопросахъ бытїе наибольшихъ или наименьшихъ количествъ само собою, безъ помощи Тейлоровой теоремы, явствуетъ. Такъ напримѣръ въ первомъ вопросѣ явно, что какъ при уменьшенїи такъ и приувеличиванїи высоты треугольника периметръ его до безконечности увеличиваться долженъ, дабы оный содержалъ туже данную площадь, и что такимъ образомъ имѣется периметръ, котораго величина будетъ наименьшая. Равнымъ образомъ явно, что какъ при уменьшенїи, такъ и при увеличиванїи высоты треугольника площадь его до безконечности уменьшаться должна, дабы оная заключалася въ томъ же данномъ периметрѣ, и что такимъ образомъ имѣется площадь, которой величина будетъ наибольшая. И такъ далѣе въ другихъ вопросахъ разсуждать надлежитъ.

Правда въ пятомъ вопросѣ относительно къ периметру остается въ разсужденїи сего сомнѣнїе, потому что оный периметръ не между нулями, а между

нулемъ и двукратнымъ дїаметромъ круга содержится, но сїе сомнѣнїе тѣмъ разрѣшается, что квадратъ периметра равносторонняго въ томъ кругѣ вписаннаго треугольника есть въ 27 кратъ болѣе квадрата радїуса, между тѣмъ какъ квадратъ двукратнаго дїаметра только въ 16 кратъ болѣе тогоже квадрата радїуса.

Въ прочемъ часто для узнанїя бытїя или небытїя наибольшаго или наименьшаго количества, кромѣ Тейлоровой ѳеоремы, можетъ служить еще то самое алгебраическое выраженїе, которое уравнивается *наибольшему* или *наименьшему количеству*. Такъ напримѣръ во второмъ вопросѣ, выраженїе $\frac{3a^3}{x} + \frac{a\sqrt{3a\pi x^3 - 9a^4}}{x}$ обращаясь, отъ постановленїя о и $\frac{1}{0}$ вмѣсто x, въ $\frac{1}{3}$, показываетъ, что дѣйствительно имѣется таковая для x величина, которая дѣлаетъ его и означаемое имъ количество наименьшимъ.

Но когда ни тѣмъ ни другимъ образомъ о бытїи наибольшаго или наименьшаго количества удостовѣриться не можно, то не заключая еще изъ того о небытїи онаго, надлежитъ употребить Тейлорову ѳеорему, которая уже несомнѣннымъ образомъ покажетъ то или другое, и которую къ сему предмету первый приложилъ Маклоренъ въ сочиненїи своемъ Treatise of Fluxions.

(170) Пусть Y такая будетъ функція, что $\frac{\partial y}{\partial x} = X(x-f)$, гдѣ X есть функція количества x, множителя $x - f$ въ себѣ не заключающая; будетъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X + (x-f)\frac{\partial X}{\partial x}$, означивъ чрезъ $\frac{\partial X}{\partial x}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta X}{\Delta x}$. Мы означимъ такъ же чрезъ $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)}{\Delta x}$, чрезъ $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)}{\Delta x}$, и такъ далѣе. И поелику $x = f$ не уничтожаетъ выраженія $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, то въ семъ положеніи будетъ наибольшая или наименьшая величина, смотря на то, отрицательною или положительною величиною функція X отъ того сдѣлается. Естьли $\frac{\partial y}{\partial x} = X(x-f)^2$, то будетъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2X(x-f) + (x-f)^2\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2X + 4(x-f)\frac{\partial X}{\partial x} + (x-f)^2.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$; и какъ положеніе $x = f$, уничтожаетъ $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, не истребляя $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, то не можетъ быть въ семь случаѣ ни наибольшей ни наименьшей величины. Естьли $\frac{\partial y}{\partial x} = X(x-f)^3$, то будетъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 3X(x-f)^2 + (x-f)^3\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6X(x-f) + 6(x-f)^2\frac{\partial X}{\partial x} + (x-f)^3\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 6X + 18(x-f)\frac{\partial X}{\partial x} + 9(x-f)^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + (x-f)^3\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$; и какъ $x = f$ уничтожаетъ $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, не истребляя $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, то слѣдуетъ, что вставливаніе f вмѣсто x, учинитъ y наибольшею или наименьшею величиною, смотря на то, отрицательною или положительною величиною функція X отъ того сдѣлается. И такъ явствуетъ, что естьли $\frac{\partial y}{\partial x} = X(x-f)^n$, и n число нечетное; то вставливаніе f вмѣсто x должно учинить y наибольшею или наименьшею величиною, смотря на то, отрицательною или положительною величиною функція X отъ того сдѣлается; но есть ли сіе число равныхъ множителей будетъ четное, то тоже самое вставливаніе не можетъ учинить y ни наибольшею ни наименьшею величиною.

Пусть y такая будетъ функція, что $\frac{\partial y}{\partial x} = X(x-f)(x-g)(x-h)$ и проч., гдѣ множители $x-f$, $x-g$, $x-h$,

и проч. дѣйствительные и между собою не равные, и функція X ни ихъ просто, ни ихъ умноженныхъ на какое нибудь количество въ себѣ не заключаетъ; то поелику ни $x - f = 0$, ни $x - g = 0$, ни $x - h = 0$, и проч. уничтожить $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ не можетъ, каждое изъ сихъ вставливаній можетъ учинить y наибольшею или наименьшею величиною; наибольшею, естьли величина, въ которую отъ того $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ обратится, будетъ отрицательная, а наименьшею, естьли положительная.

(171) Требуются въ предложенной кривой линеи точки, при коихъ субнормаль, приемлемый за функцію абсциссы x, есть наибольшій или наименьшій? Означивъ оный субнормаль чрезъ z, и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ чрезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, будетъ $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, потомъ надлежитъ, чтобы число предѣловъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ и проч., при сей точкѣ обращающихся въ нуль, было нечетное; но изъ уравненія $z = \frac{y \partial y}{\partial x}$ выдетъ $\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{3 \partial y \, \partial^2 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{4 \partial y \, \partial^3 y}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 y^2}{\partial x^4}$, и проч., слѣд. и проч. Мы возьмемъ для примѣра кривую линею, которой уравненіе $x^4 - ax^3 + a^2 y^2 = 0$ (черт. XL), и у которой $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3ax^2 - 4x^3}{2a^2 y}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{3ax - 6x^2}{a^2 y} - \frac{1}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{3a - 12x}{a^2 y} - \frac{3 \partial y \, \partial^2 y}{y \, \partial x . \partial x^2}$, и проч. И какъ $\frac{y \partial^2 y + \partial y^2}{\partial x^2} = \frac{3ax - 6x^2}{a^2}$, то мы положимъ сперва $3a - 6x = 0$, откуда выдетъ $x = \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{a}{4}$ и $z = \frac{a}{8}$; что показываетъ, что абсциссѣ AD, $= \frac{a}{2}$, соотвѣтствуютъ двѣ ординаты DE, DE′, изъ коихъ каждая равна $\frac{a}{4}$, и что общій нормалей EK, E′K субнормаль DK есть наибольшій изъ всѣхъ, понеже учиненныя въ формулу $\frac{y \partial y^3 + 3 \partial y \partial^2 y}{\partial x^3}$ вставливанія дѣлаютъ ее равною $-\frac{2}{a}$. Мы замѣтимъ, сверьхъ того, что чрезъ начало координатъ A проходятъ двѣ вѣтви кривой линеи, которыя въ сей точкѣ имѣютъ касательною ось абсциссъ (*).

(*) И такъ взявъ уравненія $x^4 - ax^3 + a^2 y^2 = 0$ дифференціалъ $(4x^3 - 3ax^2) \partial x + 2a^2 y \partial y = 0$, положи $4x^3 - 3ax^2 = 0$, $2a^2 y = 0$; изъ чего

(172) Требуется еще найти точки, при коихъ AT (черт. VII), приемлемая за функцію абсциссы x, будетъ наибольшая или наименьшая? Положи AT $= z$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; и надобно, что бы число предѣловъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, и проч. обращающихся при таковой точкѣ въ нуль, было нечетное. Но $z = \frac{y\partial x}{\partial y} - x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 2y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 6y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 2\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - 6y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3$, и проч. (*).

И такъ что бы найти сію наибольшую или наименьшую величину, надлежитъ положить $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, и непремѣнно надобно чтобы величины количествъ x и y найденныя изъ сего уравненія и изъ уравненія кривой линеи, не уничтожали

найдешь $x = 0$, $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}a$, $y = 0$; и какъ изъ сихъ величинъ количества x величина $x = 0$ съ величиною количества $y = 0$, удивлетворяетъ предложенному уравненію $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$, то заключить должно, что у сей кривой линеи есть крайная точка; потомъ взявъ другой разъ дифференціалъ, полагая ∂x и ∂y постоянными, найдешь $(12x^2 - 6ax)\partial x^2 + 2a\,\partial y^2 = 0$; и какъ положеніе $x = 0$ и $y = 0$ всѣхъ членовъ сего уравненія въ нуль не обращаетъ, то заключить должно, что есть токмо двукратная точка; наконецъ разрѣшивъ сіе послѣднее уравненіе, выдетъ въ положеніи $x = 0$ и $y = 0$, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0$, или $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm 0$; что показываетъ что обѣ вѣтви въ сей точкѣ имѣютъ ось абсциссъ своею касательною.

(*) При найденіи сихъ выраженій авторъ употребилъ правила изъясненныя въ 137, 158, 159 и 160 членахъ, а именно такъ: Изъ уравненія $z = y.\frac{\partial x}{\partial y} - x$ имѣетъ по 137 члену $\partial z = y\,\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial x}{\partial y}\partial y - \partial x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\,\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} - 1 = y\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial y}$, потомъ по 159 члену находитъ $\frac{\partial z}{\partial y} = -y\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$; откуда умножая на $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$, получаетъ $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = -y\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, и раздѣляя на $\frac{\partial y}{\partial x}$, имѣетъ $\frac{\partial z}{\partial x} = -y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; и такъ далѣе при другихъ выраженіяхъ поступаетъ.

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, или есшьли $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ и изчезнешъ, шо надлежишъ чтобы оныя величины уничшожили шакъ же и $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, не истребляя однакожъ $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, однимъ словомъ, надобно чтобы число сихъ изчезающихъ чрезъ вставливанїе предѣловъ было нечетное, считая отъ перваго, со изключенїемъ его, до того, которой непосредственно слѣдуетъ и имѣетъ дѣйствительную величину.

Естьли вмѣсто разности количества x, разность количества y будетъ полагаема постоянною, то изъ уравненія $z = \frac{y\partial x}{\partial y} - x$, найдешь $\frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = y\frac{\partial^4 x}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = y\frac{\partial^5 x}{\partial y^5} + 3\frac{\partial^4 x}{\partial y^4}$, и проч.; и положивъ $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$, надлежитъ что бы число изчезающихъ чрезъ вставливанїе предѣловъ $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 x}{\partial y^4}$, $\frac{\partial^5 x}{\partial y^5}$ и проч. было нечетное, считая отъ перваго, со изключенїемъ его, до того, которой непосредственно слѣдуетъ и имѣетъ дѣйствительную величину.

(173) Мы возмемъ для примѣра кривую линею, коея уравненїе $ax^3 + by^3 + c^4 = 0$. Изъ онаго найдешь

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{ax^2}{by^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-2ax - 2by\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{by^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{-2a - 2b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - 6by\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{by^2};$$ но уравненїе

$ax + by\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0$ и уравненїе кривой линеи даютъ $x = 0$, $y = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$, и оныя величины не обращаютъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ въ нуль; чего ради при сей точкѣ линея AT есть наибольшая. Такъ же изъ уравненїя $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{by^2}{ax^2}$, получишь

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{-2by - 2ax\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{ax^2},\ \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = \frac{-2b - 2a\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 - 6ax\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{ax^2},$$

потомъ $by + ax\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 = 0$; но оное уравненїе съ уравненїемъ кривой линеи даютъ $y = 0$, $x = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$; чего ради при сей другой точкѣ линея AT паки есть наибольшая.

О точкахъ перегиба и возврата кривыхъ линей.

(174) Когда кривая линея AFK (черт. XLI) со стороны оси AB отъ части вогнута и отъ части выпукла; тогда точка F, отдѣляющая вогнутую часть отъ выпуклой, называется *точкою перегиба*, естьли кривая линея достигнувъ до F не престаетъ продолжать пути своего въ туже сторону, и *точкою возврата*, естьли она въ пути своемъ возвращается къ началу. Ясно видно, что въ кривыхъ линеяхъ имѣющихъ точку перегиба, при непрестанномъ увеличиванïи абсциссы AP часть AT дïаметра AB, содержащаяся между началомъ абсциссъ x и пресѣченïемъ касательной съ онымъ дïаметромъ, непрестанно такъ же увеличивается доколѣ точка P упадетъ въ E, послѣ же сего она убываетъ; откуда слѣдуетъ, что AT приемлемая за функцïю абсциссы, долженствуетъ учиниться наибольшею AL, когда точка P упадетъ на искомую точку E. Такъ же въ кривыхъ имѣющихъ точку возврата, при непрестанномъ возрастанïи части AT, абсцисса AP возрастаетъ же доколѣ точка T упадетъ въ L, послѣ же сего она убываетъ; откуда слѣдуетъ, что AP приемлемая за функцïю AT, долженствуетъ сдѣлаться наибольшею AE, когда точка T да упадетъ въ L. (*).

И такъ изъ сего слѣдуетъ, что для опредѣленïя точекъ перегиба или возврата, надлежитъ токмо положить или $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ или $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$, и послѣ изслѣдовать, дѣйствительно ли ч изтребляющихся чрезъ вставливанïе предѣловъ будетъ

(*) Смотри примѣчанïе къ члену 136.

нечетное, считая отъ перваго $\frac{\partial y}{\partial x}$ или $\frac{\partial x}{\partial y}$ со изключенїемъ его (*). Посему [чрезъ предложенное выше заключить можно, что] кривая линея, коея уравнение $ax^3 + by^3 + c^4 = o$, претерпѣваетъ перегибъ въ двухъ точкахъ, коихъ координаты суть $x = o$, $y = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$, и $x = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$, $y = o$.

(*) Авторъ здѣсь предполагаетъ одну и туже формулу $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$, когда разность количества x возмется за постоянную, или $\frac{\partial x}{\partial y^2} = o$, когда разность количества y примется за постоянную, какъ для опредѣления точекъ перегиба, такъ и для опредѣленія точекъ возврата; что кажется противорѣчитъ тому, что онъ предъ симъ лишь изъяснилъ, ибо, по оному изъясненїю истинная для опредъления точекъ возврата формула должна бы быть $\frac{\partial x}{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)} = o$, которая по совершенїи означеннаго дѣйствїи сдѣлается $-\frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial x}{\partial y} = o$ или $\frac{\partial x^2}{\partial^2 y} = O$, когда разность количества x возмется за постоянную, или $\frac{\partial y^2}{\partial^2 x} = o$, когда разность количества y примется за постоянную; однако же въ самомъ дѣлѣ тутъ нѣтъ никакого противорѣчїя. Ибо, естьли при наибольшей или наименьшей ординатѣ касательная бываетъ или параллельна оси абсциссъ, или параллельна ординатамъ; то явствуетъ, что какъ формулу $\frac{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)}{\partial x}$, такъ и формулу $\frac{\partial x}{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)}$ должно уравнивать нулю двоякимъ образомъ или просто, то есть такъ $\frac{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)}{\partial x} = o$, $\frac{\partial x}{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)} = o$, и тогда выдетъ изъ первой $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$, $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = o$, а изъ другой $\frac{\partial x^2}{\partial^2 y} = o$, $\frac{\partial y^2}{\partial^2 x} = o$; или превратно, то есть такимъ образомъ $\frac{\partial x}{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)} = o$,

$\frac{\partial\left(\frac{y\partial x}{\partial y} - x\right)}{\partial x} = 0$, и тогда выдетъ изъ первой $\frac{\partial x^2}{\partial^2 y} = 0$, $\frac{\partial y^2}{\partial^2 x} = 0$, а изъ другой $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$. Откуда явствуетъ, что формулы, какъ для точекъ перегиба, такъ и для точекъ возврата, суть точно тѣ же. И какъ большею частію довольно бываетъ формулъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$, то авторъ удовольствовался только приведеніемъ оныхъ, умалчивая о двухъ другихъ.

Но между тѣмъ я замѣтить долженъ, что изъ всѣхъ сихъ формулъ ни которая не служитъ къ опредѣленію точки возврата, когда соотвѣтственная касательная параллельна ординатамъ, и абсциссы будутъ положительныя и отрицательныя, ибо тогда нѣтъ ни наибольшей ни наименьшей абсциссы приемлемой за функцію линеи имѣющей выраженіе $\frac{y\partial x}{\partial x} - x$. Однако есть ли въ той же кривой линеи абсциссы возмутся за ординаты, а ординаты за абсциссы; то оная наибольшая или наименьшая абсцисса мѣсто имѣть будетъ, и точка возврата чрезъ посредство тѣхъ формулъ, пристойнымъ образомъ перемѣненныхъ, опредѣлится долженствуетъ. Для объясненія сего примѣромъ, мы возмемъ кривую линею, вторую кубическою параболою называемую, коея уравненіе $y^3 = ax^2$, и кое, какъ извѣстно, при упомянутомъ обстоятельствѣ дѣйствительно имѣетъ точку возврата. Но прежде разсмотримъ первую кубическую параболу, коея уравненіе $y^3 = a^2x$, и коя, какъ извѣстно, имѣетъ точку перегиба: сіе послужитъ къ немалому поясненію способа опредѣлять оную точку въ другихъ кривыхъ линеяхъ.

И такъ, говорю, извѣстно, что сія кривая дѣйствительно имѣетъ точку перегиба, въ началѣ абсциссъ А (черт. 25.); но есть ли сыскавъ $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^2}{3y^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2a^4}{9y^5} = -\frac{2a^{\frac{2}{3}}}{9x^{\frac{5}{3}}}$, уравню $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ нулю, я изъ того ни чего не получу; развѣ $x = \frac{1}{0}$, поелику сіе положеніе удовлетворяетъ уравненію $-\frac{2a^{\frac{2}{3}}}{9x^{\frac{5}{3}}} = 0$; но между тѣмъ прочіе предѣлы $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ и проч. отъ онаго положенія всѣ безъ изъятія истребляются. Такъ же формула $\frac{\partial x^2}{\partial^2 y}$ уравненная нулю или прежняя $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ знаку $\frac{1}{0}$ хотя и даетъ $x = 0$, и слѣдственно такъ же $y = 0$, однако прочіе предѣлы $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ и проч. чрезъ вставливаніе вмѣсто x и y ихъ величинъ, всѣ безъ изъятія

обращаются въ тотъ же видъ $\frac{1}{0}$, и никогда не приемлютъ дѣйствительной величины. Напротивъ же того естьли сыскавъ $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3y^2}{a^2}$ и $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{6y}{a^2}$, уравню $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ нулю, я получу $y = 0$ и слѣдственно такъ же $x = 0$, и изъ прочихъ предѣловъ первой $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$ приметъ дѣйствительную величину $\frac{6}{a^2}$. Но когда $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ уравню знаку $\frac{1}{0}$, тогда паки ничего не получу; развѣ $y = \frac{1}{0}$ и слѣдственно такъ же $x = \frac{1}{0}$.

Что бы видѣть всему сему причину, надлежитъ замѣтить, что предѣлъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ отъ какихъ нибудь точекъ M и M′ кривой линеи къ A безпредѣльно возрастаетъ, можетъ превзойти всякую данную величину и есть положительный какъ съ той такъ и съ другой стороны начала A; что между прочимъ ясно показываетъ уравненіе $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$. Откуда слѣдуетъ, что естьли при тѣхъ же абсциссахъ $ap = AP$, $ap' = AP'$ возмутся соотвѣтствующіе предѣлы $\frac{\partial y}{\partial x}$ за ординаты pm, $p'm'$, то произойдетъ новая кривая линея $msr'm'$, которой вѣтви ms, $m'r'$ какъ въ верьхъ такъ и въ стороны безпредѣльно простираться станутъ, и перпендикуляръ ar съ осью pap' своими асимптотами имѣть будутъ. И теперь явно, для чего уравниваніе $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ нулю ничего не даетъ, или даетъ $x = \frac{1}{0}$; ибо когда $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ есть тоже что и $\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}$, то $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ уравнивать нулю, значитъ искать въ сей новой кривой линеи касательную, оси параллельную, которой, какъ явственно, она не имѣетъ, или посколику выходитъ $x = \frac{1}{0}$, естьли и имѣетъ, то отъ начала въ разстояніи $= \frac{1}{0}$; что то же значитъ, что оной не имѣетъ, или то же значитъ, что вмѣсто касательной имѣетъ асимптоту pap'. Такъ же явно, для чего напротивъ того уравниваніе $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ знаку $\frac{1}{0}$ даетъ $x = 0$; ибо положеніе $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{0}$ влечетъ за собою другое $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{0}$, чрезъ кое въ сей новой кривой линеи вмѣсто касательной параллельной ординатамъ, получается асимптота ar, онымъ ординатамъ параллельная, которую кривая и дѣйствительно имѣетъ.

И такъ, поелику въ сей новой кривой линеи имѣются токмо асимптоты параллельныя оси абсциссъ и ординатамъ, а не касательныя, отнюдъ ни наибольшей ни наименьшей ординаты, или все тоже, ни наибольшаго ни наименьшаго предѣла $\frac{\partial y}{\partial x}$ быть не можетъ; и потому явно, для чего прочіе предѣлы, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, и проч. всѣ безъ изъятія или изтребляются или въ видѣ $\frac{1}{0}$ представляются.

Теперь возмемъ предѣлъ $\frac{\partial x}{\partial y}$ за ординату и y за абсциссу; изъ того произшедшая кривая линея будетъ обыкновенная парабола, имѣющая ось абсциссъ дѣйствительною своею касательною, и наименьшею ординатою точку прикосновенія оной; и потому явно, для чего уравниваніе $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\left(=\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial y}\right)$ нулю даетъ дѣйствительное мѣсто точки, въ которой данная кривая перегибъ имѣетъ, и истребляется притомъ нечетное число предѣловъ; такъ что послѣ $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$, первой $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$ изъ прочихъ принимаетъ дѣйствительную величину $\frac{6}{a^2}$.

Разсмотрѣвъ такимъ образомъ первую кубическую параболу, обратимся ко второй, которой уравненіе $y^3 = a x^2$. Сія кривая линея дѣйствительно имѣетъ точку возврата, но ни которая изъ формулъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$, уравненныхъ о и $\frac{1}{0}$, ея не опредѣляетъ, такимъ образомъ, чтобы истребляющіеся предѣлы были въ нечетномъ числѣ. Чтобы видѣть сему причину, надлежитъ замѣтить, что здѣсь, какъ и въ первомъ случаѣ, предѣлъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ отъ точекъ M, M′ къ A (черт. 26.), безпредѣльно увеличивается, можетъ превзойти всякую данную величину, и есть съ одной стороны положительной, а съ другой отрицательный; что между прочимъ ясно показываетъ уравненіе $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}}$. Оттуда слѣдуетъ, что естьли при тѣхъ же абсциссахъ $ap = AP$, $ap' = AP'$ возмутся соотвѣтствующіе предѣлы $\frac{\partial y}{\partial x}$ за ординаты, то произойдетъ новая кривая линея mm', которой вѣтви въ верьхъ, въ низъ и въ стороны безпредѣльно простираться станутъ и перпендикуляръ rar' съ осью pap' своими асимптотами имѣть будутъ. Почему чрезъ подобное предъидущему разсужденіе окажется, для чего уравниваніе $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ какъ нулю, такъ и знаку $\frac{1}{0}$, въ данной кривой ни чего не даетъ, и изъ прочихъ предѣловъ всѣ безъизъятія или истребляются или въ видѣ $\frac{1}{0}$ представляются. Такъ же, взявъ $\frac{\partial x}{\partial y}$ за ординату и y за абсциссу, найдется, что произшедшая отъ того кривая линея будетъ первая кубическая парабола; которая, какъ извѣстно, ни наибольшей ни наименьшей ординаты не имѣетъ; и потому явно, для чего уравниваніе $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ нулю въ данной кривой ничего не даетъ, а знаку $\frac{1}{0}$ развѣ касательную ординатамъ параллельную, и изъ прочихъ предѣловъ всѣ безъ изъятія или истреб-

ляются или въ видѣ $\frac{0}{0}$ представляются.

Мы выше сказали, что когда въ кривой линеи, у которой касательная соотвѣтственная точкѣ возврата перпендикулярна къ оси, абсциссы возьмутся за ординаты, а ординаты за абсциссы, тогда наибольшая или наименьшая абсцисса, которая соотвѣтствуетъ точки возврата, мѣсто имѣть будетъ. Но со всѣмъ тѣмъ въ нашей кривой линеи, коея уравненіе въ семъ случаѣ можно представить такъ $x^2 = \frac{y^3}{a}$, чрезъ формулы $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, уравниваемыя нулю и знаку $\frac{1}{0}$, точка возврата паки не опредѣляется. Откуда слѣдуетъ, что сіи формулы къ опредѣленію сея точки прилагаются несвойственно. И дѣйствительно когда мы замѣтимъ, что въ кривой линеи имѣющей точку возврата, кромѣ приведеннаго предъ симъ нами случая, всегда предѣлъ содержанія между разностями ординаты и абсциссы убываетъ или возрастаетъ непрерывно, отъ всякой точки взятой на одной вѣтви до всякой точки взятой на другой, между тѣмъ какъ соотвѣтствующая абсцисса сперва возрастаетъ, а потомъ убываетъ, или сперва убываетъ а потомъ возрастаетъ, и при точкѣ возврата дѣлается наибольшею или наименьшею, то увидимъ, что для опредѣленія оной точки собственно поступить надлежитъ такъ: Уравненія $x^2 = \frac{1}{a} y^3$ я возьму дифференціалъ, будетъ $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}}$; сіе выраженіе означивъ чрезъ z, я приму за абсциссу и y за ординату; изъ того получивъ $y = \frac{4a}{9} \cdot z^2$, выдетъ $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{8a}{9} z$; что для наибольшей или наименьшей величины y я уравняю нулю; изъ того найдется $z = 0$, и слѣдственно такъ же $y = 0$ и $x = 0$; теперь возьму второй дефференціалъ и я буду имѣть $\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{8a}{9}$, то есть, что число изтребляющихся предѣловъ, какъ равное 1, есть нечетное. И такимъ образомъ точка возврата опредѣлилася сходственно съ самымъ основаніемъ нашего способа.

Въ заключеніе сего принаровимъ найденныя выше формулы къ кривымъ линеямъ, коихъ ординаты называемыя радіусы векторы выходятъ изъ одной непремѣнной точки.

Поелику формула $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ не иное что значитъ, какъ $\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = 0$, то приведши себѣ на память, что $\partial y = z \cos. \beta \partial \beta + \sin. \beta . \partial z$, $\partial x = - \cos. \beta \partial z + z \sin. \beta \partial \beta$ (член. 151), мы будемъ имѣть $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{z \cos. \beta \partial \beta + \sin. \beta \partial z}{\ldots}$

$$= \frac{z \cos\beta + \sin.\beta \frac{\partial z}{\partial\beta}}{z \sin.\beta - \cos.\beta \frac{\partial z}{\partial\beta}}$$ и положивъ $\frac{\partial z}{\partial\beta} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} =$

$(z \sin.\beta - p.\cos.\beta)\,\partial\,(z\cos.\beta + p\sin.\beta) -$
$(z\cos.\beta + p\sin.\beta)\,\partial\,(z\sin.\beta - p\cos.\beta) : z\sin\beta.\partial\beta - \cos\beta.\partial z)(z\sin.\beta - p\cos.\beta)^2 =$

$$\frac{-z^2\partial\beta - p^2 z - p^2\partial\beta + z^2 p}{\partial\beta\,(z\sin.\beta - p\cos.\beta)^3} = \frac{-z^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) + z\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)}{\partial\beta}}{\left(z\sin\beta - \cos.\beta\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^3} = 0.$$

Такъ же найдется $$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2 - z\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)}{\partial\beta}}{\left(z\cos.\beta + \sin.\beta\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^3} = 0.$$

(175) Разстянутая полуциклоида CBA (черт. XXXIII), коея основаніе EA ($= i$) превосходитъ полуокружность CFE ($= h$) круга производителя опредѣляющагося діаметромъ CE $= 2a$, имѣетъ уравненіемъ (член. 149) $y = \text{LF} + \frac{i}{h}\text{CF}$. Но $\text{LF} = \sqrt{2ax - x^2}$, предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\,\text{LF}}{\Delta x} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\,\text{CF}}{\Delta x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$; слѣдовательно $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a.\overline{h+i} - hx}{h\sqrt{2ax - x^2}}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{aix - a^2.\overline{h+i}}{h\,(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{-2ai\,(2ax - x^2) + 3a^2h\,(a - x) + 3a^3 i}{h\,(2ax - x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Положи $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, будетъ $x = a\frac{h+i}{i}$, и поелику вставливаніе сея величины не истребляетъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, явствуетъ, что кривая линея въ сей точкѣ претерпѣваетъ перегибъ, лишь бы только всегда было i больше h, ибо естьли будетъ меньше, то [по причинѣ уравненія $aix - a^2.\overline{h+i} = 0$ или $x = a.\frac{h+i}{i}$] выдетъ $x - a\ (= a\frac{h}{i})$ больше нежели a. (*).

(*) Ни сжимая ни простая циклоиды не претерпѣваютъ перегиба, но сжатая не менѣе разтянутой тѣмъ достопримѣчательна, что имѣетъ *наиболь-*

Мы возьмемъ для другаго примѣра кривую линею извѣстную подъ именемъ конхоиды Никомедовой (член. 152). Означивъ AB чрезъ a, CB чрезъ b, и взявъ за уравнение сей кривой линеи $MN = a$ (черт. XLII), мы получимъ по причинѣ $PB = a - x$, и подобныхъ треугольниковъ CPM, DBM, $a + b - x : y = b : BN = \frac{by}{a+b-x}$; и посему опустивъ на BD перпендикуляръ MQ, будемъ имѣть $NQ = \frac{(a-x)y}{a+b-x}$ и по причинѣ прямоугольнаго треугольника NQM, $a^2 = (a-x)^2 \frac{(a+b-x)^2 + y^2}{(a+b-x)^2}$; откуда выдетъ $y = \frac{a+b-x}{a-x}\sqrt{2ax - x^2}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^2 b + (a-x)^3}{(a-x)^2\sqrt{2ax-x^2}}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} =$

$$\frac{a^2 b\,(2a^2 - 3(a-x)^2) - a^2 (a-x)^3}{(a-x)^3 (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}};\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} =$$

шую ординату, то есть такую которая больше какъ предшествующихъ такъ и послѣдующихъ ординатъ, и которая определится, положивъ $\frac{\partial y}{\partial x}\left(= \frac{a(b+i) - bx}{b\sqrt{2ax - x^2}}\right) = 0$, или $x = \frac{a(b+i)}{b}$; что, дабы x было меньше $2a$, иначе мѣста имѣть не можетъ, какъ въ случаѣ i меньше b, то есть въ случаѣ сжатой циклоиды. Въ прочемъ явно, что слѣдующіе предѣлы $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, и проч. отъ сего положенія не истребляются, и что первой изъ нихъ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ приемлетъ отрицательную величину $-\frac{b}{a\sqrt{b^2 - i^2}}$ что предзнаменуетъ именно наибольшую ординату.

Трохоида, сопутница циклоиды, напротивъ того во всѣхъ трехъ своихъ родахъ претерпѣваетъ перегибъ, и притомъ въ точкѣ, которая соотвѣтствуетъ той же абсциссѣ. Въ самомъ дѣлѣ взявъ уравнение трохоиды $u = \frac{is}{b}$, мы находимъ $\partial u = \frac{i\partial s}{b} = \frac{i}{b} \cdot \frac{a\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{b}\frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{i}{b} \cdot \frac{a - x}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{i}{b} \cdot \frac{3a^2 - 4ax + 2x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}$, и положивъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, имѣемъ $x = a$ и $\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} = \frac{i}{b}a$; то есть, по причинѣ что слѣдующій предѣлъ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ не истребляется, трохоида всѣхъ родовъ въ точкѣ соотвѣтственной центру круга производителя перегибъ претерпѣваетъ.

$$\frac{3a^2\left(2a^2b(a-x)^2-3b(a-x)^4-(a-x)^5-3a^2b(2ax-x^2)(2a^2-(a-x^2))\right)}{(a-x)^4(2ax-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Чтобы найти, гдѣ сія кривая линея претерпѣваетъ перегибъ, надлежитъ положить

$$(a-x)^3+3b(a-x)^2-2a^2b=0,$$

и изслѣдовать потомъ тѣ изъ корней сего уравненія, которые не истребляютъ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$. На сей конецъ я положу $a-x=u-b$, и уравненіе третьей степени сдѣлается $u^3-3b^2u=2b(a^2-b^2)$, котораго одинъ токмо корень дѣйствительный, когда a^2 больше нежели $2b^2$, и неистребляющій $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$; сей корень (по члену 75) есть

$$u=\sqrt[3]{b(a^2-b^2)+ab\sqrt{a^2-2b^2}}+\sqrt[3]{b(a^2-b^2)-ab\sqrt{a^2-2b^2}}.$$

Когда же a^2 меньше нежели $2b^2$, то $2b(a^2-b^2)$ есть количество отрицательное, то означивъ чрезъ A дугу имѣющую синусомъ $\frac{2(a^2-b^2)}{b}$ и радіусомъ $2b$, получишь (по члену 67) для u сіи три величины $\sin.\frac{A}{3}$, $\sin.\frac{A+2\pi}{3}$, $\sin.\frac{A+4\pi}{3}$; но ежели $2b(a^2-b^2)$ есть количество положительное, то означивъ чрезъ A дугу имѣющую косинусомъ $\frac{2(a^2-b^2)}{b}$ и радіусомъ $2b$, будешь имѣть сіи три величины для u, $\cos.\frac{A}{3}$, $\cos.\frac{A+2\pi}{3}$, $\cos.\frac{A+4\pi}{3}$. Въ случаѣ $a=b$, найдешь $u=0$, $u=b\sqrt{3}$, $u=-b\sqrt{-3}$, и слѣдственно $x=2b$, $x=2b-b\sqrt{3}$, $x=2b+b\sqrt{3}$, изъ коихъ корней первой и третій приняты быть не могутъ [потому что x не можетъ быть больше a или b], и перегибъ будетъ токмо въ точкѣ, гдѣ $x=2b-b\sqrt{3}$. Когда $a^2=2b^2$, корни уравненія третьей степени будутъ $u=2b$ и $(u+b)^2=0$, изъ коихъ единый первый токмо показуетъ точку, при которой кривая линея перегибъ претерпѣваетъ. Словомъ какое бы положеніе относительно a и b ни принято было, конхои-

да имѣетъ токмо единую точку, при которой перегибъ претерпѣваетъ (*).

(*) Поелику выше видѣли, что сія кривая линея можетъ опредѣлиться еще чрезъ уравненіе $z = a + \frac{b}{\cos.\beta}$ между радіусомъ векторомъ z и соотвѣтствующимъ угломъ β; то для опредѣленія у нея точки перегиба, можетъ быть употреблена одна изъ найденныхъ въ предъидущемъ примѣчаніи формулъ. Такъ сыскавъ $\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{b \sin.\beta}{\cos.\beta^2}$, $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta} = \frac{b \cos.\beta^2 + 2b \sin.\beta^2}{\cos.\beta^3} = \frac{b + b \sin.\beta^2}{\cos.\beta^3}$, первая изъ сихъ формулъ, $-z^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 + z\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta} = 0$, сдѣлается $z\left(\frac{b + b \sin.\beta^2}{\cos.\beta^3}\right) - \frac{2b^2 \sin.\beta^2}{\cos.\beta^4} - z^2 = 0$, и поставляя вмѣсто z равную величину $\frac{b + a\cos.\beta}{\cos.\beta}$, учинится $ab + ab \sin.\beta^2 - 2ab \cos.\beta^2 - a^2 \cos.\beta^3 = 0$, или $\cos.\beta^3 + \frac{3b}{a}\cos.\beta^2 - \frac{2b}{a} = 0$; что есть уравненіе, которое должно опредѣлить точку перегиба. Положи $\frac{b}{\cos.\beta} = u$, будетъ $\cos.\beta = \frac{b}{u}$, и найденное уравненіе обратится въ сіе $u^3 - \frac{3}{2}b^2 u - \frac{1}{2}a b^2 = 0$, въ которомъ втораго члена уже не находится, и которое есть то самое, кое Вольфъ въ своихъ елементахъ нашелъ чрезъ способъ частной и непрямой.

Для вящшаго поясненія употребленной здѣсь формулы, пусть еще требуется опредѣлить точку перегиба у спирали параболической. Поелику выше, во второмъ примѣчаніи къ члену 152му, видѣли что въ сей кривой $(a - z)^2 = ap\beta$ и $\frac{\partial z}{\partial \beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ap}{\beta}}$, то сыскавъ $\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{a^2 p^2}{(a - z)^2}$, и $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta} = \frac{1}{4}\frac{(ap)^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\frac{a^2 p^2}{(a - z)^3}$ и поставивъ въ упомянутую формулу $-z^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right) + z\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta} = 0$, получишь уравненіе $\frac{1}{4}\frac{a^2 p^2 z}{(a - z)^3} - 2 \cdot \frac{1}{4}\frac{a^2 p^2}{(a - z)^2} - z^2 = 0$, или $z^2 (z - a)^3 + 3\frac{a^2 p^2}{4}z - \frac{a^3 p^2}{2} = 0$, которое долженствуетъ опредѣлить искомую точку перегиба.

(176) Возмемъ еще для примѣра кривую линею, коея уравненіе

$$y^3 + 3xy^2 - 3ay^2 - 12a^2xy - 4ax^2 + 4a^2x = 0;$$

изъ онаго найдемъ уравненіе между разностями

$$3(y^2 + 2xy - 2ay - 4ax)\Delta y + (3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2)\Delta x + 3(y + x - a)\Delta y^2 + 6(y - 2a)\Delta y\Delta x - 4a\,\Delta x^2 + \Delta y^3 + 3\Delta x\,\Delta y^2 = 0.$$

Что бы удостовѣриться сперва имѣетъ ли сія кривая линея кратныя точки, положимъ $y^2 + 2xy - 2ay - 4ax = 0$, $3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2 = 0$; изъ оныхъ уравненій изключивъ x, находимъ $3y^3 - 14ay^2 + 20a^2y - 8a^3 = 0$, коего уравненія первая часть имѣетъ множители $(y - 2a)^2$ и $3y - 2a$, и корню $y = 2a$, соотвѣтствуетъ $x = -a$; и какъ сіи единыя токмо величины удовлетворяютъ предложенному уравненію, то кривая линея имѣетъ токмо одну двукратную точку, опредѣляющуюся чрезъ уравненіе $(\frac{\partial x}{\partial y})^2 = 0$, которое показуетъ, что при сей точкѣ двѣ вѣтви кривой линеи взаимно касаются, имѣя общую касательную ординатамъ параллельную. (*)

Пусть $p = \frac{a^2}{2a\pi} = \frac{a}{2\pi}$; будетъ $3.\frac{a^2p^2}{4} = \frac{3a^4}{16\pi^2}$, $\frac{a^3p^2}{2} = \frac{a^5}{8\pi^2}$ и уравненіе теперь найденное, сдѣлается $z^2(z - a)^3 + \frac{3a^4z}{16\pi^2} - \frac{a^5}{8\pi^2} = 0$; и какъ, въ ономъ уравненіи первая часть, отъ положенія $z = a$, обращается въ положительное количество $\frac{a^5}{16\pi^2}$, и отъ положенія $z = \frac{2}{3}a$, въ отрицательное $(\frac{2a}{3})^2(-\frac{a}{3})^3 = -\frac{4a^5}{243}$, то слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ при точкѣ перегиба радіусъ векторъ z есть меньше a, а больше $\frac{2}{3}a$. Послѣ чего удобно найдешь, что оный радіусъ векторъ, соотвѣтствующій точкѣ перегиба, весьма близокъ къ $\frac{5}{6}a$, и потому въ уравненіе кривой $(a - z)^2 = ap\beta = \frac{a^2}{2\pi}\beta$ поставивъ $\frac{5}{6}a$ вмѣсто z, заключишь, что искомая точка перегиба есть при углѣ β весьма близкомъ 10ти градусовъ.

(*) Послѣ предложеннаго нами въ примѣчаніи къ члену 142 му нѣтъ уже нужды для опредѣленія точекъ кратныхъ въ сей кривой линеи брать уравне-

Естьли изъ уравненія между разностями сыскавъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-3y^2 + 12ay + 8ax - 4a^2}{3y^2 + 6xy - 6ay - 12ax},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{8a + 12(2a - y)\frac{\partial y}{\partial x} + 6(a - x - y)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{3y^2 + 6xy - 6ay - 12ax}.$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{18(2a - y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 18(a - x - y)\frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 18\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 6\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3}{3y^2 + 6xy - 6ay - 12ax},$$

положишь $8a + 12(2a - y)\frac{\partial y}{\partial x} + 6(a - x - y)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0$; то соединяя сіе уравненіе съ предложеннымъ, получишь между прочими величинами количествъ y и x сіи $y = 0$, $x = a$, которыя числитель предѣла $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ не истребляютъ; а сего ради наша кривая линея при точкѣ, гдѣ $y = 0$ и $x = a$, имѣетъ перегибъ.

Такъ же изъ $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{12ax + 6ay - 6xy - 3y^2}{3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2}$ найдется

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{6(a - x - y) + 12(2a - y)\frac{\partial x}{\partial y} + 8a\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{-6 - 18\frac{\partial x}{\partial y} + 18(2a + y)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - 24a.\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}}{3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2}$$

; и какъ уравненіе $6(a - x - y) + 12(2a - y)\frac{\partial x}{\partial y} + 8a\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 = 0$ соединенное съ предложеннымъ даетъ между прочими величинами количествъ y и x сіи $y = 2a$, $x = -a$, которыя числитель предѣла $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$ не обращаютъ въ нуль, то сія точка, въ которой двѣ вѣтви взаимно касаются, есть точка возврата.

ніе между разностями, но прямо надлежитъ взять уравненіе предѣлъ въ себѣ заключающее $3(x^2 + 2xy - 2ay - 4ax)\partial y + (3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2)\partial x = 0$, и поступить потомъ, какъ въ ономъ примѣчаніи показано.

О разверзании кривыхъ линей и радiусѣ кривизны.

(177) Я приступаю къ опредѣленiю радiуса кривизны. Естьли вообразишь себѣ, что какая нибудь съ одной и той же стороны вогнутая кривая линея BRR′ (черт. XLIII) объята нитью ABRR′, которой одинъ конецъ укрѣпленъ въ какой нибудь точкѣ сей кривой линеи, а другой натянутъ по длинѣ касательной BA, и что при непрестанномъ разверзанiи той нити, объемлющей кривую линею BRR′, оный всегда натянутый конецъ ея A движется; то явствуетъ, что въ семъ движенiи тотъ конецъ A опишетъ другую кривую линею AMM′, въ разсужденiи которой кривая BRR′ называется *разверзающеюся* кривой AMM′, и вытянутыя части нити AB, MR, M′R′ именуются или просто радiусами той разверзающейся или *радiусами кривизны* кривой AMM′, [которая *кривою разверзанiя* наименована быть можетъ.] (*)

Я предполагаю, что два радiуса кривизны MR, M′R′ пресѣкаются въ точкѣ S, и что изъ сея точки, какъ центра, описана радiусомъ, равнымъ единицѣ; дуга $\alpha\beta$. Послѣ сего предположенiя явствуетъ, что чѣмъ точка M′ болѣе приближится къ точкѣ M, тѣмъ и содержанiе между дугою круга $\alpha\beta$ и дугою кривой линеи MM′ болѣе приближится къ содержанiю

(*) Сiе опредѣленiе радiусу кривизны не подаетъ прямаго и истиннаго понятiя, которое о сей, толь важной въ трансцендентной Геометрiи, линеи имѣть надлежитъ. Но для упомянутой въ примѣчанiи къ 136му члену причины я въ исправленiе онаго здѣсь не вхожу.

имѣющемуся между тою же дугою круга $\alpha\beta$ и другою описанною изъ точки S, какъ центра, радіусомъ SM, то есть къ содержанію, кое не иное какое есть какъ содержаніе 1 къ SM, и кое само непрестанно приближается къ содержанію 1 къ KM. Откуда явно, что содержаніе единицы къ радїусу кривизны есть предѣлъ содержанія между дугою $\alpha\beta$ и дугою MM′ кривой линеи, или все тоже, есть предѣлъ содержанія между разностями угла MKA, составляемаго нормалемъ MK съ осью абсциссъ, и дуги AM кривой линеи. При чемъ замѣтить надлежитъ, что когда кривая линея вогнутая, какъ въ приложенномъ чертежѣ, тогда углы составляемые нормалями съ осью абсциссъ отъ начала координатъ возрастаютъ, и напротивъ того когда кривая линея выпуклая, они убываютъ. Сверьхъ того извѣстно, что означивъ чрезъ $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}$ предѣлы содержанїй между конечными разностями дуги AM и абсциссы AP, дуги AM и ординаты PM, будетъ (по члену 149) $\sin. MKA = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\cos. MKA = \frac{\partial y}{\partial s}$; откуда, означивъ чрезъ R радїусъ кривизны, найдешь $\frac{1}{R}$ ($=$ предѣл. содержанїя $\frac{\Delta MKA}{\Delta AM}$) $= \pm$ предѣл. содер. $\frac{\Delta(\frac{\partial x}{\partial s})}{\Delta y} = \mp$ пред. содер. $\frac{\Delta(\frac{\partial y}{\partial s})}{\Delta x}$, [ибо $\partial. MKA = \frac{\partial \sin MKA}{\cos. MKA} = \partial(\frac{\partial x}{\partial s}) : \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial s \partial(\frac{\partial x}{\partial s})}{\partial y}$, такъ же $\partial. MKA = -\frac{\partial. \cos. MKA}{\sin. MKA} = -\partial(\frac{\partial y}{\partial s}) : \frac{\partial x}{\partial s} = -\partial s. \frac{\partial(\frac{\partial y}{\partial s})}{\partial x}$, и предѣлъ содер. $\frac{\Delta MKA}{\Delta AM} = \frac{\partial MKA}{\partial. s}$]; но приемля разность Δx за постоянную, будетъ предѣлъ содержанїя $\frac{\Delta(\frac{\partial x}{\partial s})}{\Delta y} = -\frac{\partial x \partial^2 s}{\partial y \partial s^2}$, и предѣлъ содер. $\frac{\Delta(\frac{\partial y}{\partial s})}{\Delta x} = \frac{\partial s \partial^2 y - \partial y \partial^2 s}{\partial x \partial s^2}$; слѣдовательно $R = \mp\frac{\partial y \partial s^2}{\partial x \partial^2 s} = \mp\frac{\partial x \partial s^2}{\partial s \partial^2 y - \partial y \partial^2 s}$, или просто $R = \mp\frac{\partial y \partial s^2}{\partial x \partial^2 s}$, ибо сїи два выраженїя совершенно тожественны; при–

чемъ должно незабыть, что знакъ — принадлежитъ къ вогнутой кривой линеи, а знакъ + къ выпуклой. (*)

(*) Самое удобнѣйшее для удержанія въ памяти выраженіе радїуса кривизны есть сіе $R = \frac{\partial s}{\partial \omega}$, въ которомъ s означаетъ дугу AM кривой разверзанія и ω *разверзаніе* оной, сирѣчь уголъ MKA, и которое непосредственно слѣдуетъ изъ преднаписаннаго уравненія $\frac{1}{R}$ = предѣл. содерж. $\frac{\Delta MKA}{\Delta AM}$.

Естьли въ оное выраженіе вмѣсто $\partial\omega$ поставишь равную величину $\pm\frac{\partial s.\partial(\frac{\partial x}{\partial s})}{\partial y}$, или $\mp\frac{\partial s.\partial(\frac{\partial y}{\partial s})}{\partial x}$, гдѣ верьхній знакъ имѣетъ мѣсто въ случаѣ возрастанія угла ω или въ случаѣ вогнутой кривой линеи, а нижній въ случаѣ убыванія угла ω или въ случаѣ выпуклой кривой линеи; то получишь $R = \pm\frac{\partial y}{\partial(\frac{\partial x}{\partial s})}$, или $= \mp\frac{\partial x}{\partial(\frac{\partial y}{\partial s})}$. Сіи послѣднія выраженія можно еще преобразить въ иной видъ, поставляя вмѣсто ∂s равную величину $\partial x\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}$ и находя дифференціалъ выраженія $\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}}$ $(= \frac{\partial y}{\partial s})$; ибо чрезъ то будешь имѣть вмѣсто того и другаго выраженія, $R =$

$$\mp\frac{\partial x\left(1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\partial(\frac{\partial y}{\partial x})}, \text{ или еще } R = \mp\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial(\frac{\partial y}{\partial x})}.$$

Сей способъ находить радїусъ кривизны данной кривой линеи основанъ на предположеніи, что оная можетъ быть представляема происходящею отъ разверзанія другой кривой линеи; каковое предложеніе дозволительно, потому что когда кривая линея BRR′ взята по произволенію и можетъ перемѣняться безконечно различными образами, то не можно себѣ представить ни единой кривой линеи, которая бы по причинѣ сихъ перемѣнъ, въ кривой AMM′ не заключалася или бы кривою AMM′ не изображалася. Самой кругъ, которой по видимому со всѣмъ не можетъ быть почитаемъ происходящимъ отъ разверзанія какой нибудь кривой линеи, не изъятъ

ичЪ сего произхожденія: стоитЪ только представить себѣ, что кривая BRR′ сперьва сдѣлалась оваломЪ, а потомЪ оный обратился вЪ точку, и тогда явно, что кривая AMM′ изобразитЪ кругЪ. Для вящшаго удостовѣренія вЪ томЪ сыщемЪ радіусЪ кривизны круга по выведенной изЪ сего предположенія авторомЪ формулѣ $R = -\frac{\partial y \partial s^2}{\partial x \partial^2 s}$. На сей конецЪ взявЪ отЪ уравненія круга $y^2 = 2ax - x^2$ дифференціалЪ, нахожу $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a-x}{y} = \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$. $\partial s (= \partial x \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}) = \frac{a \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $\partial(\frac{\partial s}{\partial x}) = \frac{-a(a-x)\partial x}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{-a(a-x)}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; и какЪ $\frac{\partial s^2}{\partial x^2} = \frac{a^2}{2ax-x^2}$, то будетЪ $\frac{\partial s^2}{\partial^2 s} = -\frac{a\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$ и $R (= -\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial s^2}{\partial^2 s}) = +a$, какЪ вЪ самомЪ дѣлѣ и быть долженствуетЪ.

УтвердивЪ такЪ сей способЪ находить радіусЪ кривизны данной кривой линеи, примѣровимЪ найденную помощію его формулу кЪ кривымЪ линеямЪ, коихЪ ординаты выходятЪ изЪ одной точки. Но что бы способнѣе намЪ сіе сдѣлать можно было, то возмемЪ формулу $R = \mp \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial (\frac{\partial y}{\partial x})}$; и поелику вЪ 151мЪ членѣ найдено было $\partial s (= \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}) = \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$, и слѣдственно $\partial s^3 = \partial \beta^3 (z^2 + (\frac{\partial z}{\partial \beta})^2)^{\frac{3}{2}}$, и вЪ концѣ примѣчанія кЪ члену 174му

$$\partial(\frac{\partial y}{\partial x}) = \frac{-z^2 - 2(\frac{\partial z}{\partial \beta})^2 + z \frac{\partial (\frac{\partial z}{\partial \beta})}{\partial \beta}}{(z \sin. \beta - \cos. \beta . \frac{\partial z}{\partial \beta})^3} . \partial x =$$

$$\frac{-(z^2 + 2(\frac{\partial z}{\partial \beta})^2) + z . \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial \beta})}{\partial \beta}}{\partial x^2} \partial \beta^3,$$ то будетЪ $R =$

$$\pm \frac{(z^2 + (\frac{\partial z}{\partial \beta})^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2(\frac{\partial z}{\partial \beta})^2 - z . \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial \beta})}{\partial \beta}}$$

Обыкновенно писатели находятЪ для R такое выраженіе

$\frac{z\partial s}{\partial s^2 \partial u - z \partial u^2 \partial\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)}$, гдѣ *u* дуга описанная радїусомъ *z*; но сїе и изъ найденнаго нами произвести можно. Ибо, когда $1 : z = \Delta\beta : \Delta u = \frac{\Delta s}{\Delta z} : \frac{\Delta u}{\Delta z}$, то будетъ $\frac{\partial s}{\partial u} : \frac{\partial u}{\partial z} = 1 : z$; откуда выдетъ $\partial\beta = \frac{\partial u}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial\beta} = z\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\partial\left(\frac{z}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial z^2}{\partial u} + z\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$; что поставивъ въ выраженїе

$$\frac{\partial s^3}{(z^2\partial\beta^2 + 2\partial z^2)\partial\beta - z\partial\beta\,\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)} \left(= \frac{\left(z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2 - z\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)}{\partial\beta}}\right),$$

получишь обыкновенное преднаписанное.

По причинѣ подобныхъ треугольниковъ MPK, MQR чрезъ посредство радїуса кривизны удобно найдется $MQ = \mp \frac{\partial y \partial s}{\partial^2 s}$ и $QR = + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y \partial s}{\partial^2 s}$. (*)

(*) Сїи линеи MQ, QR служатъ къ сысканїю уравненїя развертзающейся кривой BRR′ (черт. тотъ же), когда дано уравненїе кривой развертзанїя AMM′. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ чрезъ *t* и *u* координаты BE и ER, и чрезъ *a* данное разстоянїе AB, получишь $t + y = \mp \frac{\partial y \partial s}{\partial^2 s}$ и $u + a - x = \mp \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y \partial s}{\partial^2 s}$, или поелику такъ же $MQ = Ry : \frac{y\partial s}{\partial x} = \frac{R\partial x}{\partial s}$ и $QR = MQ \cdot \frac{y\partial y}{x\partial} : y = \frac{MQ\ \partial y}{\partial x}$, будешь имѣть $t + y = \frac{R\partial x}{\partial s}$ и $u - x + a = \frac{(y + t)\partial y}{\partial x}$, сирѣчь два уравненїя ведущїя къ одному между *t* и *u*, когда дано будетъ уравненїе между *x* и *y*.

Чтобы сыскать таковое уравненїе въ кривой, у коей ординаты выходятъ изъ одной точки, то представивъ себѣ развертзающуюся кривую BNV (черт. 15) и сотвѣтствующїй точкѣ M радїусъ кривизны MN кривой развертзанїя AMZ, проведи перпендикуляры Np и Nq, и удержавъ прежнїя значенїя, назови новой радїусъ векторъ UN буквою *t* и составляемый имъ съ непремѣнною линеею AK уголъ AUN буквою γ; получишь, по причинѣ $Nq = MP - Mp$, $t\sin.\gamma = z\sin.\beta - R\sin\omega$, и по причинѣ $Uq = Np - PU$, $-t\cos.\gamma = R\cos\omega - z\cos.\beta$ или $t\cos.\gamma = z\cos.\beta - R\cos.\omega$, или по причинѣ

(178) Естьли предложенная кривая линея будетъ парабола, коея уравненїе $y^2 = ax$; то изъ онаго найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\sqrt{4x+a}}{2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{-a}{4x\sqrt{x}\sqrt{4x+a}}$, $\frac{\partial s}{\partial^2 s} = -2x\frac{4x+a}{a\partial x}$, и оттуда получится $R = \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}}$, $MQ = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ и $QR = 2x + \frac{a}{2}$.

Въ выраженїи радїуса кривизны R положивъ $x = 0$, найдетъ $AB = \frac{a}{2}$; чего ради означивъ чрезъ t и u перпендикулярныя координаты BE и ER, получишь $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, $u = 3x$, и уравненїе кривой развертающейся будетъ $u^3 = \frac{27a}{16}t^2$, которое есть уравненїе второй кубической параболы имѣющей параметромъ $\frac{27}{16}$ параметра предложенной параболы. Мы вскорѣ

что $\omega = \beta + \psi - 90°$, гдѣ ψ есть уголъ TMU, будешь имѣть t sin. $\gamma = z$ sin. β + R cos. $(\beta + \psi)$ и t cos. $\gamma = z$ cos. β — R sin. $(\beta + \psi)$, сирѣчь два уравненїя ведущїя къ одному между t и γ, когда дано будетъ уравненїе между z и β.

Наконецъ здѣсь представляется еще вопросъ, а именно: дана кривая развертающаяся, какъ найти кривую развертанїя? Удержавъ тѣ же значенїя, назови дугу развертающейся кривой BR (черт. XLIII) буквою r; получишь $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{QR}{MQ} = \frac{u - x + a}{y + t}$ и $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{MR}{MQ} = \frac{BR + AB}{MQ} = \frac{r + a}{y + t}$, и оттуда выдетъ $u - x + a = \frac{(y + t)\partial u}{\partial t}$, и $r + a = \frac{(y + t)\partial r}{\partial t}$. Но уравненїе кривой BRR′, чрезъ которое t и u взаимно опредѣляются, по положенїю дано; того ради величины дробей $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$ или $\frac{\sqrt{\partial t^2 + \partial u^2}}{\partial t}$, въ t и u найдутся, и потому будемъ имѣть два уравненїя между t и u, изъ коихъ, по исключенїи сихъ буквъ, получится одно между x и y, которое и будетъ уравненїе кривой развертанїя AMM′.

Явно, что вся трудность здѣсь состоитъ токмо во опредѣленїи дуги r, которое требуетъ обратнаго способа предѣловъ, предлагаемаго авторомъ въ слѣдующей статьѣ.

увидимъ, что оная разверзающаяся есть кривая прямою измѣряемая, когда самая парабола не есть такова. (*).

(179) Возмемъ для другаго примѣра вообще кривыя линеи втораго порядка, коихъ уравненіе можетъ быть приведено къ сему виду $ay^2 + cx^2 + ex = 0$. Изъ онаго найдется $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2cx+e}{2ay}$, и положивъ $a - c = i$,

$$\frac{\partial s}{x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4cix^2 + 4eix - e^2}{ax(cx+e)}},\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{ae^2(2cx - e)}{4(ax.cx+e)^{\frac{3}{2}}\sqrt{4cix^2 + 4eix - e^2}},$$

и слѣдственно $R = \frac{(e^2 - 4eix - 4cix^2)^{\frac{3}{2}}}{2ae^2}$, или по причинѣ что $MK = \frac{\sqrt{e^2 - 4eix - 4cix^2}}{2c}$, $R = \frac{4a^2}{e^2}.\overline{MK}^3$. [Откуда сравнивъ общее уравненіе съ частными, удобно можно будетъ произвести, что во всѣхъ коническихъ сѣченіяхъ радіусъ кривизны равенъ кубу нормаля раздѣленному на квадратъ половины параметра].

Въ особенности уравненіе еллипсиса есть $y^2 = \frac{g^2}{h^2}(2hx - x^2)$; чего ради будетъ $a = h^2, c = g^2, e = -2hg^2, i = h^2 - g^2$, и оттуда выдетъ $R\ [= \frac{h^2}{g^4}.\overline{MK}^3 = \overline{MK}^3 : (\frac{g^2}{h})^2] = \frac{(h^2g^2 + 2hix - ix^2)^{\frac{3}{2}}}{gh^4}$. Изъ сего выраженія положивъ $x = 0$, потомъ $x = h$ (черт. XLIV), извлечешь $AB = \frac{g^2}{h}$, $DH = \frac{h^2}{g}$. И по причинѣ $R = \frac{h^2}{g^4}\overline{MK}^3$ и подобныхъ треугольниковъ MPK, MQR, будетъ h^2g^2:

(*) Сіе и отсюда явствуетъ, ибо, когда по свойству разверзанія $BR = MR - AB$, то взявъ вмѣсто MR и AB ихъ величины, будешь имѣть $BR = \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}} - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{a+4x}{a})^3.a^2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{(1+\frac{4x}{a})^3} - 1)$. Пусть параметръ $\frac{27}{16}a = b$, будетъ $a = \frac{16}{27}b$, и длина всякой второй кубической параболы, коея уравненіе $u^3 = bt^2$, выдетъ $\frac{8}{27}b(\sqrt{(1+\frac{9u}{4b})^3} - 1) = b\sqrt{(\frac{4}{9}+\frac{u}{b})^3} - \frac{8}{27}b = b(\sqrt{(\frac{4}{9}+(\frac{t}{b})^{\frac{2}{3}})^3} - \frac{8}{27})$.

$h^2g^2 + 2hix - ix^2 = y : MQ = \frac{g^2}{h^2}(h - x) : QR$; откуда выдешь $BE = \frac{iy}{h^2g^2}(2hx - x^2)$, $ER = \frac{ix}{h^2} + \frac{i}{h^4}(h - x)(2hx - x^2)$, и положивъ $\frac{h^2}{i} BE = t$ и $\frac{h^2}{i} ER = u$, $hgt = (2hx - x^2)^{\frac{3}{2}}$, $h^2(h - u) = (h - x)^3$.

Наконецъ исключивъ x, будешь имѣть уравненіе развертывающейся еллипсиса

$g^2t^2 = h(h - \sqrt[3]{h(h - u)^2})^3$ или $h(h - u)^2 = (h - \sqrt[3]{\frac{g^2t^2}{h}})^3$, которая въ H, гдѣ $t = \frac{h^2}{g}$ и $u = h$, имѣетъ точку возврата.

(180) Естьли предложенная кривая линея будетъ полуциклоида CBA (упомянутая въ членѣ 175), въ которой $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(h + i) - hx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\sqrt{a^2(h + i)^2 - 2ahix}}{h\sqrt{2ax - x^2}}$, и $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} =$

$$-\frac{ahi(2ax - x^2) + (a - x)(a^2 . \overline{h + i}^2 - 2ahix)}{h(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2(h + i)^2 - 2ahix}}$$; то выдешь

$$R = \frac{a(h + i) - hx}{h^2} \cdot \frac{(a^2\overline{h + i}^2 - 2ahix)^{\frac{3}{2}}}{ahi(2ax - x^2) + (a - x)(a^2 . \overline{h + i}^2 - 2ahix)},$$

которое выраженіе, когда $i = h$, сдѣлается $R = 2\sqrt{2a} . \sqrt{2a - x}$. Но $MK = \sqrt{2a} . \sqrt{2a - x}$; слѣдовательно протянувъ хорду $FE = \sqrt{2a} . \sqrt{2a - x}$ (черт. XLV), будешь имѣть $R = 2 MK = 2 FE$

Естьли въ выраженіи радіуса кривизны положишь $x = 0$, то найдешь $R = 4a$, и естьли положишь $x = 2a$, то получишь $R = 0$; что показываетъ, что развертывающаяся имѣетъ свое начало въ A, и что естьли діаметръ CE продолжится пока встрѣтиться съ развертывающеюся въ точкѣ H, гдѣ она оканчивается, то должно быть $EH = EC$. Чтобы опредѣлить свойство сей развертывающейся, надлежитъ составить прямоугольникъ EB, описать полукругъ AIB и протянуть AI параллельно радіусу кривизны KM, которой, по причинѣ

MK $=$ FE, самъ параллеленъ FE. Тогда для равныхъ угловъ AEF, EAI, дуги AI и FE будутъ такъ же равны, и хорда AI будучи равна хордѣ FE, будетъ равна и RK; и естьли протянешь RI, то сїя прямая будетъ равна и параллельна AK, которая по произхожденїю циклоиды равна дугѣ FE или дугѣ AI. И такъ развертывающаяся оной циклоиды есть таже самая циклоида въ превратномъ положенiи (*)

(*) Отъ циклоиды я обращаюсь къ эпициклоидѣ. — Въ черт. 15 удержавъ прежнiя значенiя, будешь имѣть $\omega = \beta - (90 - \psi)$ и $\partial\omega = \partial\beta + \partial\psi$, или по причинѣ что $\text{tang.}\,\psi = \frac{z\partial\beta}{\partial z}$, $\partial\omega = \frac{z\partial\psi + \partial z\,\text{tang.}\,\psi}{z}$; потомъ взявъ главную формулу радїуса кривизны $R = \frac{\partial s}{\partial\omega}$, и для $\text{cos.}\,\psi = \frac{\partial z}{\partial s}$ преобразивъ ее въ сїю $R = \frac{z\partial z}{z\partial\psi\,\text{cos.}\,\psi + \partial z\,\text{sin.}\,\psi}$, ищи знаменатель и числитель сего выраженiя чрезъ посредство уравненiя эпициклоиды; и поелику выше въ примѣчанїи къ члену 151му найдено было $\text{cos.}\,\psi\,(= \text{cos.}\,TbO$, черт. 16.$) = \frac{-c\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\phi}{z}$, то получишь $\text{sin.}\,\psi = \frac{\sqrt{z^2 - c^2.\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}}{z}$, $\partial\psi =$

$$\frac{\frac{1}{2}cz\partial\phi\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi - c^2 z\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\phi}{z^2\,\text{sin.}\,\psi},\ z\partial\psi\,\text{cos.}\,\psi = -\frac{\frac{1}{2}c^2 z\partial\phi\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\phi\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi - c^2\partial z\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}{z\sqrt{z^2 - c^2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}},$$

$$\partial z\,\text{sin.}\,\psi = \frac{\partial z\sqrt{z^2 - c^2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}}{z},\quad z\partial\psi\,\text{cos.}\,\psi + \partial z\,\text{sin.}\,\psi =$$

$$\frac{z^2\partial z - \frac{1}{2}c^2 z\partial\phi\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi}{z\sqrt{z^2 - c^2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}} = \frac{z\partial z - \frac{1}{4}c^2\partial\phi\,\text{sin.}\,\phi}{\sqrt{z^2 - c^2\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\phi^2}},$$ или по причинѣ что въ томъ же примѣчанїи найдено было $z\partial z = -a(a+c)\partial\phi\,\text{sin.}\,\phi$, будешь имѣть $z\partial\psi\,\text{cos.}\,\psi + \partial z\,\text{sin.}\,\psi = \frac{z\partial z\,(4a(a+c) + c^2)}{4a(a+c)\sqrt{z^2 - c^2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}}$, и оттуда $R = \frac{4a(a+c)\sqrt{z^2 - c^2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi^2}}{(2a+c)^2}$. Пусть хорда $Qb = h$, будетъ перпендикуляръ $be = h\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\phi$, $Qe = h\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi$, $Oe = c + h\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi$,

$z^2 (= Ob^2) = c^2 + h^2 + 2ch \cos.\frac{1}{2}\phi$, $z^2 - c^2 \sin.\frac{1}{2}\phi^2 = h^2 + 2ch \cos.\frac{1}{2}\phi + c^2 (1 - \sin.\frac{1}{2}\phi^2) = (h + c.\cos.\frac{1}{2}\phi)^2$ и $R = \frac{4a(a+c)(h + c.\cos.\frac{1}{2}\phi)}{(2a+c)^2}$, или, поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ QbR $\cos.\frac{1}{2}\phi = \frac{h}{2z}$, $R = \frac{2(a+c)h}{2a+c}$.

Естьли положишь $c = \frac{1}{0}$, то эпициклоида сдѣлается циклоидою и будетъ $R \left(= \frac{2(a+c)h}{2a+c}\right) = 2h$, какъ дѣйствительно и быть должно.

Разверзающаяся эпициклоиды, подобно какъ и въ циклоидѣ, есть эпициклоида же въ превратномъ положеніи, какъ то мы ниже удостовѣриться случай имѣть будемъ. Пояснимъ теперь нѣсколькими примѣрами предложенную выше, въ первомъ примѣчаніи къ члену 177 му, формулу для опредѣленія радіуса кривизны кривыхъ линей, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки, а именно сію $R = \pm \frac{\left(z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 - z\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta}}$.

1) Пусть требуется найти радіусъ кривизны въ какой ниесть точкѣ спирали Архимедовой? Видѣли, въ послѣднемъ примѣчаніи къ члену 152 му, что уравненіе сей кривой линеи есть $a\beta = 2\pi z$ и что $\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{a}{2\pi}$, почему будетъ $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta} = 0$ и $R = \frac{\left(z^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + \frac{a^2}{2\pi^2}}$ или, положивъ $\frac{a}{2\pi}\left(= \frac{a^2}{2a\pi}\right) = b$, $R = \frac{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2b^2}$.

2) Пусть еще требуется найти радіусъ кривизны въ какой ниесть точкѣ спирали гиперболической? Въ томъ же примѣчаніи показано было, что уравненіе сей кривой линеи есть $z(\mu - \beta) = b$ и что $\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{z}{\mu - \beta}$; почему будетъ $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)}{\partial \beta} = \frac{1}{\mu - \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{z}{(\mu - \beta)^2} = \frac{2z}{(\mu - \beta)^2}$ и $R = \frac{\left(z^2 + \frac{z^2}{(\mu - \beta)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{z}{\mu - \beta}\right)^2 - \frac{2z^2}{(\mu - \beta)^2}} = \frac{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2(\mu - \beta)^3} = \frac{z(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{b^3} = \frac{UM.\overline{MR}^3}{\overline{UK}^3}$; что весьма изрядное строеніе, приемлетъ, а именно: Изъ U и G (черт.

18) протянувъ UH и GL параллельно RM, и изъ M, ML параллельно RUG, соедини H и G прямою HG, и изъ L параллельно оной проведи LN, пока пресѣчется съ нормалемъ въ N; будешь имѣть MN $=$ R, какъ то читатель удобно удостовѣрить себя можетъ.

3) Что бы опредѣлить радіусъ кривизны въ какой нибудь точкѣ спирали логариѳмической, то изъ того же примѣчанія взявъ уравненіе сей кривой линеи $\text{tang.}\,\psi\left(=\frac{z\,\partial\beta}{\partial z}\right)=\frac{1}{ak}$, и сыскавъ $\frac{\partial z}{\partial\beta}=akz$, получишь

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)}{\partial\beta}=ak\frac{\partial z}{\partial\beta}=a^2k^2z \quad \text{и} \quad R=\frac{(z^2+a^2k^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2+2a^2k^2z^2-za^2k^2z}=$$

$(z^2+a^2k^2z^2)^{\frac{1}{2}}=z\sqrt{1+a^2k^2}$, что весьма простое строеніе пріемлетъ, а именно, продолживъ RU (черт. 20) до пресѣченія съ нормалемъ въ N, будешь имѣть MN $=$ R, ибо по причинѣ $UR=\frac{z}{ak}$, $UN\left(=\frac{UM^2}{UR}\right)=akz$ и $MN\left(=\sqrt{\overline{UM}^2+\overline{UN}^2}\right)=\sqrt{z^2+a^2k^2z^2}=z\sqrt{1+a^2k^2}$. И такъ, поелику радіусъ кривизны есть касательная къ развертывающейся кривой, явствуетъ, что развертывающаяся логариѳмической спирали есть спираль же логариѳмическая въ превратномъ положеніи; ибо, по причинѣ прямоугольнаго треугольника RMN и опущеннаго въ немъ перпендикуляра MU, она съ своимъ радіусомъ векторомъ UN дѣлаетъ тотъ же постоянный уголъ UNM, что и уголъ UMR составляемый кривою развертыванія съ своимъ радіусомъ векторомъ UM.

Что бы сію развертывающуюся кривую опредѣлить по предложеннымъ, во второмъ примѣчаніи къ члену 177му, формуламъ $t\,\text{fin}\,\gamma=z\,\text{fin.}\,\beta+R\,\text{cof.}\,(\beta+\psi)$, $t\,\text{cof.}\,\gamma=z\,\text{cof.}\,\beta-R\,\text{fin.}\,(\beta+\psi)$; то замѣтивъ, что по причинѣ $\text{tang.}\,\psi=\frac{1}{ak}$, $\text{fin.}\,\psi=\frac{1}{\sqrt{1+a^2k^2}}$, и $R\left(=z\sqrt{1+a^2k^2}\right)=\frac{z}{\text{fin.}\,\psi}$, преобрази оныя въ сіи

$t\,\text{fin.}\,\gamma=z\,\text{fin}\,\beta+\frac{z}{\text{fin.}\,\psi}(\text{cof.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi-\text{fin.}\,\beta\,\text{fin.}\,\psi)=\frac{z\,\text{cof.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi}$,

$t\,\text{cof}\,\gamma=z\,\text{cof.}\,\beta-\frac{z}{\text{fin.}\,\psi}(\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi+\text{cof}\,\beta\,\text{fin.}\,\psi)=-\frac{z\,\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi}$; откуда имѣешь $\frac{z\,\text{cof.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\gamma\,\text{fin.}\,\psi}=-\frac{z\,\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi}{\text{cof.}\,\gamma\,\text{fin.}\,\psi}$, $\frac{\text{cof.}\,\beta}{\text{fin.}\,\gamma}=-\frac{\text{fin.}\,\beta}{\text{cof.}\,\gamma}$, $\text{cof.}\,\gamma\,\text{cof.}\,\beta+\text{fin.}\,\gamma\,\text{fin.}\,\beta=0$ или $\text{cof.}\,(\gamma-\beta)=0$; что даетъ $\gamma-\beta=\frac{1}{2}\pi$, то есть взаимное отношеніе между углами γ и β, и изъ чего чрезъ продолженіе подкасательной UR до пресѣченія съ нормалемъ въ N опредѣлится радіусъ кривизны MN. Теперь возьми уравненіе $t\,\text{fin.}\,\gamma=\frac{z\,\text{cof.}\,\beta\,\text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi}$, и по причинѣ $\text{fin}\,\gamma=\text{fin.}\,(\frac{1}{2}\pi+\beta)=\text{cof.}\,\beta$ и $\text{tang.}\,\psi=\frac{1}{ak}$, преобрази его въ сіе $\frac{t}{ak}=z$; чрезъ то получишь взаимное отношеніе между

радїусами векторами t и z. Послѣ чего по взаимному отношенїю между z и β нетрудно уже будетъ опредѣлить и отношение между t и γ. Естьли хочешь имѣть сїе отношенїе чрезъ уравнение дифференцїальное, то возьми уравненїе $\frac{z \partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{ak}$ и сыскавъ изъ предъидущихъ двухъ уравненїй $\partial \beta = \partial \gamma$ и $\partial z = \frac{\partial t}{ak}$, чрезъ вставливанїе получишь дифференцїальное уравненїе $\frac{t \partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{ak}$ развертывающейся логариѳмической спирали. Оное уравненїе совершенно сходствуетъ съ уравненїемъ $\frac{z \partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{ak}$ кривой развертанїя; но обманулся бы тотъ, кто заключилъ бы изъ сего, что развертывающаяся логариѳмической спирали есть совершенно таже самая спираль. Ибо взявъ уравненїе между конечными величинами радїуса вектора z и угла β, $\beta = c. \log. \frac{z}{b}$, найденное въ первомъ примѣчанїи къ члену 151 му, и поставивъ въ оное $\gamma - \frac{1}{2}\pi$ вмѣсто β и ct ($= t. \text{tang}. \psi = \frac{t}{ak}$) вмѣсто z, увидишь, что уравненїе развертывающейся кривой будетъ $\gamma - \frac{1}{2}\pi = c. \log. \frac{ct}{b}$, или начавъ щотъ угловъ, по отнятии угла прямаго, и для того назвавъ $\gamma - \frac{1}{2}\pi$ новою буквою λ, $\lambda = c. \log. \frac{ct}{b}$, которое уравненїе разнствуетъ отъ уравненїя $\beta = c \log. \frac{z}{b}$ кривой развертанїя. Сїи уравненїя не иначе точно сходствовать будутъ, какъ въ случаѣ $c = 1$ или $\psi = 45°$, которой извѣстенъ подъ именемъ *случая обыкновенной логариѳмической спирали*.

Здѣсь небезполезно, можетъ быть, для иныхъ читателей замѣтить, что въ семъ исканїи развертывающейся кривой употребленное нами уравненїе $\beta = c. \log. \frac{z}{b}$ не смотря на великую видимую разность съ уравненїемъ $u = \log. z$, взятымъ въ послѣднемъ примѣчанїи къ члену 152 му, совершенно съ онымъ сходствуетъ. Въ самомъ дѣлѣ, естьли замѣтивъ, что b есть произвольное постоянное количество, опредѣлимъ его такимъ образомъ, что бы былъ $z = \text{UB} = 1$, когда $\beta = 0$, то есть такимъ образомъ, какъ мы вездѣ доселѣ предполагали; то изъ того произойдетъ $c. \log. \frac{1}{b} = 0$, $\frac{1}{b} = 1$ и $b = 1$, и оное уравненїе сдѣлается $\beta = c \log. z$; потомъ, поелику мы въ уравненїи $u = \log. z$ чрезъ $\log. z$ разумѣли, не гиперболической, но вообще какой нибудь логариѳмъ, естьли для единообразїя станемъ разумѣть гиперболической; то оное уравненїе перемѣнится на сїе $u = \frac{1}{k} \log. z$, и наконецъ, поелику $u = a\beta$, учинится $\beta = \frac{1}{ak} \log. z$, которое уравненїе совершенно уже сходствуетъ съ $\beta = c. \log. z$, поелику $\frac{1}{ak}$ и c одно и тоже значатъ, и суть количества отъ произволу нашего зависящїя.

О обратномъ способѣ предѣловъ.

(181) Мы преподали всеобщее средство разрѣшать сей вопросъ: сыскать предѣлы содержаній между разностями перемѣнныхъ количествъ, коихъ взаимное содержаніе дано. Теперь слѣдуетъ разсматривать обратный вопросъ, которой состоитъ въ поступленіи отъ предѣловъ содержаній между разностями, къ содержанію самыхъ количествъ. Напримѣръ, когда дано будетъ $\frac{\partial y}{\partial x} = ax^n$ и вопрошается сыскать содержаніе между перемѣнными количествами y и x; то найдется, кромѣ случая, въ которомъ $n = -1$, что оное содержаніе опредѣляется чрезъ уравненіе $y = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + c$, гдѣ c есть произвольное постоянное количество, которое необходимо присовокуплять должно, понеже вообще уравненіе $\frac{\partial y}{\partial x} = ax^n$ можетъ произойти отъ $y = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$, какъ и отъ $y = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$, прибавленнаго или убавленнаго на постоянное количество (член. 114). Когда $n = -1$, тогда $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{x}$; что даетъ $y = a \log. x + c$, или лучше $y = a \log. x + \log. b = \log. bx^a$, ибо $\log. b$ равно можетъ изображать какое ниесть постоянное количество.

Пусть, для большей всеобщности, X функція количества x и постоянныхъ, и содержанія $\frac{\Delta y}{\Delta X}$ предѣлъ $\frac{\partial y}{\partial X} = a X^n$; будетъ имѣть, кромѣ случая, въ которомъ $n = -1$, $y = \frac{a}{n+1} X^{n+1} + c$, и когда $n = -1$, $y = \log. b X^a$; что намъ показываетъ великое число случаевъ, въ коихъ вопросъ удобно разрѣшенъ быть можетъ. Вообще естьли предложено уравненіе $\frac{\partial y}{\partial X} = M$; гдѣ чрезъ M разумѣется функція количества x; то вопросъ будетъ разрѣшенъ всякой разъ, когда воз-

можно будетъ преобразить предложенное уравненіе въ сіе $\frac{\partial y}{\partial X} = aX^n$. Напримѣръ естьли $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{bx}{\sqrt[3]{i^2 \pm x^2}}$, то положи $i^2 \pm x^2 = X$, и будешь имѣть $\frac{\partial X}{\partial x} = \pm 2x$ и $\frac{\partial y}{\partial X} = \pm \frac{b}{2} X^{-\frac{1}{3}}$. Откуда извлечешь $y = \pm \frac{3b}{4} X^{\frac{2}{3}} + c = \pm \frac{3b}{4} \sqrt[3]{(i^2 \pm x^2)^2} + c$.

Естьли $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e + fx}{(g + hx + ix^2)^{\mu}}$, то положи $g + hx + ix^2 = X$, и будешь имѣть $\frac{\partial X}{\partial x} = h + 2ix$ и $\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{e + fx}{h + 2ix}(g + hx + ix^2)^{-\mu}$, которое выраженіе, дабы могло быть приведено къ общей формулѣ, требуетъ, что бы было $e = ah$, $f = 2ai$. И тогда выдетъ $y = \frac{-a}{\mu - 1}(g + hx + ix^2)^{-\mu + 1} + c$.

(182) Предлагается уравненіе $\frac{\partial y}{\partial x} = Kx^m (h + ix^r)^s$, гдѣ K, h, i суть постоянныя предстоящія и m, r, s какія нибудь числа, положительныя или отрицательныя, цѣлыя или дробныя. Разлагая $(h + ix^r)^s$ въ рядъ, найдешь
$h^s + sh^{s-1}.ix^r + s.\frac{s-1}{2}.h^{s-2}.i^2x^{2r} + s.\frac{s-1}{2}.\frac{s-2}{3}h^{s-3}.i^3x^{3r} +$ и проч.; откуда слѣдуетъ, что естьли s будетъ число цѣлое положительное, то $\frac{\partial y}{\partial x}$ будетъ равно опредѣленному числу членовъ вида ax^n; почему удобно можно будетъ въ таковомъ случаѣ изъ даннаго уравненія извлечь y.

Я положу $h + ix^r = X$; будетъ $x = \left(\frac{X - h}{i}\right)^{\frac{1}{r}}$

$$x^m = \left(\frac{X - h}{i}\right)^{\frac{m}{r}}, \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{ir}\left(\frac{X - h}{i}\right)^{\frac{1-r}{r}}, x^m.\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{ir}\left(\frac{X - h}{i}\right)^{\frac{m+1}{r} - 1},$$

и учинивъ вставливаніе, предложенное уравненіе сдѣлается

$$\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{KX^s}{ir}\left(\frac{X - h}{i}\right)^{\frac{m+1}{r} - 1}$$

Ежели $\frac{m+1}{r}$ есть число цѣлое положительное, то возможно будетъ найти y въ алгебраической функцїи количества x и постоянныхъ, или которая, кромѣ логариѳмовъ, никакихъ другихъ трансцендентныхъ количествъ заключать не будетъ. Ибо тогда $\frac{m+1}{r} - 1$ будетъ или нуль или число цѣлое положительное: Естьли нуль, то будетъ $m = r - 1$ и $\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{KX^s}{ir}$; откуда извлечешь $y = \frac{KX^{s+1}}{ir(s+1)} + c = \frac{K}{ir}\frac{(h+ix^r)^{s+1}}{s+1} + c$; и когда $s = -1$, $y = \log.(bX^{\frac{K}{ir}}) = \log.(b(h+ix^r)^{\frac{K}{ir}})$. Естьли же число цѣлое положительное, то будетъ $\frac{\partial y}{\partial X}$ равно опредѣленному числу членовъ вида aX^n. Уравненїе $\frac{\partial y}{\partial x} = Kx^3\sqrt{h+ix^2}$ принадлежитъ къ сему второму случаю; и положивъ $h+ix^2 = X$, его преобразишь въ сїе $\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{K}{2i^2}(X^{\frac{3}{2}} - hX^{\frac{1}{2}})$, изъ котораго извлечешь

$$y = \frac{K}{15i^2}(3X^2 - 5hX)\sqrt{X} + c = \frac{K}{15i^2}(3ix^2 - 2h)(h+ix^2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Дадимъ уравненїю $\frac{\partial y}{\partial x} = Kx^m(h+ix^r)^s$ слѣдующїй видъ $\frac{\partial y}{\partial x} = Kx^{m+rs}(hx^{-r}+i)^s$, и мы увидимъ, что можно еще найти величину количества y въ алгебраической функцїи количества x и постоянныхъ, или которая бы, кромѣ логариѳмовъ, никакихъ другихъ трансцендентныхъ количествъ не заключала, всякой разъ, когда $\frac{m+rs+1}{-r}$ будетъ число цѣлое положительное. И такъ уравненїе $\frac{\partial y}{\partial x} = Kx^{-6}\sqrt{h+ix^2}$ перемѣнивъ на сїе другое $\frac{\partial y}{\partial x} = Kx^{-5}\sqrt{hx^{-2}+i}$, положи $hx^{-2}+i = X$; откуда найдешь $x = \left(\frac{X-i}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{-1}{2h}\left(\frac{X-i}{h}\right)^{-\frac{3}{2}}$; потомъ поставляя сїи ве-

личины въ перемѣненное уравненіе, получить $=$
$-\frac{K}{2b^2}(X^{\frac{3}{2}} - hX^{\frac{1}{2}})$, и слѣдственно
$$y = c - \frac{K}{2b^2}\left(\tfrac{2}{5}X^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2h}{3}X^{\frac{3}{2}}\right) = c - \frac{K}{15b^2}(3hx^{-5} - 2ix^{-3})(h + ix^2)^{\frac{3}{2}} (*).$$

(*) Сей способъ, предлагаемый авторомъ подъ именемъ обратнаго способа предѣловъ, наипаче извѣстенъ подъ названіемъ *интегральнаго изчисленія*, которое название въ послѣдствіи и самъ авторъ пріемлетъ, и чтобы означить, что такого то дифференціала взять интегралъ надлежитъ, обыкновенно употребляется знакъ $\int$, предъ тѣмъ дифференціаломъ поставляемый такъ, вмѣсто того чтобы сказать, что требуется опредѣлить содержаніе между перемѣнными количествами, когда данъ предѣлъ содержанія между ихъ разностями, напримѣръ чрезъ уравненіе $\frac{\partial y}{\partial x} = ax^n$, обыкновенно говорится, найти интегралъ дифференціала $ax^n\partial x$, и означается сіе чрезъ $\int ax^n\partial x$; такъ что составляется уравненіе $y = \int ax^n\partial x$.

Здѣсь авторъ предложилъ о семъ изчисленіи токмо самыя первыя понятія, недостаточныя даже ко уразумѣнію приложеній, оному изчисленію въ слѣдующемъ сдѣланныхъ; почему мы присовокупимъ еще нѣкоторыя правила, кои естественно представляются и кои необходимо знать нужно, дабы разумѣть совершенно упомянутыя приложенія: дальнѣйшія въ семъ важномъ предметѣ знанія предложены будутъ со всею подробностію въ слѣдующихъ книгахъ.

1) Мы начнемъ наши присовокупленія изъясненіемъ, послѣ г. Боссю какъ главное правило, то есть $\int x^m \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$, и въ томъ случаѣ, въ которомъ $m = -1$, и въ которомъ по видимому оно ничего опредѣленнаго не даетъ, можетъ дать для интеграла опредѣленную величину, и ту самую, которая получается чрезъ второе правило, то есть чрезъ $\int\frac{\partial x}{x} = \log. x + c$.

Положимъ, что интегралъ $\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ долженъ изчезнуть, когда $x = a$, гдѣ a какое нибудь постоянное количество; будетъ $\frac{a^{m+1}}{m+1} + c = 0$,

$c = \frac{-a^{m+1}}{m+1}$, и предложенный интегралъ сдѣлается $\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$.
Но выше, въ первомъ примѣчанїи къ члену 164 му, показано было, что въ случаѣ натуральныхъ логариѳмовъ

$$x^{m+1} = 1 + (m+1)\log.x + \frac{(m+1)^2}{2}(\log.x)^2 + \frac{(m+1)^3}{2.3}(\log.x)^3 + \frac{(m+1)^4}{2.3.4}(\log.a)^4 + \text{и проч.}$$

$$a^{m+1} = 1 + (m+1)\log a + \frac{(m+1)^2}{2}(\log.a)^2 + \frac{(m+1)^3}{2.3}(\log.a)^3 + \frac{(m+1)^4}{2.3.4}(\log.a^4) + \text{и проч.};$$

слѣдовательно

$$\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} = \log.x - \log.a + \frac{(m+1)((\log.x)^2 - (\log.a)^2)}{2} + \frac{(m+1)^2((\log.x)^3 - (\log.a)^3)}{2.3}$$
$$+ \frac{(m+1)^3((\log.x)^4 - (\log.a)^4)}{2.3.4} + \text{и проч.}$$

И такимъ образомъ для интеграла $\int x^m \partial x$ мы имѣемъ два выраженїя, изъ коихъ одно въ разсужденїи другаго есть не иное что какъ переобразованїе; и потому мы можемъ употребить то или другое, смотря по надобности, каковую имѣть будутъ различные случаи.

Когда показатель m имѣетъ всякую другую величину кромѣ -1; тогда первое выраженїе всегда будетъ количество опредѣленное, подлежащее всѣмъ возможнымъ въ семъ положенїи употребленїямъ. Но въ особенномъ случаѣ $m = -1$, сїе первое выраженїе учинится неопредѣленнымъ, ничего объ интегралѣ невозвѣщающимъ; напротивъ того второе обращается въ опредѣленное количество $\log. x - \log. a$ или $\log. \frac{x}{a}$. Почему въ семъ особенномъ случаѣ $m = -1$, надлежитъ употребить вторую формулу $\log. \frac{x}{a}$ и опредѣлить приличествующимъ образомъ постоянное количество a. Напримѣръ естьли интегралъ долженъ изчезнуть, когда $x = 1$, то выдетъ $a = 1$, и оная вторая формула сдѣлается $\log. x$.

И такъ явствуетъ, что главное правило интегральнаго изчисленїя отнюдъ не подлежитъ изъятїю, и что формула $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$, или оной переобразованїе $\log. x - \log. a + \frac{(m+1)((\log. x)^2 - (\log. a)^2)}{2}$
$+ \frac{(m+1)^2((\log. x)^3 - (\log. a)^3)}{2.3} + \text{и проч.}$,
всегда даетъ для интеграла $\int x^m \partial x$, безъ посредства какого либо другаго правила, выраженїе опредѣленное.

Причемъ замѣтить должно, что преднаписанной рядъ не только даетъ для интеграла $\int x^m \partial x$ опредѣленное количество, когда $m = -1$, но иногда для краткости приближеннаго изчисленія можетъ быть предпочтенъ формулѣ $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$, а именно, когда m не равняясь въ самой точности съ -1, имѣетъ отъ оной мало различную величину, и x много не превозходитъ a; ибо тогда рядъ будетъ приближаться весьма скоро, такъ что въ числительныхъ употребленіяхъ удобнѣе будетъ взять его первые члены, нежели извлекать слѣдствія изъ формулы $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$.

2) Изъ формулы $aX^m \partial X = \frac{aX^{m+}}{m+1} + c$, приводимой авторомъ послѣ главнаго правила, мы произведемъ сіе заключеніе:

Естьли данной дифференціалъ можно разбить на такіе два, кромѣ постоянныхъ, множителя, изъ коихъ одинъ въ разсужденіи другаго есть дифференціалъ, то по принятіи сего другаго множителя за простое количество, надлежитъ поступать съ самымъ произведеніемъ совершенно по главному правилу. Къ такъ будетъ

$$\int \frac{a^2 \partial x + 2ax\partial x}{\sqrt{ax+x^2}} = a\int (a\partial x + 2x\partial x)(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{a\,(a\partial x + 2x\partial x)(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{(-\frac{1}{2}+1)\,\partial\,(ax+x^2)} + c = 2a\sqrt{ax+x^2} + c,$$

$$\int \frac{b(2ax\partial x - x^2\partial x)\sqrt[3]{(3ax^2-x^3)^2}}{m^2+n^2} = \frac{b}{3(m^2+n^2)}\int (6ax\partial x - 3x^2\partial x)(3ax^2-x^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{b}{3(m^2+n^2)}\,\frac{(6ax\partial x - 3x^2\partial x)(3ax^2-x^3)^{\frac{2}{3}+1}}{(\frac{2}{3}+1)\,\partial\,(3ax^2-x^3)} + c = \frac{b(3ax^2-x^3)^{\frac{5}{3}}}{5\,(m^2+n^2)} + c.$$

Естьли упомянутой другой множитель имѣетъ показатель -1, то интегралъ получается чрезъ второе выраженіе главнаго правила, то есть чрезъ $\int \frac{\partial x}{x} = \log. x + c$.

Чрезъ тоже выраженїе получается интегралъ и тогда, когда данной дифференцїалъ есть дробь, у которой числитель равенъ дифференцїалу знаменателя. И такъ

$$\int\frac{\partial x}{a-x}=-\int\frac{-\partial x}{a-x}=-\log.(a-x)+c=\log.1-\log.(a-x)+c=\log.\frac{1}{a-x}+c,$$

$$\int\frac{-ax^2\partial x}{a^3+x^3}=-\frac{a}{3}\int\frac{3x^2\partial x}{a^3+x^3}=-\frac{a}{3}\log.(a^3+x^3)+c=\log.\frac{1}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^a}}+c,$$

$$\int\frac{ax^{m-1}\partial x}{a^{m+1}+bx^m}=\frac{a}{bm}\int\frac{bmx^{m-1}\partial x}{a^{m+1}+bx^m}=\frac{a}{bm}\log.(a^{m+1}+bx^m)+c.$$

Посему можно разумѣть и слѣдующихъ интеграловъ опредѣленїя:

$$\int\frac{\partial x}{x\log.x}=\int(\frac{\partial x}{x}:\log.x)=\int(\partial(\log.x):\log.x)=\log.\log.x+c,$$

$$\int\frac{\partial x}{x\log.x.\log.\log.x}=\int(\frac{\partial x}{x\log.x}:\log.\log.x)=\log.\log.\log.x+c,$$

и такъ далѣе;

$$\int\frac{\partial x}{x}(\log.x)^m=\frac{(\log.x)^{m+1}}{m+1}+c,$$

$$\int\frac{\partial x}{x\log.x}(\log.\log.x)^m=\frac{(\log.\log.x)^{m+1}}{m+1}+c,$$

и такъ далѣе.

3) Поелику $\partial(ut)=u\partial t+t\partial u$, то будетъ $u\partial t=\partial(ut)-t\partial u$, и $\int u\partial t=ut-\int t\partial u$.

Пусть требуется найти интегралъ дифференцїальной формулы $X\partial x(\log.x)^n$, гдѣ X функцїя количества x, и n цѣлое положительное число. Положи $u=(\log.x)^n$ и $\partial t=X\partial x$, будетъ $\int X\partial x(\log.x)^n=(\log.x)^n\int X\partial x$

$$-n\int\frac{(\log.x)^{n-1}\partial x}{x}\int X\partial x.$$

Пусть $X=x^m$, выдетъ $\int x^m\partial x(\log.x)^n=\frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1}$

$$-\frac{n}{m+1}\int x^m\partial x(\log.x)^{n-1}.$$

Поставь вмѣсто n числа 1, 2, 3, и проч., получишь

$$\int x^m\partial x\log.x=\frac{x^{m+1}}{m+1}\log.x-\frac{1}{m+1}\int x^m\partial x=\frac{x^{m+1}}{m+1}\log x-\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}+c,$$

$$\int x^m \partial x (\log. x)^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log. x)^2 - \frac{2}{m+1}\int x^m \partial x \log. x = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log. x)^2$$
$$- \frac{2x^{m+1}}{(m+1)^2}\log. x + \frac{2x^{m+1}}{(m+1)^3} + c',$$
$$x^m \partial x (\log. x)^3 = \frac{x^{m+1}}{m+x}(\log. x)^3 - \frac{3}{m+1}\int x^m \partial x (\log. x)^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log. x)^3$$
$$- \frac{3x^{m+1}}{(m+1)^2}(\log. x)^2 + \frac{6x^{m+1}}{(m+1)^3}\log. x - \frac{6x^{m+1}}{(m+1)^4} + c'',$$

и проч.

Пусть еще требуется найти интегралъ дифференціальной формулы $a^x X \partial x$. Поелику извѣстно, что $\int a^x \partial x = \frac{a^x}{\log. a}$, то положи $u = \frac{a^x}{\log. a}$ и $t = X$; будетъ $\int a^x X \partial x = \frac{a^x X}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int a^x \partial X$.

Пусть $X = x^n$, гдѣ n цѣлое положительное число, выдетъ $\int a^x x^n \partial x = \frac{a^x x^n}{\log. a} - \frac{n}{\log. a}\int a^x x^{n-1} \partial x$.

Поставь вмѣсто n цѣлыя числа 1, 2, 3, и проч., будешь имѣть

$$\int a^x x \partial x = \frac{a^x x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int a^x \partial x = \frac{a^x x}{\log. a} - \frac{a^x}{(\log. a)^2} + c,$$
$$\int a^x x^2 \partial x = \frac{a^x x^2}{\log. a} - \frac{2}{\log. a}\int a^x x \partial x = \frac{a^x x^2}{\log. a} - \frac{2a^x x}{\log. a^2} + \frac{2a^x}{(\log. a)^3} + c',$$
$$\int a^x x^3 \partial x = \frac{a^x x^3}{\log. a} - \frac{3}{\log. a}\int a^x x^2 \partial x = \frac{a^x x^3}{\log. a} - \frac{3a^x x^2}{(\log. a)^2} + \frac{6a^x x}{(\log. a)^3} - \frac{6a^x}{(\log. a)^4} + c,$$

и проч.

Вопрошается найти интегралъ формулы $\partial \varphi \sin. \varphi^n$. Положи $u =$.

$= \sin.\,\phi^{n-1}$ и $\partial t = -\partial.\cos.\,\phi = \partial\phi\sin.\,\phi$, будетъ $u\partial t = \partial\phi\sin.\,\phi^n$, $ut = -\sin.\,\phi^{n-1}\cos.\,\phi$, $t\partial u = -(n-1)\partial\phi\sin.\,\phi^{n-2}\cos.\,\phi^2 = -(n-1)\partial\phi\sin.\,\phi^{n-2} + (n-1)\partial\phi\sin.\,\phi^n$, и $\int\partial\phi\sin.\,\phi^n = -\sin.\,\phi^{n-1}\cos.\,\phi - \int(-(n-1)\partial\phi\sin.\,\phi^{n-2} + (n-1)\partial\phi\sin.\,\phi^n) = -\sin.\,\phi^{n-1}\cos.\,\phi + (n-1)\int\partial\phi\sin.\,\phi^{n-2} - (n-1)\int\partial\phi\sin.\,\phi^n$; откуда по сокращеніи найдется $n\int\partial\phi\sin.\,\phi^n = -\sin.\,\phi^{n-1}\cos.\,\phi + (n-1)\int\partial\phi\sin.\,\phi^{n-2}$ и $\int\partial\phi\sin.\,\phi^n = -\frac{1}{n}\sin.\,\phi^{n-1}\cos.\,\phi + \frac{n-1}{n}\int\partial\phi\sin.\,\phi^{n-2}$.

Поставь вмѣсто n числа 1, 2, 3, 4, и проч., будешь имѣть слѣдующіе интегралы:

$\int\partial\phi\sin.\,\phi = -\cos.\,\phi + c$,

$\int\partial\phi\sin.\,\phi^2 = -\frac{1}{2}\sin.\,\phi\cos.\,\phi + \frac{1}{2}\int\partial\phi = -\frac{1}{2}\sin.\,\phi\cos.\,\phi + \frac{1}{2}\phi + c'$,

$\int\partial\phi\sin.\,\phi^3 = -\frac{1}{3}\sin\phi^2\cos.\,\phi + \frac{2}{3}\int\partial\phi\sin.\,\phi = -\frac{1}{3}\sin.\,\phi^2\cos.\,\phi - \frac{2}{3}\cos.\,\phi + c''$,

$\int\partial\phi\sin.\,\phi^4 = -\frac{1}{4}\sin\phi^3\cos.\,\phi + \frac{3}{4}\int\partial\phi\sin.\,\phi^2 = -\frac{1}{4}\sin.\,\phi^3\cos.\,\phi - \frac{1.3}{2.4}\sin.\,\phi.\cos.\,\phi + \frac{1.3}{2.4}\phi + c'''$,

и проч.

Вопрошается еще найти интегралъ формулы $\partial\phi\cos.\,\phi^n$. Положи $u = \cos.\,\phi^{n-1}$, $\partial t = \partial.\sin.\,\phi = \partial\phi\cos.\,\phi$, будетъ $u\partial t = \partial\phi\cos.\,\phi^n$, и $t = \cos.\,\phi^{n-1}\sin.\,\phi$, $t\partial u = -(n-1)\partial\phi\cos.\,\phi^{n-2}\sin.\,\phi^2 = -(n-1)\partial\phi\cos.\,\phi^{n-2} + (n-1)\partial\phi\cos.\,\phi^n$, и $\int\partial\phi\cos.\,\phi^n = \cos.\,\phi^{n-1}\sin.\,\phi + (n-1)\int\partial\phi\cos.\,\phi^{n-2} - (n-1)\int\partial\phi\cos.\,\phi^n$; откуда по сокращеніи найдется $n\int\partial\phi\cos.\,\phi^n = \cos.\,\phi^{n-1}\sin.\,\phi + (n-1)\int\partial\phi\cos.\,\phi^{n-2}$ и $\int\partial\phi\cos.\,\phi^n = \frac{1}{n}\cos.\,\phi^{n-1}\sin.\,\phi + \frac{(n-1)}{n}\int\partial\phi\cos.\,\phi^{n-2}$.

Поставь вмѣсто n числа 1, 2, 3, 4, и проч., будешь имѣть слѣдующіе интегралы:

$\int\partial\Phi\cos. = \sin.\,\Phi + c$,

$\int\partial\Phi\cos.\,\Phi^2 = \frac{1}{2}\cos.\,\Phi\sin.\,\Phi + \frac{1}{2}\Phi + c'$,

$\int\partial\Phi\cos.\,\Phi^3 = \frac{1}{3}\cos.\,\Phi^2\sin.\,\Phi + \frac{2}{3}\int\partial\Phi.\cos.\,\Phi = \frac{1}{3}\cos.\,\Phi^2\sin\Phi + \frac{2}{3}\sin.\,\Phi + c''$,

$\int\partial\Phi\cos.\,\Phi^4 = \frac{1}{4}\cos.\,\Phi^3\sin.\,\Phi + \frac{3}{4}\int\partial\Phi.\cos.\,\Phi^2 = \frac{1}{4}\cos.\,\Phi^3\sin\Phi + \frac{1.3}{2.4}\cos.\,\Phi\sin.\,\Phi + \frac{1.3}{2.4}\Phi + c'''$,

и проч.

Послѣ формулъ $\int\partial\phi\,\text{cos}.\phi = \text{sin}.\phi + c$, $\int\partial\phi\,\text{sin}.\phi = -\text{cos}.\phi + c$, удобно можно будетъ разумѣть и слѣдующихъ интеграловъ опредѣленія:

$$\int\partial\Phi\,\text{cos}.\,n\Phi = \tfrac{1}{n}\int n\partial\Phi\,\text{cos}.\,n\Phi = \tfrac{\text{sin}.\,n\Phi}{n} + c,$$

$$\int\partial\Phi\,\text{sin}.\,n\Phi = \tfrac{1}{n}\int n\partial\,\Phi\,\text{sin}.\,n\Phi = -\tfrac{\text{cos}.\,n\Phi}{n} + c,$$

$$\int\partial\Phi\,\text{cos}.\Phi\,\text{sin}.\Phi^{m} = \frac{\text{sin}.\,\Phi^{m+1}}{m+1} + c,$$

$$\int\partial\Phi\,\text{sin}.\Phi\,\text{cos}.\Phi^{m} = -\frac{\text{cos}.\,\Phi^{m+1}}{m+1} + c,$$

$$\int\partial\Phi\,\text{cos}.\,n\Phi\,\text{sin}.\,n\Phi^{m} = \tfrac{1}{n}.\frac{\text{sin}.\,n\Phi^{m+1}}{m+1} + c,$$

$$\int\partial\Phi.\,\text{sin}.\,n\Phi\,\text{cos}.\,n\Phi^{m} = -\tfrac{1}{n}\frac{\text{cos}.\,n\Phi^{m+1}}{m+1} + c,$$

$$\int\partial\phi\,\text{sin}.\,m\Phi\,\text{cos}.\,n\,\Phi = \tfrac{1}{2}\int\partial\Phi\,(\text{sin}.(m+n)\Phi + \text{sin}.(m-n)\Phi) = -\frac{\tfrac{1}{2}\,\text{cos}.\,(m+n)\phi}{m+n} - \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{cos}.\,(m-n)\Phi}{m-n} + c.$$

Формулы $\int\partial\phi\,\text{cos}.\phi = \text{sin}.\phi + c$, $\int\partial\phi\,\text{sin}.\phi = -\text{cos}\,\phi + c$ непосредственно слѣдуютъ изъ члена 148го сея книги; вотъ еще другія, которыя изъ тогоже источника выходятъ:

$$\int\frac{\partial\Phi}{\text{cos}.\,\Phi^{2}} = \text{tang}.\,\Phi + c,\quad \int\frac{\partial\Phi}{\text{sin}.\,\Phi^{2}} = -\,\text{cot}.\,\Phi + c,$$

$$\int\frac{\partial\Phi\,\text{sin}.\,\Phi}{\text{cos}.\,\Phi^{2}} = \text{sec}.\,\Phi + c,\quad \int\frac{\partial\Phi\,\text{cos}.\,\Phi}{\text{sin}.\,\Phi^{2}} = -\,\text{cosé}.\,\Phi + c.$$

Сверьхъ того оттуда мы имѣемъ слѣдующія уравненія:

дано ; будетъ

$$\partial\Phi = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^{2}}},\quad \Phi = \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^{2}}} = \text{A sin}.\,x + c,$$

или $\text{sin}.\,(\Phi+\gamma) = x$,

$$\partial\Phi = \frac{-\partial x}{\sqrt{1-x^{2}}},\quad \Phi = \int\frac{-\partial x}{\sqrt{1-x^{2}}} = \text{A cos}.\,x + c,$$

или $\text{cos}.\,(\Phi+\gamma) = x$,

$$\partial\Phi = \frac{\partial x}{1+x^{2}},\quad \Phi = \int\frac{\partial x}{1+x^{2}} = \text{A tang}.\,x + c,$$ или

$\text{tang}.\,(\Phi+\gamma) = x$,

$$\partial\Phi = \frac{-\partial x}{1+x^2}; \quad \Phi = \int \frac{-\partial x}{1+x^2} = A\cot. x + c,$$ или
$$\cot.(\Phi+\gamma) = x,$$
$$\partial\Phi = \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \Phi = \int \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}} = A\,\text{sec}.\, x + c,$$ или
$$\text{sec}.(\Phi+\gamma) = x,$$
$$\partial\Phi = \frac{-\partial x}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \Phi = \int \frac{-\partial x}{x\sqrt{x^2-1}} = A\,\text{cose}.\, x,$$ или
$$\text{cose}.(\Phi+\gamma) = x,$$
$$\partial\Phi = \frac{\partial x}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad \Phi = \int \frac{\partial x}{\sqrt{2x-x^2}} = A\,\text{sin}.\,\nu.\, x,$$ или
$$\text{sin}.\,\nu.(\Phi+\gamma) = x,$$
$$\partial\Phi = \frac{-\partial x}{\sqrt{2x-x^2}}; \quad \Phi = \int \frac{-\partial x}{\sqrt{2x-x^2}} = A\,\text{cos}.\,\nu.\, x,$$ или
$$\text{cos}.\,\nu.(\Phi+\gamma) = x.$$

Примѣчаніе. Здѣсь буква γ есть произвольное постоянное количество.

Послѣ сихъ формулъ весьма уже не трудно будетъ разумѣть, какъ взяты интегралы и слѣдующихъ уравненій:

$$\partial\Phi = \frac{b\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \Phi = b\int \frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = b\,A\,\text{sin}.\,\frac{x}{a},$$ или
$$\text{sin}.\left(\frac{\Phi}{b}+\gamma\right) = \frac{x}{a},$$
$$\partial\Phi = \frac{-b\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \Phi = b\int \frac{-\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = b\,A\,\text{cos}.\,\frac{x}{a},$$ или
$$\text{cos}.\left(\frac{\Phi}{b}+\gamma\right) = \frac{x}{a},$$
$$\partial\Phi = \frac{b\,\partial x}{a^2+x^2}, \quad \Phi = \frac{b}{a}\int \frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{b}{a}\,A\,\text{tang}.\,\frac{x}{a} + c,$$ или
$$\text{tang}.\left(\frac{a\Phi}{b}+\gamma\right) = \frac{x}{a},$$
$$\partial\Phi = \frac{-b\,\partial x}{a^2+x^2}, \quad \Phi = \frac{b}{a}\int \frac{-\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{b}{a}\,A\cot.\,\frac{x}{a} + c,$$ или
$$\cot.\left(\frac{a\Phi}{b}+\gamma\right) = \frac{x}{a},$$

$$\partial\Phi = \frac{b\partial x}{x\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \Phi = \frac{b}{a}\int\frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{b}{a}\,\mathrm{A\,sec.}\,\frac{x}{a} + c,$$ или
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{a\Phi}{b} + \gamma\right) = \frac{x}{a},$$

$$\partial\Phi = \frac{-b\,\partial x}{x\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad \Phi = \frac{b}{a}\int\frac{-\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{b}{a}\,\mathrm{A\,cose.}\,\frac{x}{a} + c,$$ или
$$\mathrm{cose.}\left(\frac{a\Phi}{b} + \gamma\right) = \frac{x}{a},$$

$$\partial\Phi = \frac{b\,\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}, \quad \Phi = b\int\frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{2.\frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = b\,\mathrm{A\,sin.}\nu.\frac{x}{a} + c,$$ или
$$\mathrm{sin.}\,\nu.\left(\frac{\Phi}{b} + \gamma\right) = \frac{x}{a},$$

$$\partial\Phi = \frac{-b\,\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}, \quad \Phi = b\int\frac{-\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{2.\frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = b\,\mathrm{A\,cos.}\nu.\frac{x}{a} + c,$$ или
$$\mathrm{cos.}\,\nu.\left(\frac{\Phi}{b} + \gamma\right) = \frac{x}{a}.$$

4) Не рѣдко интегралы предложенныхъ дифференціаловъ найдены быть могутъ чрезъ избраніе такихъ функцій, коихъ взятый дифференціалъ частію заключаетъ въ себѣ предложенный.

Такъ чтобы найти интегралъ $\int\partial\phi\,\sin.\phi^n$, я беру дифференціалъ функціи $\sin.\Phi^{n-1}\cos.\Phi$ и получаю $\partial\sin.\Phi^{n-1}\cos.\Phi = -\partial\Phi\sin.\Phi^n + (n-1)\partial\Phi\sin.\Phi^{n-2}\cos.\Phi^2 = -\partial\Phi\sin.\Phi^n + (n-1)\partial\Phi\sin.\Phi^{n-2} - (n-1)\partial\Phi\sin.\Phi^n$; откуда нахожу $\int\partial\Phi\sin.\Phi^n = -\frac{1}{n}\sin.\Phi^{n-1}\cos.\Phi + \frac{n-1}{n}\int\partial\Phi\sin.\Phi^{n-2}$, что есть тоже, что и прежде найдено было.

Равнымъ образомъ чтобы найти интегралъ $\int\partial\phi\cos.\phi^n$, я беру дифференціалъ функціи $\cos.\Phi^{n-1}\sin.\Phi$, и получаю $\partial\cos.\Phi^{n-1}\sin.\Phi = \partial\Phi\cos.\Phi^n - (n-1)\partial\Phi\cos.\Phi^{n-2}\sin.\Phi^2 = \partial\Phi\cos.\Phi^n - (n-1)\partial\Phi\cos.\Phi^{n-2} + (n-1)\partial\Phi\cos.\Phi^n$; откуда, нахожу

$\int \partial \Phi \cos. \Phi^n = \frac{1}{n} \cos. \Phi^{n-1} \sin. \Phi + \frac{n-1}{n} \int \partial \Phi \cos. \Phi^{n-2}$, що есть опять тоже, что прежде найдено было.

Пусть требуется найти интегралъ дифференціала $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, гдѣ n цѣлое положительное число.

Я беру функціи $x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}$ дифференціалъ, и получаю

$$\partial (x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}) = (n-1)\, x^{n-2} \partial x \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$\frac{(n-1)\, a^2 x^{n-2} \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{n x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$; откуда нахожу $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$= -\frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(n-1)}{n} a^2 \int \frac{x^{n-2} \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Поставь вмѣсто n числа 1, 2, 3, 4, и проч., будешь имѣть

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + c,$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \text{A} \sin. \frac{x}{a} + c',$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{3} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{2}{3} a^2 \int \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{3} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2}{3} a^2 \sqrt{a^2 - x^2} + c'' = -\left(\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} a^2\right) \sqrt{a^2 - x^2} + c'',$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{4} x^3 \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3}{4} a^2 \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{4} x^3 \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1.3}{2.4} a^2 x \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4} a^4 . \text{A} \sin. \frac{x}{a} + c''' = -\left(\frac{1}{4} x^3 + \frac{1.3}{2.4} a^2 x\right) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1.3}{2.4} a^4 \text{A} \sin. \frac{x}{a} + c''',$$

и проч.

Откуда явствуетъ, что когда показатель n есть нечетное число, тогда искомый интегралъ всегда изображается алгебраическою функціею; а когда четное, тогда трансцендентною. Почему вЪ первомЪ случаѣ можно

будетъ найти интегралъ чрезъ преобразованіе употребленное авторомъ въ 182 членѣ. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ показатель n чрезъ $2t+1$ и сравнивъ предложенный дифференціалъ $x^{2t+1}\partial x(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ съ формулою $Kx^m\partial x(h+ix^r)^s$, найдешь что $\frac{m+1}{r}-1=\frac{2t+2}{2}-1=t$, то есть, что $\frac{m+1}{r}-1=$ цѣлому положительному числу.

Пусть еще требуется найти интегралъ дифференціала $\frac{x^n\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, гдѣ n цѣлое положительное число.

Я беру дифференціалъ функціи $x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}$, и получаю

$$\partial(x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2})=(n-1)x^{n-2}\partial x\sqrt{2ax-x^2}$$
$$+\frac{ax^{n-1}\partial x-x^n\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{(2n-1)ax^{n-1}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{nx^n\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

откуду нахожу $\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}$

$$+\frac{(2n-1)a}{n}\int\frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Поставь вмѣсто n числа 1, 2, 3, 4, и проч., будешь имѣть

$$\int\frac{x\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\int\frac{\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\,\mathrm{A\,sin.}v.\frac{x}{a}+c,$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\tfrac{1}{2}x\sqrt{2ax-x^2}+\tfrac{3}{2}a\int\frac{x\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\tfrac{1}{2}x\sqrt{2ax-x^2}-\tfrac{3}{2}a\sqrt{2ax-x^2}$$
$$+\tfrac{3}{2}a^2\mathrm{A\,sin.}v.\frac{x}{a}+c'=-(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}a)\sqrt{2ax-x^2}+\tfrac{3}{2}a^2\mathrm{A\,sin.}v.\frac{x}{a}+c',$$

$$\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\tfrac{1}{3}x^2\sqrt{2ax-x^2}+\tfrac{5}{3}a\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\tfrac{1}{3}x^2\sqrt{2ax-x^2}-$$
$$\tfrac{5a}{3}(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}a)\sqrt{2ax-x^2}+\tfrac{3.5}{3.2}a^3\mathrm{A\,sin.}v.\frac{x}{a}+c''=-(\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{5}{2.3}ax+\tfrac{3.5}{2.3}a^2)$$
$$\times\sqrt{2ax-x^2}+\tfrac{3.5}{2.3}a^3\mathrm{A\,sin.}v.\frac{x}{a}+c'',$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\tfrac{1}{4}x^3\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{7}{4}a\int\frac{x^3 \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\tfrac{1}{4}x^3\sqrt{2ax - x^2} -$$
$$\tfrac{7}{4}a\left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{5}{2.3}ax + \tfrac{3.5}{2.3}a^2\right)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{3.5.7}{2.3.4}a^4 \text{Asin.v.}\tfrac{x}{a} + c''' =$$
$$-\left(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{7ax^2}{3.4} + \tfrac{5.7}{2.3.4}a^2x + \tfrac{3.5.7}{2.3.4}a^3\right)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{3.5.7}{2.3.4}a^4 \text{Asin.v.}\tfrac{x}{a} + c''',$$

и проч.

Послѣ сего удобно уже найдется интегралъ слѣдующей формулы $\frac{(a^3 + ax^2 - x^3)\partial x \sqrt{2a - x}}{\sqrt{x}}$; ибо умноживъ числитель и знаменатель на $\sqrt{2a - x}$, получишь $\frac{2a^4 \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{2a^2 x^2 \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{3ax^3 \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{a^3 x \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $+ \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, которое выраженіе состоитъ изъ членовъ, коихъ интегралы предъ симъ найдены.

5) Сверьхъ преобразованій, употребленныхъ авторомъ при найденіи интеграловъ въ 182 членѣ, имѣются еще многія другія, кои къ сему предмету приложены быть могутъ и изъ коихъ о нѣкоторыхъ мы здѣсь предложимъ, показуя какимъ образомъ чрезъ нихъ достигнуть можно къ интеграламъ формулъ $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, и $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}$, $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x^2 \pm 2ax}}$, кои съ формулами $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ и $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, предъ симъ разсматриваемыми, имѣютъ весьма немалую связь.

Начнемъ формулою $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, и положивъ $n = 0$, сыщемъ сперва интегралъ $\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. Для сего уравнимъ $x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ новой буквѣ z, и взявъ логариѳмической дифференціалъ, будемъ имѣть $\frac{\partial x + \frac{x \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$

$\frac{(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\partial x}{(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{\partial z}{z}$; откуда выдетЪ $\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log. z = \log. (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$. Или иначе, положимЪ $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$, и сыщемЪ $x = \frac{z^2 \mp a^2}{2z}$, $\partial x = \frac{(z^2 \pm a^2)\partial z}{2z^2}$ и $\sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{z^2 \pm a^2}{2z}$; чрезЪ что будемЪ имѣть $\frac{\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{(z^2 \pm a^2)\partial z}{2z^2} : \frac{z^2 \pm a^2}{2z} = \frac{\partial z}{z}$, и $\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log. z = \log. (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$, то есть тоже, что и прежде.

Теперь взявЪ функціи $x^{n-1}\sqrt{x^2 \pm a^2}$ дифференціалЪ, получимЪ $\partial(x^{n-1}\sqrt{x^2 \pm a^2}) = (n-1)x^{n-2}\partial x\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \pm \frac{(n-1)a^2 x^{n-2}\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \frac{nx^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ и $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{n-1}{n}a^2 \int \frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Поставь вмѣсто n числа 1, 2, 3, 4, и проч., будешь имѣть частные интегралы, изЪ коихЪ произшедшіе отЪ дифференціаловЪ, имѣющихЪ показателями нечетныя числа, всѣ будутЪ алгебраическія функціи, какЪ вЪ самомЪ дѣлѣ и быть долженствуетЪ, потому что означивЪ n чрезЪ $2t + 1$, выдетЪ, по сравненіи формулы $Kx^m \partial x(h + ix^r)^s$ сЪ $x^n \partial x(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{m+1}{r} - 1 = \frac{2t+1+1}{2} - 1 = t$, то есть = цѣлому положительному числу.

Что бы сыскать интегралы формулЪ $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{a^2 - x^2}}$ и $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, положи $x = \frac{a^2}{z}$; будешь имѣть $\partial x = -\frac{a^2 \partial z}{z^2}$, $x^n \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^{2n+1}\sqrt{z^2 - a^2}}{z^{n+1}}$, и $x^n\sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{a^{2n+1}\sqrt{a^2 \pm z^2}}{z^{n+1}}$; откуда вы-

дешЪ $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{a^2\partial z}{z^2} : \frac{a^{2n+1}\sqrt{z^2-a^2}}{z^{n+1}} = -\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{z^{n-1}\partial z}{\sqrt{z^2-a^2}}$, и

$\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x^2\pm a^2}} = -\frac{a^2\partial z}{z^2} : \frac{a^{2n+1}\sqrt{a^2\pm z^2}}{z^{n+1}} = -\frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\frac{z^{n-1}\partial z}{\sqrt{a^2\pm z^2}}$,

потомЪ $\int\frac{\partial x}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a^{2n-1}}\int\frac{z^{n-1}\partial z}{\sqrt{z^2-a^2}}$, и $\int\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x^2\pm a^2}} =$

$= -\frac{1}{a^{2n-1}}\int\frac{z^{n-1}\partial z}{\sqrt{a^2\pm z^2}}$, которые интегралы по предложеннымЪ предЪ енiЪ формуламЪ удобно уже опредѣляшся.

Пусть $n=1$, будетЪ $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\int\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-a^2}} =$
$-\frac{1}{a}\log.(z+\sqrt{z^2-a^2})+c = -\frac{1}{a}\log.\frac{a(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x}+c =$
$\frac{1}{a}\log.\frac{x}{a(a+\sqrt{a^2-x^2})}+c$. ТакЪ же $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2\pm a^2}} = -\frac{1}{a}\int\frac{\partial z}{\sqrt{a^2\pm z^2}} =$
$-\frac{1}{a}\log.(z+\sqrt{a^2+z^2})+c = -\frac{1}{a}\log.\frac{a(a+\sqrt{a^2+x^2})}{x}+c =$
$\frac{1}{a}\log.\frac{x}{a(a+\sqrt{a^2+x^2})}+c$, когда возмешь знакЪ $+$, или $= -\frac{1}{a}\text{A sin.}\frac{z}{a}+c =$
$-\frac{1}{a}\text{A sin.}\frac{a}{x}+c = \frac{1}{a}\text{A cos.}\frac{a}{x}+c = \frac{1}{a}\text{A sec.}\frac{x}{a}+c = -\frac{1}{a}\text{A cosec.}\frac{x}{a}$
$+c$, когда примешь знакЪ $-$.

Непосредственное опредѣленiе интеграловЪ формулЪ $\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}}$, $\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ шакимЪ образомЪ совершить можно.

Положи $\sqrt{a^2-x^2} = a-z$, будетЪ $x=\sqrt{2az-z^2}$; $\partial x = \frac{(a-z)\partial z}{\sqrt{2az-z^2}}$, и $\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\partial z}{2az-z^2} = \frac{\partial z}{z(2a-z)}$; потомЪ разрѣши сiю послѣднюю дробь на дроби простыя $\frac{1}{2a}\frac{\partial z}{z}+\frac{1}{2a}\frac{\partial z}{2a-z}$, и получишь $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}} =$
$= \frac{1}{2a}\log.z - \frac{1}{2a}\log.(2a-z)+c' = \frac{1}{2a}\log.\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+c'$ =

$\frac{1}{2a}\log.\frac{x^2}{(a+\sqrt{a^2-x^2})^2}+c'=\frac{1}{a}\log.\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+c'$, которое выраженіе отъ преднайденнаго $\frac{1}{a}\log.\frac{x}{a(a+\sqrt{a^2-x^2})}+c=\frac{1}{a}\log.\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ $+\frac{1}{a}\log.\frac{1}{a}+c$ разнствуетъ токмо постояннымъ количествомъ $\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}$, что послѣ изъясненнаго въ 114 и 116 членахъ не должно уже страннымъ показаться.

Такъ же въ формулѣ $\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ положи $\sqrt{a^2+x^2}=z-a$, будетъ $x=\sqrt{z^2-2az}$, $\partial x=\frac{(z-a)\partial z}{\sqrt{z^2-2az}}$ и $\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\partial z}{z(z-2a)}$ $=-\frac{1}{2a}\frac{\partial z}{z}+\frac{1}{2a}\frac{\partial z}{z-2a}$; откуда выдетъ $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{2a}\log.\frac{z-2a}{z}$ $+c'=\frac{1}{2a}\log.\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a}+c'=\frac{1}{2a}\log.\frac{x^2}{(\sqrt{a^2+x^2}+a)^2}+c'=$ $\frac{1}{a}\log.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}+a}+c'$, которое выраженіе отъ преднайденнаго $\frac{1}{a}\log.\frac{x}{a(a+\sqrt{a^2+x^2})}+c=\frac{1}{a}\log.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}+a}+\frac{1}{a}\log.\frac{1}{a}+c$ разнствуетъ токмо постояннымъ количествомъ $\frac{1}{a}\log.\frac{1}{a}$; что для различія способовъ употребляемыхъ при найденіи интеграла весьма часто случиться можетъ.

Послѣ сего небольшаго отступленія, обратимся къ остальнымъ формуламъ $\frac{x^n\partial x}{\sqrt{x^2\pm 2ax}}$, $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{ax-x^2}}$ и $\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x^2\pm 2ax}}$, которыхъ интегралы здѣсь мы найти себѣ предположили.

Для найденія интеграла $\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt{x^2\pm 2ax}}$ положи $x\pm a=z$, будетъ $x=z\mp a$, $\partial x=\partial z$, $\sqrt{x^2\pm 2ax}=\sqrt{z^2-a^2}$ и $\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt{x^2\pm 2ax}}$ $=\int\frac{(z\mp a)^n\partial z}{\sqrt{z^2-a^2}}$, которой интегралъ для цѣлаго и положительнаго

числа n опредѣлится по предъидущей формулѣ $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} =$

$\frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{n-1}{n} a^2 \int \frac{x^{n-2} \partial x}{\sqrt{a^2 \pm a^2}}$.

Чтобы найти интегралы формулъ $\frac{\partial x}{x^n \sqrt{2ax - x^2}}$ и $\frac{\partial x}{x^n \sqrt{x^2 \pm 2ax}}$, положи $x = \frac{a^2}{z}$, будетъ $\int \frac{\partial x}{x^n \sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a^{2n-1}} \int \frac{z^{n-1} \partial z}{\sqrt{2az - a^2}}$ и $\int \frac{\partial x}{x^n \sqrt{x^2 \pm 2ax}} = -\frac{1}{a^{2n-1}} \int \frac{z^{n-1} \partial z}{\sqrt{a^2 \pm 2az}}$, которые интегралы чрезъ преобразованіе употребленное въ 182 членѣ опредѣлятся точно, въ функціяхъ алгебраическихъ.

Естли теперь требуются интегралы слѣдующихъ формулъ $x^n \partial x \sqrt{a^2 - x^2}$, $x^n \partial x \sqrt{x^2 \pm a^2}$ и $x^n \partial x \sqrt{2ax - x^2}$, $x^n \partial x \sqrt{x^2 \pm 2ax}$, гдѣ n цѣлое положительное число; то первыя двѣ формулы умноживъ и раздѣливъ на $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, а другія двѣ на $\sqrt{2ax - x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm 2ax}$, будешь имѣть четыре выраженія $\frac{a^2 x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x^{n+2} \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\frac{x^{n+2} \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ $\pm \frac{a^2 x^n \partial x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $\frac{2ax^{n+1} \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{x^{n+2} \partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ и $\frac{x^{n+2} \partial x}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}$ $\pm \frac{2ax^{n+1} \partial x}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}$, состоящія изъ членовъ, коихъ интегралы найдутся по предложеннымъ предъ симъ формуламъ.

И посему еще найдутся интегралы слѣдующихъ двухъ формулъ $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{\pm a^2 \mp x^2} \pm \sqrt{\pm b^2 \mp x^2}}$, $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{\pm 2ax \mp x^2} \pm \sqrt{\pm 2bx \mp x^2}}$, ибо умноживъ числитель и знаменатель одной на $\sqrt{\pm a^2 \mp x^2} \mp \sqrt{\pm b^2 \mp x^2}$, а другой на $\sqrt{\pm 2ax \mp x^2} \mp \sqrt{\pm 2bx \mp x^2}$, обратишь ихъ въ видъ предъидущихъ формулъ $\frac{x^n \partial x \sqrt{\pm a^2 \mp x^2}}{\pm a^2 \mp b^2} \mp \frac{x^n \partial x \sqrt{\pm b^2 \mp x^2}}{\pm a^2 \mp b^2}$,

$$\frac{x^{n-1}\partial x\sqrt{\pm 2ax \mp x^2}}{2(\pm a \mp b)} \mp \frac{x^{n-1}\partial x\sqrt{\pm 2bx \mp x^2}}{2(\pm a \mp b)}.$$

НаконецЪ чтобы предложеннымЪ доселѣ формуламЪ придать большую всеобщность; разсмотримЪ еще слѣдующія формулы $\frac{x^n \partial x}{(e+fx \pm gx^2)^{\frac{s}{2}}}$, $x^n \partial x(e+fx \pm gx^2)^{\frac{s}{2}}$, $\frac{\partial x}{x^n(e+fx \pm gx^2)^{\frac{s}{2}}}$, $\frac{\partial x(e+fx \pm gx^2)^{\frac{s}{2}}}{x^n}$, гдѣ буква n какія ниесть цѣлыя положительныя, а s нечетныя цѣлыя положительныя числа означаетЪ.

ВЪ формулѣ $\frac{x^n \partial x}{(e+fx \pm gx^2)^{\frac{s}{2}}}$, преобразивЪ ее вЪ сей видЪ $\frac{1}{\sqrt{g^s}} \cdot \frac{x^n \partial x}{(\frac{e}{g} + \frac{fx}{g} \pm x^2)^{\frac{s}{2}}}$, положи для уничтоженія втораго вЪ знаменателѣ члена, $x = z \mp \frac{f}{2g}$; будешь имѣть $\partial x = \partial z$, $(\frac{e}{g} + \frac{fx}{g} \pm x^2)^{\frac{s}{2}} = (\pm z^2 + \frac{e}{g} \mp \frac{f^2}{4g^2})^{\frac{s}{2}}$ и $\frac{x^n \partial x}{(e+fx \pm gx^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial z(z \mp \frac{f}{2g})^n}{(\pm z^2 + \frac{4eg \mp f^2}{4g^2})^{\frac{s}{2}}}$, которая формула, положивЪ $\frac{4eg \pm f^2}{4g^2} = a^2$ и $\frac{f}{2g} = b$, преобразится вЪ случаѣ верьхняго знака вЪ $\frac{1}{\sqrt{g^s}} \cdot \frac{\partial z(z-b)^n}{(z^2+a^2)^{\frac{s}{2}}}$, когда $4eg > f^2$, или вЪ $\frac{1}{\sqrt{g^s}} \cdot \frac{\partial z(z-b)^n}{(z^2-a^2)^{\frac{s}{2}}}$, когда $4eg < f^2$, и вЪ случаѣ нижняго вЪ $\frac{1}{\sqrt{g^s}} \cdot \frac{\partial z(z+b)^n}{(\pm a^2 - z^2)^{\frac{s}{2}}}$. Откуда явствуетЪ, что все дѣло состоитЪ вЪ сысканіи интеграловЪ сихЪ двухЪ формулЪ $\frac{z^\mu \partial z}{(a^2-z^2)^{\frac{s}{2}}}$ и $\frac{z^\mu \partial z}{(z^2 \pm a^2)^{\frac{s}{2}}}$.

Естьли $\mu = 1$, то интегралы найдутся, какъ то очевидно, по главному правилу.

Естьли же $\mu = 0$, то положивъ $z = \frac{a^2}{u}$, оныя формулы преобразишь въ $-\frac{1}{a^{s-2}} \cdot \frac{u^{s-2}\partial u}{(u^2 - a^2)^{\frac{s}{2}}} = -\frac{1}{a^{s-2}} \cdot u^{s-2}\partial u (u^2 - a^2)^{-\frac{s}{2}}$, и

$-\frac{1}{a^{s-2}} \cdot \frac{u^{s-2}\partial u}{(a^2 + u^2)^{\frac{s}{2}}} = -\frac{1}{a^{s-2}} u^{s-2}\partial u (a^2 \pm u^2)^{-\frac{s}{2}}$, которыхъ формулъ, по причинѣ что s означаетъ нечетныя числа, интегралы найдутся такъ же по главному правилу (член. 182).

Напослѣдокъ пусть μ больше единицы, я представлю формулы $\frac{z^\mu \partial z}{(a^2 - z^2)^{\frac{s}{2}}}$ и $\frac{z^\mu \partial z}{(z^2 \pm a^2)^{\frac{s}{2}}}$ въ семъ видѣ $z^{\mu-1} \cdot \frac{z\partial z}{(a^2 - z^2)^{\frac{s}{2}}}$ и $z^{\mu-1} \frac{z\partial z}{(z^2 \pm a^2)^{\frac{s}{2}}}$ и возьму ихъ интегралы, полагая множитель $z^{\mu-1}$ постояннымъ, будетъ $\frac{-z^{\mu-1}(a^2 - z^2)^{1-\frac{s}{2}}}{2(1-\frac{s}{2})}$ и $\frac{z^{\mu-1}(z^2 \pm a^2)^{1-\frac{s}{2}}}{2(1-\frac{s}{2})}$; потомъ сихъ интеграловъ возьму .....и дифференціалы, полагая оба множителя перемѣнными, выдетъ

$$\partial\left(\frac{-z^{\mu-1}(a^2 - z^2)^{1-\frac{s}{2}}}{2(1-\frac{s}{2})}\right) = \frac{z^\mu\partial z}{(a^2 - z^2)^{\frac{s}{2}}} - \frac{(\mu-1)z^{\mu-2}\partial z}{2(1-\frac{s}{2})(a^2 - z^2)^{\frac{s}{2}-1}}$$

и $$\partial\left(\frac{z^{\mu-1}(z^2 \pm a^2)^{1-\frac{s}{2}}}{2(1-\frac{s}{2})}\right) = \frac{z^\mu\partial z}{(z^2 \pm a^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{(\mu-1)z^{\mu-2}\partial z}{2(1-\frac{s}{2})(z^2 \pm a^2)^{\frac{s}{2}-1}}$$

и отсюда $$\int\frac{z^\mu\partial z}{(a^2 - z^2)^{\frac{s}{2}}} = -\frac{z^{\mu-1}(a^2 - z^2)^{1-\frac{s}{2}}}{2(1-\frac{s}{2})}$$

$$+\frac{\mu-1}{2(1-\frac{s}{2})}\int\frac{z^{\mu-2}\partial z}{(a^2-z)^{\frac{s}{2}-1}}, \text{ и } \int\frac{z^{\mu}\partial z}{(z^2\pm a^2)^{\frac{s}{2}}}=$$

$$\frac{z^{\mu-1}(z^2+a^2)^{1-\frac{s}{2}}}{2(1-\frac{s}{2})}-\frac{\mu-1}{2(1-\frac{s}{2})}\int\frac{z^{\mu-2}\partial z}{(z^2\pm a^2)^{\frac{s}{2}-1}},$$ которые интегралы, поставляя вмѣсто s числа 3, 5, 7, и проч., чрезъ предъидущія формулы опредѣлятся по порядку, одинъ послѣ другаго.

И теперь прочія формулы не заключаютъ въ себѣ никакой уже трудности.

Такъ чтобы найти интегралъ второй формулы $x^n\partial x(e+fx\pm gx^2)^{\frac{s}{2}}$, умножъ и раздѣли ее на $(e+fx\pm gx^2)^{\frac{1}{2}}$; чрезъ что она преобразится въ $\frac{x^n\partial x(e+fx\pm gx^2)^{\frac{s+1}{2}}}{(e+fx\pm gx^2)^{\frac{1}{2}}}$, которой формулы интегралъ найдется по первой, полагая въ оной $s=1$, или лучше истребивъ въ количествѣ $e+fx\pm gx^2$ второй членъ, по формуламъ $\frac{z^{\mu}\partial z}{\sqrt{a^2-z^2}}$ и $\frac{z^{\mu}\partial z}{\sqrt{z^2\pm a^2}}$, предъ симъ разсмотрѣннымъ.

Потомъ для найденія интеграла третьей формулы $\frac{\partial x}{x^n(e+fx\pm gx^2)^{\frac{s}{2}}}$ стоитъ токмо положить $x=\frac{1}{z}$, и будетъ имѣть формулу $\frac{z^{n+s-2}\partial z}{(\pm g+fz+ez^2)^{\frac{s}{2}}}$, которая принадлежитъ къ первой.

Напослѣдокъ въ четвертой формулѣ $\frac{\partial x(e+fx+gx^2)^{\frac{s}{2}}}{x^n}$ надлежитъ умножить числитель и знаменатель на $(e+fx\pm gx^2)^{\frac{1}{2}}$, чтобы привести ее къ частному случаю третьей формулы.

б) Въ преобразованіяхъ весьма часто главное намѣреніе бываетъ въ томъ, чтобы достигнуть къ соизмѣримымъ функціямъ, на тотъ конецъ чтобы съ большею удобностію найти интегралы предложенныхъ дифференціаловъ.

Такъ чтобы найти интегралы формулъ $x^n\partial x\sqrt{2ax \pm x^2}$, $\frac{x^n\partial x}{\sqrt{2ax \pm x^2}}$, у коихъ n цѣлое положительное или отрицательное число, я положу $\sqrt{2ax \pm x^2} = xz$, и получу $x = \frac{2a}{z^2 \mp 1}$, $\partial x = -\frac{4az\partial z}{(z^2 \mp 1)^2}$, $\sqrt{2ax \pm x^2} = \frac{2az}{z^2 \mp 1}$ и $x^n = \frac{(2a)^n}{(z^2 \mp 1)^n}$; чрезъ что наши формулы $x^n\partial x\sqrt{2ax \pm x^2}$, $\frac{x^n\partial x}{\sqrt{2ax \pm x^2}}$ преобразятся въ соизмѣримыя $-\frac{8a^2(2a)^n z^n\partial z}{(z^2 \mp 1)^{n+3}}$, $-2\frac{(2a)^n\partial z}{(z^2 \mp 1)^{n+1}}$, и дѣло будетъ состоять въ найденіи интеграловъ оныхъ соизмѣримыхъ формулъ.

Пусть еще требуется найти интегралы формулъ $x^n\partial x\sqrt{x^2+ax+b^2}$, $\frac{x^n\partial x}{\sqrt{x^2+ax+b^2}}$, гдѣ n цѣлое положительное или отрицательное число; положи $\sqrt{x^2+ax+b^2} = x+z$, и получишь $x = \frac{b^2-z^2}{2z-a}$, $\partial x = \frac{-2z^2\partial z+2az\partial z-2b^2\partial z}{(2z-a)^2}$, $\sqrt{x^2+ax+b^2} = \frac{b^2-z^2}{2z-a}+z = \frac{b^2+z^2-az}{2z-a}$ и $x^n = \frac{(b^2-z^2)^n}{(2z-a)^n}$; чрезъ что наши формулы преобразятся въ соизмѣримыя $-\frac{2(b^2+z^2-az)^2(b^2-z^2)^n\partial z}{(2z-a)^{n+3}}$, $-2.\frac{(b^2-z^2)^n\partial z}{(2z-a)^{n+1}}$, и дѣло будетъ состоять въ найденіи интеграловъ оныхъ соизмѣримыхъ формулъ.

Итакъ не умножая болѣе примѣровъ, явствуетъ, что здѣсь все дѣло состоитъ въ сысканіи интеграловъ дробныхъ соизмѣримыхъ дифференціальныхъ функцій, ибо въ разсужденіи цѣлыхъ, которыхъ интегралы, по

надлежащемъ сихъ функцій разложеніи, опредѣляются по главному правилу, нѣтъ никакой уже трудности. И такимъ образомъ приступимъ къ дробнымъ дифференціальнымъ функціямъ.

Требуется интегралъ дроби $\frac{\partial x}{f+gx}$; положи $f+gx=z$, и будетъ $\partial x=\frac{\partial z}{g}$ и $\int\frac{\partial x}{f+gx}=\frac{1}{g}\int\frac{\partial z}{z}=\frac{1}{g}\log. z+c=\frac{1}{g}\log.(f+gx)+c$, какъ уже извѣстно.

Сыскать интегралъ дроби $\frac{x^m\partial x}{(f+gx)^n}$; положи $f+gx=z$, будетъ $\partial x=\frac{\partial z}{g}$, $x^m=\frac{(z-f)^m}{g^m}$ и $\int\frac{x^m\partial x}{(f+gx)^n}=$ $\frac{1}{g^{n+1}}\int\frac{\partial z(z-f)^m}{z^n}$, которой интегралъ, по разложеніи функціи $\frac{(z-f)^m}{z^n}$, сыщется по главному правилу.

Требуется интегралъ дроби $\frac{(a+bx)\partial x}{e+fx+gx^2}$; положи $x=z-\frac{f}{2g}$, будетъ $\partial x=\partial z$, $a+bx=\frac{2ag-bf}{2g}+bz$, $e+fx+gx^2=e-\frac{f^2}{4g}+gz^2$, и $\frac{(a+bx)\partial x}{e+fx+gx^2}=(\frac{2ag-bf}{2g}+bz)\partial z : e-\frac{f^2}{4g}+gz^2=\frac{bz\partial z}{e-\frac{f^2}{4g}+gz^2}$ $+\frac{2ag-bf}{2g}.\frac{\partial z}{e-\frac{f^2}{4g}+gz^2}$; откуда выдетъ $\int\frac{(a+bx)\partial x}{e+fx+gx^2}=$

$$\frac{b}{2g}\int\frac{2gz\partial z}{e-\frac{f^2}{4g}+gz^2}+\frac{2ag-bf}{2g}\int\frac{\partial z}{e-\frac{f^2}{4g}+gz^2}=$$

$\frac{b}{2g}\log.(e-\frac{f^2}{4g}+gz^2)+\frac{2ag-bf}{g}\int\frac{2g\partial z}{4eg-f^2+4g^2z^2}$. Чтобы найти интегралъ другой части положи $2gz=u\sqrt{4eg-f^2}$, и будетъ имѣть $z=\frac{u\sqrt{4eg-f^2}}{2g}$, $\frac{2ag-bf}{g}\int\frac{2g\partial z}{4eg-f^2+4g^2z^2}=\frac{2ag-bf}{g\sqrt{4eg-f^2}}\int\frac{\partial u}{1+u^2}=$ $\frac{2ag-bf}{g\sqrt{4eg-f^2}}\text{A tang.}\, u=\frac{2ag-bf}{g\sqrt{4eg-f^2}}\text{A tang.}\frac{2gz}{\sqrt{4eg-f^2}}$, и наконецъ $\int\frac{(a+bx)\partial x}{e+fx+gx^2}=\frac{b}{2g}\log.(e-\frac{f^2}{4g}+gz^2)+\frac{2ag-bf}{g\sqrt{4eg-f^2}}\text{Atang.}\frac{2gz}{\sqrt{4eg-f^2}}$ $+c=\frac{b}{2g}\log.(e+fx+gx^2)+\frac{2ag-bf}{g\sqrt{4eg-f^2}}\text{A tang.}\frac{f+2gx}{\sqrt{4eg-f^2}}+c.$

Естьли $a = 0$, то $\int \frac{b x \partial x}{e + f x + g x^2} = \frac{b}{2g} \log. (e + f x + g x^2)$
$- \frac{b f}{g\sqrt{4e - f^2}} \text{A tang.} \frac{f + 2 g x}{\sqrt{4 e g - f^2}} + C$;
естьли $b = 0$, то $\int \frac{a \partial x}{e + f x + g x^2} = \frac{2 a}{\sqrt{4 e g - f^2}} \text{A tang.} \frac{f + 2 g x}{\sqrt{4 e g - f^2}} + C$;
естьли $a = 0$ и $f = 0$, то $\int \frac{b x \partial x}{e + g x^2} = \frac{b}{2g} \log. (e + g x^2) + c$; наконецЪ естьли только $f = 0$, то $\int \frac{a \partial x + b x \partial x}{e + g x^2} = \frac{b}{2g} \log. (e + g x^2) + \frac{a}{\sqrt{e g}} \text{A tang.} \frac{g x}{\sqrt{e g}} + C$.

Сыскать интегралЪ дроби $\frac{x^m \partial x}{(e + f x + g x^2)^n}$; положи $x = z - \frac{f}{2g}$, и будетЪ имѣть $\partial x = \partial z$, $x^m = \left(z - \frac{f}{2 g}\right)^m$, $(e + f x + g x^2)^n =$ $(e - \frac{f^2}{4g} + g z^2)^n = g^n (\frac{4 e g - f^2}{4 g^2} + z^2)^n$; откуда означивЪ $\frac{f}{2g}$ чрезЪ p и $\frac{4 e g - f^2}{4 g^2}$ чрезЪ q^2, выдетЪ $\int \frac{x^m \partial x}{(e + f x + g x^2)^n} = \frac{1}{g^n} \int \frac{(z - p)^m \partial z}{(z^2 + q^2)^n}$.

И такЪ, поелику количество $(z - p)^m$ не можетЪ состоять какЪ изЪ членовЪ сего вида $K z^\mu$, вопросЪ обращается вЪ сыскание интеграла сея формулы $\frac{z^\mu \partial z}{(z^2 + q^2)^n}$. На сей конецЪ положи $z^2 + q^2 = u^2$, будетЪ $z = \sqrt{u^2 - q^2}$, $\partial z = \frac{u \partial u}{\sqrt{u^2 - q^2}}$ и $\int \frac{z^\mu \partial z}{(z^2 + q^2)^n} =$
$\int \frac{(u^2 - q^2)^{\frac{\mu - 1}{2}}}{u^{2n - 1}}$; потомЪ положи $u = \frac{q^2}{v}$, выдетЪ $\partial u = -\frac{q^2 \partial v}{v^2}$,
$(u^2 - q^2)^{\frac{\mu - 1}{2}} = \frac{q^{\mu - 1}(q^2 - v^2)^{\frac{\mu - 1}{2}}}{v^{\mu - 1}}$ и $\int \frac{z^\mu \partial z}{(z^2 + q^2)^n} =$
$$\int \frac{(u^2 - q^2)^{\frac{\mu - 1}{2}} \partial u}{u^{2n - 1}} = - \frac{1}{q^{4n - \mu - 3}} \int v^{2n - \mu - 2} \partial v \, (q^2 - v^2)^{\frac{\mu - 1}{2}}.$$
Естьли μ нечетное число, то послѣдний интегралЪ по разложении количества $(q^2 - v^2)^{\frac{\mu - 1}{2}}$ на опредѣленное число членовЪ, сыщется по главному правилу.

Естьли же μ чешное число, шо оный иншегралЪ найдешся по формулѣ $\int x^n \partial x \sqrt{a^2 - x^2}$.

НаконецЪ естьли $\mu = 0$, шо иншегралЪ опредѣлишся по формулѣ $\frac{x^n \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

ПослѢ сихЪ вопросовЪ всякой уже соизмѣримой дифференціальной дроби иншегралЪ найши можно будешЪ: сшоишЪ шокмо по ошдѣлении цѣлыхЪ, оную дробь разрѣшишь на дроби просшыя, кошорыя не могушЪ имѣшь инаго вида кромѣ разсмошренныхЪ нами вЪ оныхЪ вопросахЪ.

НапримѣрЪ пусшь шребуешся найши иншегралЪ дроби $\frac{x^4 \partial x}{x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b}$; ошдѣливЪ цѣлыя и получивЪ $x \partial x - b \partial x + \frac{(a^2 + b^2)x^2 \partial x - a^2 b^2 \partial x}{x^3 + bx^2 - a^2x - a^2 b}$, разрѣши знаменашель на множишели $x + a$, $x - a$, $x + b$ и положи $\frac{-a^2 b^2 + (a^2 + b^2)x^2}{x^3 + bx^2 - a^2x - a^2 b} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x - a} + \frac{C}{x + b}$; ошкуда найдешся $A = \frac{a^3}{2(a - b)}$, $B = \frac{a^3}{2(a + b)}$, $C = -\frac{b^4}{a^2 - b^2}$ и $\int \frac{x^4 \partial x}{x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b} = \int x \partial x - \int b \partial x + \frac{a^3}{2(a - b)} \int \frac{\partial x}{x + a} + \frac{a^3}{2(a + b)} \int \frac{\partial x}{x - a} - \frac{b^4}{a^2 - b^2} \int \frac{\partial x}{x + b} = \frac{x^2}{2} - bx + \frac{a^3}{2(a - b)} \log (x + a) + \frac{a^3}{2(a + b)} \log. (x - a) - \frac{b^4}{a^2 - b^2} \log (x + b) + c$.

Пусшь еще шребуешся найши иншегралЪ слѣдующей соизмѣримой дроби $\frac{\partial x}{x^2(1 - x + x^2 - x^3)}$; разрѣши дробь $\frac{1}{x^2(1 - x + x^2 - x^3)}$ на дроби просшыя, положивЪ $\frac{1}{x^2(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{1 - x} + \frac{D + Ex}{1 + x^2}$, и будешь имѣшь $A = 1$, $B = 1$, $C = \frac{1}{2}$, $D = E = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial x}{x^2(1 - x + x^2 - x^3)} = \frac{\partial x}{x^2} + \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial x}{2(1 - x)} - \frac{\partial x + x \partial x}{2(1 + x^2)}$ и $\int \frac{\partial x}{x^2(1 - x + x^2 - x^3)} = -\frac{1}{x} + \log x - \frac{1}{2} \log. (1 - x) - \frac{1}{4} \log. (1 + x^2) - \frac{1}{2} A \operatorname{tang}. x + c = -\frac{1}{x} + \log. \frac{x}{\sqrt[4]{(1 + x^2)(1 - x)^2}} - \frac{1}{2} A \operatorname{tang}. x + c$.

7) За недосшашкомЪ шочныхЪ способовЪ опредѣляшь иншегралы дифференціальныхЪ функцій, сЪ пользою упошребляешся приближеніе, основанное на совершаемомЪ, или чрезЪ Нюшонову биному, или чрезЪ способЪ неопредѣленныхЪ предсшоящихЪ, или чрезЪ Тейлорову ѳеорему, разложеніи шѣхЪ функцій вЪ безконечные ряды.

Пусшь шребуешся найши по приближенію иншегралЪ формулы $\partial y = \frac{\pm \partial x}{a \pm x}$; разложи дробь $\frac{1}{a \pm x}$, по кошорому нибудь изЪ упомянушыхЪ способовЪ, вЪ безконечной рядЪ $\frac{1}{a} \mp \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} \mp \frac{x^3}{a^4} +$ и проч., будешь имѣшь $\partial y = \pm \frac{\partial x}{a} - \frac{x \partial x}{a^2} \pm \frac{x^2 \partial x}{a^3} - \frac{x^3 \partial x}{a^4} \pm$ и проч., и пошомЪ $y = \pm \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{a^4} \pm$ и проч. $+ c$.

Пусть $a = 1$, будетъ $y = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ и проч., полагая что $y = 0$, когда $x = 0$; и какъ для уравненія $\partial y = \frac{\pm \partial x}{1 \pm x}$, въ томъ же положеніи, $y = \log.(1 \pm x)$, то выдетъ $\log.(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ и проч. Откуда удобно произведешь формулу $\log.\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} +$ и проч., которая найдена въ членѣ 164мъ инымъ образомъ.

Пусть еще дано $\partial y = \frac{\partial x}{1+x^2}$; положи $\int \frac{\partial x}{1+x^2} = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 +$ и проч., гдѣ нѣтъ ни единаго постояннаго члена, потому что полагается интегралъ изтребляющийся, когда $x = 0$; потомъ возьми дифференціалы, и будешь имѣть, раздѣливъ произшедшее на ∂x,

$\frac{1}{1+x^2} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + 7Gx^6 +$ и проч.,
или

$$\left.\begin{array}{l} A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + 7Gx^6 + \text{и проч.} \\ -1 \quad\quad + A. \quad + 2B. \quad + 3C. \quad + 4D. \quad + 5E. \end{array}\right\} = 0.$$

откуда выдетъ $A = 1$, $B = 0$, $3C + A = 0$, или $C = -\frac{1}{3}$, $D = 0$, $5E + 3C = 0$ или $E = \frac{1}{5}$, $F = 0$, $7G + 5E = 0$ или $G = -\frac{1}{7}$, и проч.; почему

$y = \int \frac{\partial x}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ и проч., что есть рядъ найденный выше другимъ образомъ.

Дано уравненіе $\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$, въ которомъ x синусъ дуги круга u, требуется опредѣлить оную дугу u; будетъ по причинѣ что $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3.x^4}{2.4} + \frac{3.5.x^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7.x^8}{2.4.6.8} +$ и проч., $u = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3.x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} +$ и проч., понеже $x = 0$ долженствуетъ дать и $u = 0$. Сей рядъ столико приближающійся, что довольно взять десять первыхъ его членовъ, дабы получить весьма приближенное содержаніе окружности круга къ радіусу, и есть тотъ же самый, который найденъ въ концѣ 164 члена.

Не умножая болѣе примѣровъ, которые послѣ предложеннаго выше о разложеніи функцій въ ряды, никакой трудности въ себѣ не заключаютъ, окончимъ сію статью нашихъ присовокупленій показаніемъ, какимъ образомъ интегральное изчисленіе можетъ вести къ Тейлоровой теоремѣ; къ сему главному орудію, посредствомъ коего разложеніе въ безконечной рядъ всякой функціи совершается.

Пусть дано $y = X\partial x$, гдѣ X функція количества x, и слѣдовательно функція такъ же всякаго отъ x зависящаго изображенія; будетъ по правилу, въ третьей статьѣ сихъ присовокупленій предложенному, $y = \int X\partial x = Xx - \int x\partial X$.

Положимъ, что разность Δx есть постоянна; умножая и раздѣляя $x\partial X$ на ∂x, мы имѣемъ $\int x\partial X = \int x\partial x.\frac{\partial X}{\partial x}$, гдѣ $\frac{\partial X}{\partial x}$ изображаетъ функцію простую, означенную въ упомянутой статьѣ чрезъ u, а $x\partial x$ дифференціалъ означенный тамо чрезъ ∂t; почему для того же правила будетъ $\int x\partial X = \int x\partial x.\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{x^2}{2}.\frac{\partial X}{\partial x} - \int\frac{x^2}{2}\partial\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)$; равнымъ образомъ

будетъ $\int\frac{x^2}{2}\partial\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \int\frac{x^2\partial x}{2}.\frac{\partial\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)}{\partial x} = \int\frac{x^2\partial x}{2}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{x^3}{2.3}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \int\frac{x^3}{2.3}\partial\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)$; $\int\frac{x^3}{2.3}\partial\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) = \int\frac{x^3\partial x}{2.3}.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \frac{x^4}{2.3.4}\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \int\frac{x^4}{2.3.4}.\partial\left(\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right)$; $\int\frac{x^4}{2.3.4}.\partial\left(\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right) = \int\frac{x^4\partial x}{2.3.4}.\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = \frac{x^5}{2.3.4.5}.\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \int\frac{x^5}{2.3.4.5}\partial\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right)$, и такъ далѣе.

Сіи найденныя величины поставляя вмѣсто $\int x\partial X$, $\int\frac{x^2}{2}\partial\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)$, $\int\frac{x^3}{2.3}.\partial\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)$, и проч., преобразимъ уравненіе $y = Xx - \int x\partial X$ въ слѣдующій видъ

$$y = xX - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{x^3}{2.3}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{x^4}{2.3.4}.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{x^5}{2.3.4.5}.\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \text{и проч.} + h,$$

гдѣ h постоянное количество, въ которое y обращается, когда $x = 0$.

Оный рядъ совершенно тотъ же, что и найденный въ 16мъ членѣ изъ второй формулы, ибо по причинѣ $\partial y = X\partial x$ поставивъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ вмѣсто X, будетъ имѣть

$$y = h + x\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{x^3}{2.3}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{x^4}{2.3.4}.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{x^5}{2.3.4.5}.\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{и проч.}$$

И такимъ образомъ чрезъ посредство интегральнаго изчисленія доказана ѳеорема, къ коей Тейлоръ достигъ чрезъ изчисленіе дифференціальное. За сіе доказательство мы обязаны Іоанну Бернуллію, который сверьхъ того предложилъ еще другую того же рода ѳеорему заключающуюся въ ряду

$$y = \frac{X^2}{2}.\frac{\partial x}{\partial X} - \frac{X^3}{2.3}.\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + \frac{X^4}{2.3.4}.\frac{\partial^3 x}{\partial X^3} - \frac{X^5}{2.3.4.5}.\frac{\partial^4 x}{\partial X^4} + \text{и проч.};$$

въ оной ѳеоремѣ достиженіе совершенно тоже, съ тою токмо отмѣною, что вмѣсто разности Δx, надлежитъ принять за постоянную разность ΔX.

8) Доселѣ мы разсматривали дифференціальныя формулы, съ одною перемѣнною величиною, токмо перваго порядка; теперь приступимъ къ разсматриванію таковыхъ дифференціальныхъ формулъ всякаго порядка, ограничивъ себя общими правилами, по коимъ берутся ихъ интегралы.

Поелику все дѣло здѣсь состоитъ въ поступленіи, чрезъ попеременное взятіе интеграла, отъ дифференціальной формулы какого нибудь порядка и къ формулѣ непосредственно нижшаго порядка $n-1$, потомъ

отъ формулы порядка $n - 1$ къ формулѣ порядка $n - 2$, и такъ далѣе, пока достигнешь къ выраженію состоящему изъ величинъ конечныхъ; то явствуетъ, что сія статья интегральнаго изчисленія должна быть основана на тѣхъ же правилахъ, кои предъ симъ мы изъяснили; между тѣмъ, поелику составляетъ предметъ особенный, она требуетъ нѣкоторыхъ новыхъ приемовъ, которые здѣсь мы и изложимъ.

Вопервыхъ, естьли возмешь дифференціалъ дифференціальной формулы перваго порядка $M\partial x$, гдѣ M есть функція количества x, то получишь $M\partial^2 x + \partial M \partial x$, или $M\partial^2 x + N\partial x^2$, положивъ $\partial M = N\partial x$; посему и обратно, естьли предложено будетъ взять интегралъ или привести къ первому порядку формулу втораго $P\partial^2 x + Q\partial x^2$, то сія формула будетъ интегралъ приемлющая и $P\partial x$ оный ея интегралъ, всякой разъ, когда функціи P и Q количества x будутъ такого свойства, что $\partial P = Q\partial x$ или $Q = \frac{\partial P}{\partial x}$. Естьли сіе условіе не имѣетъ мѣста, то формула будетъ интеграла неприемлющая.

Напримѣръ пусть дано будетъ $(a + 2bx + 3cx^2)\partial^2 x + (2b + 6cx)\partial x^2$; въ семъ случаѣ $P = a + 2bx + 3cx^2$, $\partial P = 2b\partial x + 6cx\partial x$ и $Q = 2b + 6cx = \frac{\partial P}{\partial x}$, и посему сія формула есть интегралъ приемлющая и оный интегралъ равенъ $(a + 2bx + 3cx^2)\partial x$.

Потомъ, естьли возьмешь дифференціалъ формулы втораго порядка $P\partial^2 x + Q\partial x^2$, то получишь формулу третьяго порядка $P\partial^3 x + \partial P\partial^2 x + \partial Q\partial x^2 + 2Q\partial x\partial^2 x$, или $P\partial^3 x + (\partial P + 2Q\partial x)\partial^2 x + \partial Q\partial x^2$; откуда слѣдуетъ, что естьли предложено будетъ найти интегралъ дифференціальной формулы третьяго порядка $F\partial^3 x + G\partial x\partial^2 x + H\partial x^3$, то оная будетъ интегралъ пріемлющая и сей интегралъ есть $P\partial^2 x + Q\partial x^2$, когда положивъ $P = F$, имѣешь $G = \frac{\partial F}{\partial x} + 2Q$ или $Q = \frac{G}{2} - \frac{\partial F}{2\partial x}$, и $H\partial x = \partial Q$. Когда же сіи условія мѣста не имѣютъ, то предложенная формула будетъ интеграла непріемлющая.

Къ чему присовокупить еще надлежитъ, что хотя формула третьяго порядка чрезъ взятіе интеграла и приведена будетъ къ формулѣ втораго, однако сія послѣдняя не можетъ быть приведена къ формулѣ перваго порядка, буде условію предъ симъ упомянутому, во всей точности не удовлетворяетъ.

Напримѣръ пусть дана будетъ формула $ax^3\partial^3 x + (3ax^2 + 2bx^2)\partial x\partial^2 x + 2bx\partial x^3$; положимъ, что интегралъ ея, буде оный имѣется, есть $P\partial^2 x + Q\partial x^2$; мы здѣсь имѣемъ $F = ax^3$, $G = 3ax^2 + 2bx^2$, $H = 2bx$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 3ax^2$, и потому, положивъ $P = F = ax^3$, $Q = \frac{G}{2} - \frac{\partial F}{2\partial x} = \frac{3ax^2 + 2bx^2}{2} - \frac{3ax^2}{2} = bx^2$, будетъ $H\partial x = \partial Q$. Слѣдовательно предложенная фор

мула есть дѣйствительно интегралъ прїемлющая и оный равенъ $a\,x^3\,\partial^2 x + bx^2\partial\,x^2$. Но между тѣмъ сей интегралъ не можетъ быть приведенъ къ формулѣ перваго порядка, ибо для сего надлежитъ, чтобы было $\frac{\partial.(ax^3)}{\partial x} = b\,x^2$; что невозможно.

Послѣ сего весьма удобно можно тѣже правила разпространить и къ формуламъ слѣдующихъ порядковъ, и мы въ сїи безполезныя подробности не входимъ. Но замѣтимъ токмо, что вычисленїя о коихъ настоитъ слово, гораздо облегчаются и перемѣняютъ даже нѣкоторымъ образомъ видъ свой, когда какой нибудь изъ дифференцїаловъ возмется за постоянное количество.

Въ самомъ дѣлѣ, естьли беря дифференцїалъ формулы $M\partial x$, примемъ ∂x за постоянное количество, то будемъ имѣть просто $\partial M\partial x$, или $N\partial x^2$, когда положимъ $\partial M = N\partial x$. Посему, естьли въ семъ положенїи, которое для постояннаго количества ∂x даетъ $\partial^2 x = 0$, предлагается найти интегралъ формулы втораго порядка $P\,\partial\,x^2$; то приведенїе ея къ первому всегда мѣсто имѣть будетъ, какая бы ни была функцїя P количества x; ибо вмѣсто ∂x поставивъ какую нибудь постоянную величину a, будешь имѣть $aP\partial x$, которой формулы интегралъ есть $a\int P\partial x$ или $\partial x\int P\partial x$, когда вмѣсто a опять поставишь ∂x. Къ сему интегралу надлежитъ присовокуплять постоянную величину $c\partial x$, состоящую изъ произведенїя обыкновеннаго постояннаго количества c на постоянной дифференцїалъ, дабы присовокупленный членъ $c\partial x$ былъ того же порядка, что и $\partial x\int P\,\partial x$.

Естьли требуется найти интегралъ формулы $P\partial x^3$, гдѣ ∂x постоянно же, то оный будетъ сперьва $\partial x^2\int P\partial x + c\partial x^2$; потомъ по взятїи еще интеграла, выдетъ $\partial x\int\partial x\int P\partial x + cx\,\partial x + c'\partial x$; что есть уже формула перваго порядка.

Вообще интегралъ формулы $P\partial x^n$, гдѣ ∂x постоянно и n какое нибудь цѣлое положительное число, получается попеременно, и оная приводится къ первому порядку безъ всякаго условїя для функцїи P.

Ежели беря дифференцїалъ формулы втораго порядка $P\partial^2 x + Q\partial x^2$, гдѣ ∂x не можетъ уже быть принято за постоянное, по причинѣ что тутъ содержится $\partial^2 x$, примемъ за постоянное $\partial^2 x$; то будемъ имѣть $\partial P\partial^2 x + \partial Q\partial x^2 + 2Q\partial x\partial^2 x$ или $\partial Q\partial x^2 + (\partial P + 2Q\partial x)\partial^2 x$. Откуда слѣдуетъ, что всякое выраженїе вида $H\partial x^3 + G\partial x\partial^2 x$, въ которомъ $\partial^2 x$ приемлется за постоянное, можетъ быть приведено къ формулѣ втораго порядка, и интегралъ онаго $P\partial^2 x + Q\partial x^2$ найдется, положивъ $G\partial x = \partial P + 2Q\partial x$, $\partial Q = H\partial x$ Ибо сїи два положенїя даютъ два уравненїя $Q = \int H\partial x$, $P = \int G\partial x - 2\int Q\partial x = \int G\partial x - 2\int\partial x\int H\partial x$, кои показываютъ,

что функціи P и Q всегда могутЪ быть опредѣлены безЪ посредства какого либо условнаго уравненія между G и H.

9) Послѣ всѣхЪ сихЪ подробностей относящихся кЪ дифференціальнымЪ формуламЪ сЪ однимЪ перемѣннымЪ количествомЪ, остается разсмотрѣть таковыя формулы со многими перемѣнными. Мы начнемЪ тѣми изЪ сихЪ послѣднихЪ формулЪ, кои означаются подЪ именемЪ формулЪ перваго порядка.

Поелику при взятіи дифференціала функціи со многими перемѣнными количествами x, y, z, и проч. дѣйствіе производится перемѣняя попеременно одно изЪ сихЪ количествЪ, и предполагая прочія постоянными; то и обратно при взятіи интеграла дифференціальной формулы со многими перемѣнными, надлежитЪ положить попеременно одно изЪ перемѣнныхЪ постояннымЪ и вЪ семЪ предположеніи взять интегралЪ фармулы; сіе дастЪ столько интеграловЪ, сколько имѣется перемѣнныхЪ, и всѣ оныя интегралы надлежащимЪ образомЪ дополненные, долженствуютЪ быть равны между собою, буде предложенная формула есть дѣйствительно интегралЪ пріемлющая. Но ежели оное равенство мѣста не имѣетЪ, то не имѣется и интеграла, и формула есть навѣрное не пріемлющая онаго.

ТутЪ можно поступить еще и инымЪ образомЪ, ведущимЪ кЪ тому же заключенію: по взятіи полнаго интеграла вЪ разсужденіи однаго перемѣннаго количества, возьми онаго дифференціалЪ вЪ разсужденіи всѣхЪ перемѣнныхЪ количествЪ, и естьли сей дифференціалЪ будетЪ равенЪ предложенной формулѣ, то тотЪ интегралЪ будетЪ искомой; естьли же не равенЪ, то предложенная формула будетЪ интеграла непріемлющая, или кЪ найденному интегралу будетЪ не доставать нѣкоего количества, которое должно найтися, беря интегралЪ остатка отЪ предложенной формулы вЪ разсужденіи другаго перемѣннаго количества. Слѣдующіе примѣры пояснятЪ сіи способы.

Дана формула $y\partial x + x\partial y$, сыскать ея интегралЪ; я беру интегралЪ, полагая y постояннымЪ, и слѣдственно $\partial y = o$, и получаю yx, потомЪ беру интегралЪ, полагая x постояннымЪ, и имѣю xy; и какЪ сіи интегралы равны между собою, то изЪ того заключаю, что интегралЪ предложенной формулы дѣйствительно есть xy.

Или, нашедЪ первой интегралЪ yx, я беру онаго дефференціалЪ, полагая x и y перемѣнными, и нахожу $y\partial x + x\partial y$; что равно предложенной формулѣ, и изЪ того заключаю, что xy есть интегралЪ ея.

Естьли предложится формула $y\partial x - x\partial y$, то увидишь тѣмъ и другимъ образомъ, что она есть интеграла неприемлющая, и совсѣмъ не можетъ быть представляема происходящею чрезъ взятіе дефференціала какого либо конечнаго выраженія.

Пусть дана будетъ формула $ay^2\partial x + 2axy\partial y$; я беру интегралъ, полагая y постояннымъ, и слѣдственно $\partial y = 0$, и получаю ay^2x; потомъ беру интегралъ, полагая x постояннымъ, и получаю тоже выраженіе ay^2x; изъ чего заключаю, что оное есть истинный интегралъ предложенной формулы.

Пусть дана будетъ формула $3x^2y\partial x + x^3\partial y + 5xy^4\partial y + y^5\partial x$; отдѣливъ два члена $3x^2y\partial x + y^5\partial x$, содержащіе въ себѣ ∂x, я беру ихъ интегралъ, полагая y постояннымъ, и нахожу $x^3y + y^5x$; потомъ взявъ сего количества дифференціалъ, полагая x и y перемѣнными, получаю предложенную формулу; изъ того и заключаю, что $x^3y + y^5x$ есть искомой интегралъ.

Пусть дана будетъ формула $2y^2x\partial x + 2x^2y\partial y + 3ax^2\partial x$; взявъ интегралъ въ разсужденіи x, я имѣю $y^2x^2 + ax^3$, и въ разсужденіи y, получаю x^2y^2: Сіи два интеграла не равны между собою, однако заключать еще не должно, чтобы предложенная формула была неприемлющая интеграла. Ибо, когда при взятіи втораго интеграла количество x полагалося постояннымъ, то явствуетъ, что для полученія полнаго интеграла, надлежитъ къ x^2y^2 присовокупить нѣкую функцію X количества x; и тогда будетъ очный интегралъ $y^2x^2 + X$, которой сдѣлается равенъ первому, положивъ $X = ax^3$. Или, взявъ интеграла $y^2x^2 + X$ дифференціалъ и сравнивъ съ предложеннымъ, найдешь $\partial X = 3ax^2\partial x$, и $X = ax^3$.

Требуется найти интегралъ формулы $2ayx\partial x + ax^2\partial y + \frac{bx\partial x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{by\partial y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Для взятія интеграла въ разсужденіи x, я беру два члена предложенной формулы, которые содержатъ въ себѣ ∂x; первой $2ayx\partial x$, которой имѣетъ интеграломъ ayx^2, и другой $\frac{bx\partial x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, котораго интегралъ есть $b\sqrt{x^2+y^2}$; потомъ совокупляю сіи интегралы, и получаю $ayx^2 + b\sqrt{x^2+y^2}$.

Такъ же для взятія интеграла въ разсужденіи y, я беру два члена предложенной формулы, которые содержатъ въ себѣ ∂y, и получаю совокупленной ихъ интегралъ $ax^2y + b\sqrt{x^2+y^2}$; оный, по причинѣ что равенъ первому, и будетъ искомой интегралъ.

Или, нашедъ первой интегралъ $ayx^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, я беру его дифференціалъ, и получивъ предложенную формулу, изъ того заключаю, что оный есть истинной искомой интегралъ.

Пусть требуется найти интегралъ формулы съ тремя перемѣнными количествами $3ax^2y^2z\partial x + 2ax^3zy\partial y + ax^3y^2\partial z$.

Я беру интегралъ, полагая токмо x перемѣннымъ, или $\partial y = 0$ и $\partial z = 0$; чрезъ что останется одинъ токмо членъ $3ax^2y^2z\partial x$, которой имѣетъ интеграломъ количество ax^3y^2z. И какъ къ тому же заключенію достигнешь, беря интегралъ въ разсужденіи y и въ разсужденіи z, то оное количество ax^3y^2z и есть истинной искомой интегралъ.

Пусть еще требуется найти интегралъ формулы $x^3\partial y + 3x^2y\partial x + x^2\partial z + 2xz\partial x + x\partial x + y^2\partial y$.

Отдѣливъ члены содержащіе въ себѣ ∂x, и взявъ ихъ интегралъ, полагая y и z постоянными, я имѣю $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$; потомъ взявъ сего количества дифференціалъ и отнявъ оный отъ предложенной формулы, получаю остатокъ $y^2\partial y$, котораго интегралъ взятый въ разсужденіи y, есть $\frac{y^3}{3}$; сіе количество присовокупивъ къ предъидущему, я буду имѣть искомой интегралъ $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}$.

10) Теперь обратимся къ дефференціальнымъ формуламъ, содержащимъ въ себѣ многія перемѣнныя количества, слѣдующихъ порядковъ.

Оныхъ формулъ ищутся интегралы подобнымъ образомъ, какъ и формулъ перваго порядка; но самой простой для сего способъ, на тѣхъ же правилахъ основанной, есть слѣдующій.

Да будетъ $P\partial x + Q\partial y$ общее выраженіе дифференціальныхъ формулъ перваго порядка съ двумя перемѣнными количествами x, y, въ коемъ P и Q суть функціи тѣхъ перемѣнныхъ; возми дифференціалъ онаго выраженія, и будешь имѣть $P\partial^2x + Q\partial^2y + \partial P\partial x + \partial Q\partial y$. Откуда происходитъ слѣдующее правило для найденія, естьли то возможно, интеграла общей формулы втораго порядка $F\partial^2x + G\partial^2y + H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$, гдѣ F, G, I, K суть функціи количествъ x, y.

Берй интегралъ двухъ членовъ содержащихъ въ себѣ ∂^2x, ∂^2y, то есть $F\partial^2x$ и $G\partial^2y$, и онаго полагая одно ∂x перемѣннымъ, и другаго полагая одно ∂y перемѣннымъ; что дастъ $F\partial x + G\partial y$. Потомъ возьми дифференціалъ сей формулы въ разсужденіи x, ∂x и y, ∂y, и будешь имѣть $F\partial^2x + G\partial^2y + \partial F\partial x + \partial G\partial y$.

Теперь, чтобы данная формула $F\partial^2 x + G\partial^2 y + H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$, была интегралъ приемлющая, надлежитъ, чтобы функціи H, I, K были такого свойства, что $\partial F\partial x + \partial G\partial y = H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$. Естьли сіе условіе не имѣетъ мѣста, то и формула интеграла имѣть не будетъ.

Пусть напримѣръ дана формула $ax^2y\partial^2x + b^2x^3y^2\partial^2y + 2ayx\partial x^2 + 2b^2x^3y\partial y^2 + (ax^2 + 3b^2y^2x^2)\partial x\partial y$.

Здѣсь $F = ax^2y$, $G = b^2x^3y^2$, $H = 2ayx$, $I = 2b^2x^3y$, $K = ax^2 + 3b^2y^2x^2$; и посему интегралъ, ежели оный есть, будетъ $ax^2y\partial x + b^2x^3y^2\partial y$. И взявъ дифференціалъ сего выраженія найдешь, что условное уравненіе $\partial F\partial x + \partial G\partial y = H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$ мѣсто имѣетъ, того ради заключить должно, что интегралъ предложенной формулы есть дѣйствительно $ax^2y\partial x + b^2x^3y^2\partial y$.

Естьли беря дифференціалъ формулы перваго порядка $P\partial x + Q\partial y$, примется ∂x или ∂y за количество постоянное, то при взятіи интеграла формулы втораго порядка поступить надлежитъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть напримѣръ ∂x взято за постоянное; дифференціалъ будетъ $Q\partial^2y + \partial Q\partial y + \partial P\partial x$. Посему естьли предложится для взятія интеграла общая формула втораго порядка $G\partial^2y + H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$, въ которой ∂x взято за постоянное, то я беру два члена $G\partial^2y$, $H\partial x^2$, изъ коихъ въ одномъ находится ∂^2y, а въ другомъ ∂x^2, и ищу ихъ интегралы, перваго полагая одно ∂y перемѣннымъ, а другаго одно x перемѣннымъ; что даетъ $G\partial y + \partial x\int H\partial x$ или $G\partial y + R\partial x$, положивъ $\int H\partial x = R$ и замѣтивъ что въ интегралѣ $\int H\partial x$ одно токмо количество x полагается перемѣннымъ. Потомъ я беру дифференціалъ формулы $G\partial y + R\partial x$, полагая перемѣнными x, y и ∂y; что дастъ $G\partial^2y + \partial G\partial y + \partial R\partial x$. Теперь чтобы предложенная формула была интегралъ приемлющая, надлежитъ чтобы имѣло мѣсто условное уравненіе $\partial G\partial y + \partial R\partial x = H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$.

Пусть напримѣръ дана формула $b^2x^3y^2\partial^2y + 2ayx\partial x^2 + 2b^2x^3y\partial y^2 + (ax^2 + 3b^2x^2y^2)\partial x\partial y$, въ которой ∂x взято за постоянное.

Здѣсь $G = b^2x^3y$, $H = 2ayx$, $I = 2b^2x^3y$, $K = ax^2 + 3b^2x^2y^2$, $R = \int H\partial x = \int 2ayx\partial x = ayx^2$; и посему интегралъ, ежели оный есть, будетъ $b^2x^3y^2\partial y + ayx^2\partial x$. И взявъ дифференціалъ сего количества, найдешь что имѣетъ мѣсто условное уравненіе $\partial G\partial y + \partial R\partial x = H\partial x^2 + I\partial y^2 + K\partial x\partial y$; того ради и проч.

Во всемъ по сіе мѣсто предложенномъ надлежитъ къ находимымъ интеграламъ присовокуплять постоянное количество, кото-

рое, опредѣляется изъ обстоятельствъ вопроса. Причемъ надлежитъ замѣтить, что здѣсь оное постоянное не можетъ быть обыкновенное количество c; ибо напримѣръ при взятіи интеграла формулы $y\partial^2 x + \partial x \partial y$, два члена $y \partial x$ и c не могутъ быть одного свойства, и потому такъ же находиться воедино совокупленными. И такъ надобно, чтобы сіе постоянное c было умножено на дифференціалъ, которой въ изчисленіи принятъ былъ за количество постоянное. Естьли же въ изчисленіи никакой дифференціалъ не принятъ за количество постоянное, то постоянное c непосредственно будетъ нуль.

Напримѣръ естьли въ изчисленіи, чрезъ кое достигъ къ формулѣ $\partial x \partial y$, дифференціалъ ∂x принятъ за постоянное количество, то къ интегралу сея формулы $y\partial x$ надлежитъ присовокупить членъ $c\partial x$, и $y\partial x + c\partial x$ будетъ полный интегралъ. Но можетъ случиться, что чрезъ условіе вопроса c будетъ нуль, и тогда членъ $c\partial x$ изчезнетъ.

Сей самой способъ можно распространить и къ формуламъ вышшихъ порядковъ; почему мы оную статью симъ и заключаемъ, не останавливаясь болѣе на ней тѣмъ паче, что дифференціальныя формулы не подлежа никакому умноженію чрезъ перемѣнные множители, и слѣдственно никакой перемѣнѣ въ ихъ свойствѣ, долженствуютъ непосредственно быть интегралъ приемлющими, естьли представляютъ дифференціалы дѣйствительные.

11) Напротивъ того дифференціальныя уравненія подлежа различнымъ перемѣнамъ, представляютъ изслѣдованію Геометра обширнѣйшій предметъ, изъ котораго мы здѣсь предложимъ токмо самоначальнѣйшее знаніе, заключающее въ себѣ особенные способы брать интегралы многихъ дифференціальныхъ уравненій съ двумя перемѣнными количествами.

Взятіе интеграловъ дифференціальныхъ перваго порядка уравненій съ двумя перемѣнными количествами, составляетъ вообще то, что первые изобрѣтатели новыхъ изчисленій назвали *обратнымъ способомъ касательныхъ*. Вотъ сіе для чего:

Означивъ чрезъ x и y координаты кривой линеи, имѣемъ общее выраженіе подкасательной $\frac{y\partial x}{\partial y}$ и *прямой* вопросъ касательныхъ состоитъ въ сысканіи опредѣленнаго выраженія подкасательной, когда свойство кривой дано чрезъ какое нибудь уравненіе; что и получается, какъ извѣстно, чрезъ изчисленіе дифференціальное, кое, для того, называется *прямымъ способомъ касательныхъ*. Естьли же напротивъ того величина подкасательной дана, сирѣчь изображена чрезъ данную функцію координатъ x и y, и требуется найти свойство кривой линеи, къ которой при-

надлежитъ сія подкасательная, тогда будетъ вопросъ *обратный* предъидущему, и способъ разрѣшать его приемлетъ названіе *обратнаго способа касательныхъ*. Но написавъ общую формулу $M\partial x + N\partial y = o$, гдѣ M и N суть данныя функціи количествъ x, y, дифференціальныхъ перваго порядка уравненій съ двумя перемѣнными симъ образомъ $\frac{y\partial x}{\partial y} = -\frac{Ny}{M}$, и положивъ что $-\frac{Ny}{M}$ представляетъ подкасательную кривой, увидишь что не иначе узнать можно, какая есть сія кривая, какъ чрезъ взятіе интеграла дифференціальнаго уравненія $M\partial x + N\partial y = o$. И вотъ для того то сіе взятіе интеграла дифференціальнаго уравненія называется обратнымъ способомъ касательныхъ.

Изобразимъ дробь $-\frac{Ny}{M}$ вообще буквою P, мы будемъ имѣть $\frac{y\partial x}{\partial y} = P$, гдѣ P есть нѣкая функція или одного x или одного y или купно x и y. Въ обоихъ первыхъ случаяхъ взятіе интеграла не имѣтъ никакой трудности; ибо пусть $P =$ функціи X количества x, будетъ $\frac{y\partial x}{\partial y} = X$ или $\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial x}{X}$, котораго уравненія интегралъ найдется чрезъ предложенное въ предъидущихъ статьяхъ, потому что каждая изъ частей его есть дифференціальная перваго порядка функція съ однимъ перемѣннымъ количествомъ; такъ же естьли $P =$ функціи Y количества y, то будетъ $\frac{y\partial x}{\partial y} = Y$ или $\partial x = \frac{Y\partial y}{y}$, которое выраженіе относится къ предъидущимъ.

И такъ все дѣло состоитъ въ взятіи интеграла уравненій $\frac{y\partial x}{\partial y} = P$, въ коихъ P есть функція количествъ x и y купно; и мы въ разсужденіи сего то предмета предложимъ нѣкоторые примѣры, разсматривая уравненіе $M\partial x + N\partial y = o$ непосредственно, какъ оно есть.

Найти интегралъ уравненія $y\partial x = X\partial x - x\partial y$, гдѣ X какая ни есть функція количества x.

Перенесши послѣдній членъ на другую сторону знака $=$, будемъ имѣть $y\partial x + x\partial y = X\partial x$ и $xy = \int X\partial x$. Пусть $X = x^m$, будетъ $xy = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Найти интегралъ уравненія $a^2 y\partial x = y^3\partial y + by^2\partial x + a^2 x\partial y$.

Написавъ оное уравненіе симъ образомъ $a^2(y\partial x - x\partial y) = y^3\partial y + by^2\partial x$, явствуетъ, что естьли множитель $y\partial x - x\partial y$ раздѣлится на y^2 или сдѣлается $\frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$, то оный будетъ имѣть для интеграла $\frac{x}{y}$; такъ же видно, что вторая часть уравненія $y^3\partial y + by^2\partial x$ раздѣленная на y^2 будетъ формула интегралъ приемлющая, и оный именно будетъ $\frac{y^2}{2} + bx$. И

такъ предложенное уравненіе преобразивъ въ сей видъ $a^2\left(\frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}\right) = y\partial y + b\partial x$, мы будемъ имѣть интегралъ онаго $\frac{a^2x}{y} = \frac{y^2}{2} + bx + c$.

Сыскать интегралъ уравненія $my\partial x + x\partial y = ay^n\partial y$.

Сей интегралъ нашелся бы непосредственно, естьли бы было $m = 1$. Но для всякой другой величины предстоящаго m, взятіе интеграла не иначе можетъ совершиться, какъ введеніемъ множителя, которой изъ уравненія чрезъ дифференціальное изчисленіе вышелъ. И чтобы найти сей множитель, я примѣчаю, что взявъ выраженія $mxy^{\frac{1}{m}}$ дифференціалъ, будешь имѣть $my^{\frac{1}{m}}\partial x + y^{\frac{1}{m}-1}x\partial y$, которое выраженіе разнствуетъ отъ первой части предложеннаго уравненія токмо множителемъ $y^{\frac{1}{m}-1}$; сверьхъ того видно, что вторая часть умноженная на сей самой множитель, даетъ произведеніе интегралъ приемлющее $ay^{n+\frac{1}{m}-1}\partial y$. И такъ всѣ члены нашего уравненія умножимъ на $y^{\frac{1}{m}-1}$, и будемъ имѣть уравненіе $my^{\frac{1}{m}}\partial x + y^{\frac{1}{m}-1}x\partial y = ay^{n+\frac{1}{m}-1}\partial y$, котораго интегралъ есть $mxy^{\frac{1}{m}} = \frac{amy^{n+\frac{1}{m}}}{mn+1} + c$.

Причемъ замѣтимъ, что естьли $n + \frac{1}{m} - 1 = -1$, или $nm + 1 = 0$, то интегралъ будетъ $-\frac{xy^{-n}}{n} = a\log.y + c$.

Сыскать интегралъ уравненія $my\partial x + nx\partial y = Y\partial y$, гдѣ Y какая ни есть функція количества y.

Я беру дифференціалъ выраженія $mxy^{\frac{n}{m}}$ и получаю $my^{\frac{n}{m}}\partial x + nxy^{\frac{n}{m}-1}\partial y$, которой дифференціалъ есть произведеніе первой части предложеннаго уравненія умноженной на $y^{\frac{n}{m}-1}$. И поелику съ другой стороны умножая на сей множитель другую часть уравненія, имѣемъ выраженіе, въ кое кромѣ одного перемѣннаго количества y не входитъ и кое слѣдственно принадлежитъ къ изслѣдованнымъ предъ симъ формуламъ, то явствуетъ, что изъ предложеннаго дифференціальнаго уравненія можно будетъ извлечь уравненіе между конечными количествами x и y, по крайней мѣрѣ по приближенію. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ наше дифференціальное уравненіе

$my\partial x + nx\partial y = Y\partial y$ на $y^{\frac{n}{m} - 1}$, мы будемъ имѣть $my^{\frac{n}{m}}\partial x + ny^{\frac{n}{m} - 1}x\partial y = Yy^{\frac{n}{m} - 1}\partial y$, коего уравненія интегралъ есть $mxy^{\frac{n}{m}} = \int Yy^{\frac{n}{m} - 1}\partial y$.

Предстоящія m и n могутъ быть положительныя или отрицательныя количества совокупно или раздѣльно; по чему найдется еще интегралъ уравненія $my\partial x - nx\partial y = Y\partial y$, и будетъ оный $mxy^{\frac{n}{m}} = \int Yy^{-\frac{n}{m} - 1}\partial y$.

Сыскать интегралъ уравненія болѣе общаго $ayx^{n-1}\partial x + bx^n\partial y = Y\partial y$.

Я примѣчаю, что взявъ дифференціалъ выраженія $\frac{a}{n}x^n y^{\frac{bn}{a}}$, получишь $ax^{n-1}y^{\frac{bn}{a}}\partial x + bx^n y^{\frac{bn}{a} - 1}\partial y$ или $y^{\frac{bn}{a} - 1}(ax^{n-1}y\,\partial x + bx^n\partial y)$; что есть произведеніе первой части предложеннаго уравненія умноженной на $y^{\frac{bn}{a} - 1}$; по чему умножаю все наше уравненіе на $y^{\frac{bn}{a} - 1}$, и имѣю $ax^{n-1}y^{\frac{bn}{a}}\partial x + bx^n y^{\frac{bn}{a} - 1}\partial y = Yy^{\frac{bn}{a} - 1}\partial y$, котораго уравненія интегралъ есть $\frac{a}{n}x^n y^{\frac{bn}{a}} = \int Yy^{\frac{bn}{a} - 1}\partial y$.

Явно что уравненіе $hx\partial y - ky\partial x = Y\partial y$ относится къ тому же самому вопросу, когда положишь $n = 1$, $a = -k$ и $b = h$.

Найти интегралъ уравненія $\frac{x\partial x + y\partial y}{a(x^2 + y^2)} = Y\partial y$, или $\frac{x\partial x + y\partial y}{x^2 + y^2} = aY\partial y$.

Явно что умноживъ сіе уравненіе на 2, первая часть сдѣлается логариѳмическимъ дифференціаломъ знаменателя; и потому будетъ $\log.(x^2 + y^2) = 2a\int Y\partial y$.

Пусть еще требуется найти интегралъ уравненія $ax\partial y + 2ay\partial x = xy\partial y$. Всѣ члены онаго уравненія раздѣливъ на axy, получишь $\frac{\partial y}{y} + \frac{2\partial x}{x} = \frac{\partial y}{a}$, котораго уравненія интегралъ есть $\log.y + 2\log.x = \frac{y}{a} + c$, или $\log.y + \log.x^2 = \frac{y}{a} + c$, или еще $\log.yx^2 = \frac{y}{a} + c$.

Изъ сихъ частныхъ случаевъ заключить уже мы можемъ, что взятіе интеграловъ дифференціальныхъ уравненій требуетъ двухъ главныхъ

способовъ: или *отдѣленія перемѣнныхъ количествъ*, посредствомъ коего каждая часть уравненія дѣлается состоящею изъ одного токмо перемѣннаго, и потому подлежащею ко взятію интеграла чрезъ предложенныя выше правила, или *приличествующихъ множителей*, посредствомъ коихъ каждая часть уравненія обращается въ формулу интегралъ приемлющую. Тотъ и другой способы въ слѣдующихъ книгахъ будутъ разсмотрѣны со всею подробностію, каковой токмо они требовать могутъ; и потому мы здѣсь объ нихъ ничего предлагать не будемъ. Но между тѣмъ присовокупимъ еще нѣкоторые примѣры частныхъ способовъ, кои во многихъ случаяхъ съ пользою замѣняютъ общіе, ведя къ простѣйшему слѣдствію, простѣйшимъ образомъ.

Найти интегралъ уравненія $a\partial x = y\partial y - x\partial y$.

Сіе уравненіе принадлежитъ къ вопросу, предложенному нѣкогда Декарту искуснымъ математикомъ Бономъ, и состоящему въ томъ: найти кривую линею, у которой бы, когда чрезъ начало прямоугольныхъ ея координатъ протянется неопредѣленно продолженная діагональ, раздѣляющая уголъ ими составляемый пополамъ, ордината содержалася къ подкасательной, какъ нѣкая данная линея къ части ординаты, заключающейся между кривою и упомянутою діагоналію? Перелагая сей вопросъ на аналитической языкъ, всякой удобно достигнуть можетъ къ предложенному нами уравненію, и потому остается намъ показать токмо рѣшеніе онаго уравненія.

Приложивъ къ той и другой части его $-a\partial y$, получишь $a\partial x - a\partial y = y\partial y - x\partial y - a\partial y$ или $a(\partial x - \partial y) = \partial y(y - x - a)$ или еще $\partial y = -\frac{a(\partial x - \partial y)}{a \quad x - y}$, коего уравненія интегралъ есть $y = a \log. b - a \log. (a + x - y)$, или $y = a \log. \frac{b}{a + x - y}$, гдѣ b постоянное количество.

Положи $a + x - y = u$, будетъ $y = a \log. \frac{b}{u}$ и потомъ $x = u - a + a \log. \frac{b}{u}$; чрезъ что y и x изображаются одною перемѣнною величиною u, и строеніе кривой посредствомъ логариѳмики сдѣлается удобопроизводимымъ.

Естьли y и x долженствуютъ по условію вопроса учиниться въ одно и тоже время нулями, то будетъ $\log. \frac{b}{a} = 0$, и $b = a$.

Найти интегралъ уравненія $3x^3 \partial y - 2axy\partial y = 3yx^2\partial x - ay^2\partial x$. Перенеси члены $3yx^2\partial x$ и $2axy\partial y$ на другую сторону знака $=$ и

раздѣли уравненіе на x^2, оное сдѣлается $3(x\partial y - y\partial x) = \frac{a(2xy\partial y - y^2\partial x)}{x^2}$, или $3(x\partial y - y\partial x) = a\partial(\frac{y^2}{x})$; положи $\frac{y^2}{x} = u$ или $x = \frac{y^2}{u}$, будетъ $\partial x = \frac{2uy\partial y - y^2\partial u}{u^2}$, и по учиненіи вставливанія вмѣсто x и ∂x уравненіе перемѣнится въ $\frac{3(y^3\partial u - uy^2\partial y)}{u^2} = a\partial u$ или $\frac{y^3\partial u - 3uy^2\partial y}{u^2} + \frac{2y^3\partial u}{u^2} = a\partial u$ или $-\partial(\frac{y^3}{u}) + \frac{2y^3}{u}.\frac{\partial u}{u} = a\partial u$; положи еще $\frac{y^3}{u} = at$, выдетъ $-a\partial t + 2at\frac{\partial u}{u} = a\partial u$ или $-(\frac{u\partial t - 2t\partial u}{u}) = \partial u$ или $-\frac{(u^2\partial t - 2tu\partial u)}{u^4} = \frac{\partial u}{u^2}$, котораго уравненія интегралъ есть $-\frac{t}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$, или, поставивъ вмѣсто u и t ихъ величины $\frac{y^2}{x}$ и $(\frac{y^3}{au} =)\frac{xy}{a}$, $-\frac{x^3}{ay^3} = \frac{x}{y^2} + C$ или $acy^3 + x^3 = axy$, или еще, положивъ для однородности членовъ $c = \frac{1}{b}$, $ay^3 + bx^3 = abxy$.

Сыскать интегралъ уравненія $xy^2\partial x - x^2y\partial y = b^2y\partial x - 2b^2x\partial y$.

Представивъ оное въ семъ видѣ $xy(y\partial x - x\partial y) = b^2(y\partial x - 2x\partial y)$, умножь на $-\frac{y}{x^2}$, будешь имѣть $xy^2.\frac{x\partial y - y\partial x}{x^2} = b^2.\frac{2xy\partial y - y^2\partial x}{x^2}$, или $xy^2\partial(\frac{y}{x}) = b^2\partial(\frac{y^2}{x})$; положи $\frac{y}{x} = \frac{z}{b}$ и $x = \frac{b^2u}{z^2}$, выдетъ, по исключеніи x и y, $\frac{b\partial z}{z^4} = \frac{\partial u}{u^3}$, котораго уравненія интегралъ есть $-\frac{b}{3z^3} = -\frac{1}{2u^2} + C$, или $\frac{1}{2u^2} - \frac{b}{3z^3} = C$, или поставивъ вмѣсто z и u ихъ величины $\frac{by}{x}$ и $\frac{y^2}{x}$, $\frac{x^2}{2y^4} - \frac{x^3}{3b^2y^3} = C$ или $3b^2x^2 - 2x^3y = 6b^2cy^4$, или полагая для однородности членовъ $c = \frac{1}{6kb}$, $3b^2x^2 - 2x^3y = \frac{by^4}{k}$ или наконецъ $3kb^2x^2 - 2kx^3y = by^4$.

Сыскать интегралъ уравненія $y^2\partial x - xy\partial y = Y\sqrt{y^2\partial x^2 - 2xy\partial x\partial y + y^2\partial y^2}$, гдѣ Y есть функція количества y.

Положи $x = \frac{uy}{a}$, гдѣ u новое перемѣнное количество и a произвольное постоянное дѣлающее x линею или количествомъ перваго размѣренія; будетъ $\partial x = \frac{u\partial y + y\partial u}{a}$, и по учиненіи вставливанія предложенное уравненіе сдѣлается $y^2\partial u = Y\sqrt{y^2\partial u^2 - u^2\partial y^2 + a^2\partial y^2}$; откуда взявъ обѣ части квадратно, получишь $y^4\partial u^2 = Y^2y^2\partial u^2 - Y^2u^2\partial y^2 + Y^2a^2\partial y^2$, или $(y^4 - Y^2y^2)\partial u^2 = Y^2(a^2 - u^2)\partial y^2$, или наконецъ $\frac{\partial u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{Y\partial y}{y\sqrt{y^2-Y^2}}$, котораго уравненія интегралъ найдется по предъидущимъ статьямъ, разсматривая каждую онаго часть особо.

Сыскать интегралъ уравненія $ay\partial x + bx\partial y + x^my^n(hy\partial x + kx\partial y) = 0$, гдѣ a, b, h и k постоянныя данныя количества.

Раздѣли уравненіе на xy, получишь $\frac{a\partial x}{x} + \frac{b\partial y}{y} + x^m y^n (\frac{h\partial x}{x} + \frac{k\partial y}{y}) = 0$; положи $x^a y^b = t$, $x^h y^b = u$, и возьми логариѳмическіе дифференціалы сихъ выраженій, будешь имѣть $\frac{a\partial x}{x} + \frac{b\partial y}{y} = \frac{\partial t}{t}$, $\frac{h\partial x}{x} + \frac{k\partial y}{y} = \frac{\partial u}{u}$, и предложенное уравненіе сначала сдѣлается $\frac{\partial t}{t} + x^m y^n . \frac{\partial u}{u} = 0$; потомъ два уравненія $x^a y^b = t$, $x^b y^k = u$ взятые купно даютъ $x = t^{\frac{k}{ak-bb}} u^{\frac{-b}{ak-bb}}$, $y = t^{\frac{-b}{ak-bb}} u^{\frac{a}{ak-bb}}$ и по учиненіи вмѣсто x и вставливанія, уравненіе $\frac{\partial t}{t} + x^m y^n \frac{\partial u}{u} = 0$ обратится въ

$\frac{\partial t}{t} + t^{\frac{mk-nb}{ak-bb}} . u^{\frac{-mb+na}{ak-bb}} . \frac{\partial u}{u} = 0$, которое по раздѣленіи на $t^{\frac{mk-nb}{ak-bb}}$, перемѣнится въ $t^{\frac{nb-mk}{ak-bk}-1} . \partial t + u^{\frac{na-mb}{ak-bb}-1} . \partial u = 0$,

коего интегралъ есть $\frac{t^{\frac{nb-mk}{ak-bb}}}{nb-mk} + \frac{u^{\frac{na-mb}{ak-bb}}}{na-mb} = c$.

Естьли будетъ особенно или купно $nb - mk = 0$, $na - mb = 0$, то части уравненія будутъ особенно или купно количества логариѳмическія.

Естьли же $ak - bh = 0$, то употребленный способъ мѣста имѣть неможетъ; но тогда по учиненіи въ предложенное уравненіе $ay\partial x + bx\partial y + x^m y^n (hy\partial x + kx\partial y) = 0$ вставливанія, вмѣсто k равной величины $\frac{bh}{a}$, оное сдѣлается $ay\partial x + bx\partial y + x^m y^n (hy\partial x + \frac{bh}{a} x\partial y) = 0$, или $(ay\partial x + bx\partial y)(1 + \frac{h}{a} x^m y^n) = 0$; что даетъ или уравненіе въ конечныхъ величинахъ $1 + \frac{h}{a} x^m y^n = 0$, или уравненіе дифференціальное $ay\partial x + bx\partial y = 0$, которое тоже значитъ, что и $\frac{a\partial x}{x} + \frac{b\partial y}{y} = 0$, и котораго слѣдственно интегралъ есть $a \log. x + b \log. y = \log. c$, или $\log. x^a y^b = \log. c$ или наконецъ $x^a y^b = c$.

12) Подобныя средства употребляются и при взятіи интеграловъ дифференціальныхъ уравненій слѣдующихъ порядковъ. Вотъ на сей предметъ нѣкоторые примѣры.

Найти интегралъ дифференціальнаго уравненія втораго порядка $bx\partial^2 y + 2y\partial^2 y + 2b\partial x\partial y + 2\partial y^2 = 0$, въ которомъ ∂x взято за постоянное.

Положи $\partial y = p\partial x$, будетъ $\partial^2 y = \partial p \partial x$, и предложенное уравненіе сдѣлается $bx\partial p + 2y\partial p + 2bp\partial x + 2p^2\partial x = 0$; преобрази сіе послѣднее въ $bx\partial p + bp\partial x + 2y\partial p + 2p^2\partial x + bp\partial x = 0$, или поставивъ ∂y вмѣсто $p\partial x$, въ $bx\partial p + bp\partial x + 2y\partial p + 2p\partial y + b\partial y = 0$, и будешь имѣть интегралъ $bpx + 2py + by + c = 0$.

Теперь поставь $\frac{\partial y}{\partial x}$ вмѣсто p; получишь $bx\,\partial y + 2y\,\partial y + by\,\partial x + c\partial x = o$, котораго уравненія интегралъ есть $y^2 + bxy + cx = h$, гдѣ h произвольное постоянное количество.

Къ тому же заключенію достигнуть можно, разсматривая первую часть $bx\partial^2 y + 2y\,\partial^2 y + 2b\partial x\partial y + 2\partial y^2$ предложеннаго уравненія, какъ простую дифференціальную втораго порядка формулу. Въ самомъ дѣлѣ, представивъ оную такимъ образомъ $(bx + 2y)\,\partial^2 y + 2\partial y^2 + 2b\partial\,x\partial y$, возьмемъ, для предписаннаго въ 10 статьѣ, интегралъ перваго члена $(bx + 2y)\,\partial^2 y$, полагая токмо ∂y перемѣннымъ, и будемъ имѣть $bx\partial y + 2y\,\partial y + X\,\partial x$, гдѣ X есть неизвѣстная функція тѣхъ количествъ, которыя не полагалися перемѣнными, какъ то y и x; потомъ что бы найти оную неизвѣстную функцію X, возьмемъ формулы $bx\partial y + 2y\partial y + X\partial x$ опять дифференціалъ, и мы получимъ $bx\,\partial^2 y + 2y\partial^2 y + 2\partial y^2 + b\partial x\partial y + \partial X\,\partial x$, которая формула сравненная съ предложенною даетъ $\partial X\,\partial x = b\partial x\,\partial y$ или $\partial X = b\partial y$; изъ чего найдется $X = by + c$. И такъ искомой интегралъ дѣйствительно будетъ $bx\,\partial y + 2y\,\partial y + by\,\partial x + c\partial x$, что есть тоже самое выраженіе, каковое и предъ симъ найдено.

Сыскать интегралъ уравненія $3\,\partial x\,\partial y + 2x\,\partial^2 y = o$.

Положи $\partial y = p\partial x$, и уравненіе сдѣлается $3p\partial x + 2x\partial p$; откуда найдется $\frac{\partial p}{p} = -\frac{3\partial x}{2x}$, котораго уравненія интегралъ есть $\log p = -\frac{3}{2}\log. x + \log. b = \log. \frac{b}{x\sqrt{x}}$, или $p = \frac{b}{x\sqrt{x}}$. И такъ поставивъ $\frac{\partial y}{\partial x}$ вмѣсто p, имѣешь $\partial y = \frac{b\,\partial x}{x\sqrt{x}}$, котораго уравненія интегралъ есть $y = c - \frac{2b}{\sqrt{x}}$, или $y\sqrt{x} - c\sqrt{x} + 2b = o$.

Найти интегралъ уравненія $\partial^2 y + y\partial x^2 = o$.

Положи $\partial y = p\partial x$, будетъ $\partial^2 y = \partial p\,\partial x$, и уравненіе перемѣнится въ $\partial p + y\partial x = o$; но $\partial x = \frac{\partial y}{p}$, почему выдетъ $p\partial p = -y\partial y$, котораго уравненія интегралъ есть $p^2 = a^2 - y^2$, гдѣ a^2 произвольное постоянное количество. Теперь поставь $\frac{\partial y}{\partial x}$ вмѣсто p, получишь $\partial x = \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, и слѣдственно $x = A\,\text{sin}\,\frac{y}{a} + c$, или $\text{sin.}\,(x + n) = \frac{y}{a}$.

Приложенie обратнаго способа предѣловъ къ Геометрiи.

Первое употребленiе, сдѣланное сему обратному способу предѣловъ, состояло въ приложенiи его къ сысканiю площади и длины кривыхъ линей, потомъ ко измѣренiю поверьхностей и толщинъ тѣлъ вращенiя.

...сысканiи площади кривыхъ линей.

(183) Да будетъ AMM′ (черт. XLVI) кривая линея, и MP, M′P′ двѣ ея ординаты, къ оси перпендикулярныя; и да протянется хорда MM′ и состроится прямоугольникъ BAPL, которой бы имѣлъ AP основанiемъ и постоянную линею AB, за единицу взятую, высотою. Мы доказали (въ членѣ 116), что пространство MPP′M′, ограниченное дугою MM′, есть разность пространства APM (*); и явно что содержанiе трапецiи MPP′M′ къ прямоугольнику LPP′K, которой есть разность прямоугольника BAPL, приближается тѣмъ болѣе къ содержанiю пространства MPP′M′, которое есть разность пространства APM, къ тому же прямоугольнику LPP′K, чѣмъ точка M′ будетъ ближае къ точкѣ M; слѣдовательно предѣлъ содержанiя между трапецiею и прямоугольникомъ LPP′K найдется, сыскивая величину, которую содержанiе между разностями пространства APM и прямоугольника BAPL приметъ, когда $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$, то есть, что предѣлъ содержанiя между сими разностями есть такъ же предѣлъ и содержанiя между трапецiею MPP′M′ и прямоугольникомъ LPP′K. И какъ оная трапецiя равна $\frac{2y+\Delta y}{2}\Delta x$ и

(*) Сiе безъ всякаго доказательства явно; и есть непосредственное слѣдствiе опредѣленiя *разности*.

оной прямоугольникъ равенъ 1. Δx, то будетъ $y + \frac{\Delta y}{2}$ содержаніе между сими двумя количествами и y предѣлъ онаго содержанія. И такъ означивъ чрезъ E пространство APM и чрезъ $\frac{\partial E}{\partial x}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta E}{\Delta x}$, получишь $\frac{\partial E}{\partial x} = y$, и все дѣло состоитъ токмо въ сысканіи y въ выраженіи изъ x посредствомъ уравненія кривой линеи. Естьли по учиненіи вставливанія, величина предѣла $\frac{\partial E}{\partial x}$ будетъ такова, что поступая къ содержанію количествъ E и x, найдешь оное чрезъ алгебраическое уравненіе, то кривая линея будетъ изъ числа тѣхъ, которыя называются точно *квадратомъ измѣряемыми* или просто квадратомъ изм[illegible]ми. (*)

Возмемъ напримѣръ уравненіе $y^m = x$ изобра[illegible]щее свойство всѣхъ параболъ, когда показатель m число положительное, цѣлое или дробное, и всѣхъ гиперболъ, когда число отри-

---

(*) Чтобы найти формулу служащую во опредѣленію площади тѣхъ кривыхъ линей, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки, положимъ площадь AUM $=$ P (черт. 15), AMP $=$ Q и PMU $=$ R, будетъ $P = Q + R$ и $\partial P = \partial Q + \partial R = y\partial x + \partial(\frac{yv}{2}) = y\partial x + \frac{y\partial v}{2} + \frac{v\partial y}{2}$ (полагая UP $= v$), $= \frac{y\partial x}{2} + \frac{v\partial y}{2}$, по причинѣ что $\partial v = -\partial x$. Поставь вмѣсто y, v, ∂y и ∂x ихъ величины $z\,\text{fin.}\,\beta$, $z\,\text{cof.}\,\beta$, $z\,\text{cof.}\,\beta\,\partial\beta + \text{fin.}\,\beta\,\partial z$ и $z\,\text{fin.}\,\beta\,\partial\beta - \text{cof.}\,\beta\,\partial z$, получишь $\partial P =$ $\frac{z\,\text{fin.}\,\beta\,(z\,\text{fin.}\,\beta\,\partial\beta - \text{cof}\,\beta\,\partial z) + z\,\text{cof.}\,\beta\,(z\,\text{cof.}\,\beta\,\partial\beta + \text{fin}\,\beta\,\partial z)}{2} = \frac{z^2\partial\beta}{2}$ и $P = \int\frac{z^2\partial\beta}{2}$.

Сія формула равно справедлива и тогда, когда кривая линея входитъ или выходитъ изъ полюса U. Ибо, пусть UBM таковая кривая (черт. 27), и пусть площадь UBDMU $=$ P, PBU $=$ Q, BDM $=$ R и PMU $=$ T; будетъ $P = R + T - Q$ и $\partial P = \partial R + \partial T - \partial Q$; протяни прикосновенную ординату ND и изъ точки касанія D къ AU параллельную Dp, и положи PB $= u$, $pB = p$ и $pM = q$; выдетъ $\partial R = p\partial x + q\partial x$, $\partial T = \partial(\frac{yv}{2})$, $\partial Q = u\partial v = -u\partial x$ и $\partial P = p\partial x + q\partial x + \partial(\frac{yv}{2}) + u\partial x = (p + q + u)\partial x + \partial(\frac{yv}{2}) = y\partial x + \partial(\frac{yv}{2})$; слѣд. и проч.

цательное; будетъ $\frac{\partial E}{\partial x} = y = x^{\frac{1}{m}}$, откуда извлечешь $E = \frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}} + c = \frac{m}{m+1} xy + c$. И такъ параболы всѣхъ *родовъ* суть кривыя квадратомъ измѣряемыя, равно и всѣ гиперболы относимыя къ ихъ асимптотамъ, кромѣ обыкновенной. Квадратура же обыкновенной прямоугольной гиперболы, коя отнесена къ асимптотамъ и у коей первая абсцисса единица, зависитъ отъ строенія логариѳмики, у которой подкасательная равняется единицѣ; для сей то причины оныя логариѳмы называются *гиперболическими*. (*)

(*) Все сіе требуетъ поясненія, которое мы съ присовокупленіемъ многихъ другихъ примѣровъ здѣсь и сдѣлаемъ.

Авторъ предполагая уравненіе $y^m = x$ изображающимъ свойство какъ всѣхъ параболъ, такъ и всѣхъ гиперболъ, отнесенныхъ къ ихъ асимптотамъ, разумѣетъ гиперболы прямоугольныя, и потому опредѣляя квадратуру всѣхъ параболъ, не опредѣляетъ въ самой вещи квадратуры всѣхъ гиперболъ. Мы взявъ болѣе общее уравненіе $\alpha y^m = \beta x^n$, опредѣлимъ и оную квадратуру съ большею общностію. На сей конецъ сперва замѣтимъ, что квадратура кривой линеи, у которой координаты x, y косвенныя, какой ниесть уголъ γ между собою составляющія, получается чрезъ посредство сея формулы $\partial E = y \partial x \sin.\gamma$. Потомъ изъ уравненія $\alpha y^m = \beta x^n$ сыскавъ $y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}}$, имѣемъ $\partial E = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} \partial x \sin.\gamma$,

и $E = \frac{m}{m+n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m+n}{m}} . \sin\gamma + c = \frac{m}{m+n} xy \sin.\gamma + c$.

Пусть $\alpha = 1$, $m = 2$, $n = 1$ и $n = 1$, будетъ квадратура полусегмента обыкновенной параболы, которой соотвѣтствуетъ діаметру, составляющему съ ординатами уголъ γ, $= \frac{2}{3} xy \sin.\gamma$, сирѣчь $= \frac{2}{3}$ параллелограмма около сего полусегмента описаннаго.

Пусть еще $\beta = 1$, $m = -1$ и $n = 1$, будетъ $E = \frac{x}{0} + c$; откуда, по причинѣ невозможности опредѣлить произвольное постоянное количество c о квадратурѣ гиперболы при асимптотахъ ничего основательнаго заклю

чить не можно. И такъ возмемъ формулу $\partial E = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n}{m}} \partial x \sin.\gamma$, которая въ семъ случаѣ сдѣлается $\partial E = \alpha \sin.\gamma.\frac{\partial x}{x}$, и будетъ $E = \alpha \sin.\gamma \log.x + c$. Потомъ, поелику $x = 0$ даетъ $E = 0$, выдетъ $c = -\alpha \sin.\gamma.\log.0$ и $E = \alpha \sin.\gamma(\log x - \log.0) = \alpha \sin.\gamma.\log.\frac{x}{0} = \frac{1}{0}$; откуда слѣдуетъ, что асимптотическое гиперболы пространство есть безконечно. Посмотримъ, чему равняется часть таковаго пространства между какими нибудь двумя координатами содержащаяся, на примѣръ часть AMRS (черт. 28), которая содержится между ординатою AS, соотвѣтствующею вершинѣ гиперболы A, и другою какою нибудь ординатою MR. [illegible]имъ AS, $= CS$, чрезъ m, будетъ $\alpha (= CS \times AS) = m^2$ и AMRS = [illegible]$\sin.\gamma \log.x + c = m^2 \sin \gamma \log.x - m^2 \sin.\gamma.\log.m = m^2 \sin \gamma.\log.\frac{x}{m}$, гдѣ произвольное постоянное количество c опредѣлено такимъ образомъ, чтобы было $m^2 \sin.\gamma \log.x + c = 0$, когда $x = CS = m$. Итакъ асимптотическія гиперболы пространства, считаемыя отъ ординаты AS, изображаются чрезъ натуральные, умноженные на возвышеніе гиперболы и синусъ угла γ, логариѳмы абсциссъ, раздѣленныхъ на оное возвышеніе.

Естьли сей уголъ γ будетъ прямой или гипербола прямоугольная, и $m = 1$, то выдетъ $AMRS = \log.x$, то есть въ сей гиперболѣ асимптотическія пространства изображаются просто чрезъ натуральные логариѳмы соотвѣтственныхъ абсциссъ. И сіе то есть причиною что оные логариѳмы названіе *гиперболическихъ* получили.

Естьли же въ положеніи $m = 1$, хочешь имѣть гиперболу, которой бы асимптотическія пространства изображалися чрезъ обыкновенные логариѳмы абсциссъ, то стоитъ токмо положить $\sin.\gamma = \frac{1}{k} = 0{,}043429488$ и проч., и будешь имѣть $\gamma = 25^\circ, 44', 25''$. И въ семъ состоитъ поясненіе, которое мы намѣрены были сдѣлать. Но прежде нежели приступимъ къ другимъ примѣрамъ, учинимъ на тотъ же предметъ еще нѣкоторыя замѣчанія.

Поелику $\frac{CR \times MR.\sin.\gamma}{2} = \frac{m^2 \sin.\gamma}{2} = \frac{CS \times AS.\sin.\gamma}{2}$, то будетъ треугольникъ CMR = треуг. CAS, и гиперболической секторъ $ACM = AMRS + CAS - CMR = AMRS = m^2 \sin.\gamma.\log.\frac{x}{m}$. Откуда получается и та квадратура гиперболы APM, или ACQM, которая содержится между координатами осей AP, PM, или CQ, QM, и именно будетъ APM = треуг. CPM − сект. ACM, и ACQM = треуг. CQM + сект. ACM.

И чтобы опредѣлить сїи квадратуры APM, ACQM самымъ дѣломъ, въ одной абсциссѣ или ординатѣ гиперболы, означимъ абсциссу CP чрезъ z, ординату PM чрезъ u, полуось CA чрезъ a и другую CD чрезъ b; мы будемъ имѣть

$$u = \frac{b}{a}\sqrt{z^2 - a^2},\ z = \frac{a}{b}\sqrt{u^2 + b^2},\ \partial u = \frac{bz\partial z}{a\sqrt{z^2 - a^2}},\ \partial z = \frac{au\partial u}{b\sqrt{u^2 + b^2}};$$

$$APM(= \int u\partial z) = \frac{b}{a}\int \partial z\sqrt{z^2 - a^2},\ \text{или}\ APM = \frac{a}{b}\int\frac{u^2\partial u}{\sqrt{u^2 + b^2}},$$

$$ACQM(= \int z\partial u) = \frac{a}{b}\int \partial u\sqrt{u^2 + b^2},\ \text{или}\ ACQM = \frac{b}{a}\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Сїи интегралы, и слѣдственно квадратуры APM, ACQM, найдутся чрезъ посредство 5й статьи нашихъ присовокупленїй къ обратному способу предѣловъ; но зная уже площадь гиперболическаго сектора, мы можемъ опредѣлить ихъ непосредственно чрезъ уравнения

APM = треуг. CPM — сект. ACM

ACQM = треуг. CQM + сект. ACM.

Въ самомъ дѣлѣ, по причинѣ что постоянное предстоящее $\frac{b}{a}$ или $\frac{a}{b}$ къ опредѣленїю преднаписанныхъ интеграловъ нисколько не служитъ, положимъ $b = a$, и вмѣсто какой нибудь гиперболы, возмемъ прямоугольную; чрезъ что оные преднаписанные интегралы обращятся въ сїи

$$\int \partial z\sqrt{z^2 - h^2},\ \int\frac{u^2\partial u}{\sqrt{u^2 + b^2}},\ \int \partial u\sqrt{u^2 + h^2},\ \int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}},$$

въ коихъ h полагается одною изъ равныхъ полуосей гиперболы, и послѣ коихъ преднаписанные найдутся, умножая первой и четвертой изъ сихъ послѣднихъ на $\frac{b}{a}$, а второй и третїй на $\frac{a}{b}$, и вмѣсто h поставляя въ первой и четвертой a, а во второй и третїй b. Потомъ поелику $z^2 + u^2 = \overline{CM}^2$, какъ $x^2 + y^2 = \overline{CM}^2$, мы имѣемъ уравненїе $z^2 + u^2 = x^2 + y^2$, и сверьхъ того по свойству гиперболы $u^2 = z^2 - h^2$ и $xy = m^2 = \frac{h^2}{2}$; изъ сихъ трехъ уравненїй, по исключенїи изъ перваго чрезъ посредство втораго u^2, и по приложенїи удвоеннаго третьяго, мы получимъ $x + y = z\sqrt{2}$, и отсюда, поставивъ вмѣсто y равную величину $\frac{h^2}{2x}$, найдемъ $x = \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2}}{\sqrt{2}}$, или по причинѣ что $z = \sqrt{u^2 + h^2}$, $x = \frac{u + \sqrt{u^2 + b^2}}{\sqrt{2}}$. И такъ въ прямоугольной гиперболѣ площадь сект. ACM $= m^2\log.\frac{x}{m} = \frac{h^2}{2}\log.\frac{z + \sqrt{z^2 - h^2}}{h}$, или $= \frac{h^2}{2}\log.\frac{u + \sqrt{u^2 + b^2}}{h}$, квадратура APM = треуг. CPM — сек. ACM = $\frac{uz}{2}$ — сект. ACM $= \frac{z\sqrt{z - h^2}}{b} - \frac{h^2}{2}\log.\frac{z + \sqrt{z^2 - h^2}}{h}$, или $= \frac{u\sqrt{u^2 + b^2}}{a}$

$-\frac{b^2}{2}\log.\frac{u+\sqrt{u^2+b^2}}{b}$, и квадратура ACQM $=$ треуг. CQM $+$ сект. ACM $=\frac{uz}{2}$ $+$ сект. ACM $=\frac{u\sqrt{u^2+b^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\log.\frac{u+\sqrt{u^2+b^2}}{b}$, или $=\frac{z\sqrt{z^2-b^2}}{2}$, $+\frac{b^2}{2}\log.\frac{z+\sqrt{z^2-b^2}}{b}$. Теперь, поелику сiи прямоугольной гиперболы квадратуры означаютъ интегралы $\int\partial z\sqrt{z^2-b^2}$, $\int\frac{u^2\partial u}{\sqrt{u^2+b^2}}$, $\int\partial u\sqrt{u^2+b^2}$, $\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{z^2-b^2}}$, то поступивъ съ ними по изъясненному выше, получимъ первые преднаписанные интегралы, и слѣдственно квадратуры вообще какой ниесть гиперболы:

$$APM=\frac{b}{a}\left(\frac{z\sqrt{z^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log.\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}\right),\text{ или}$$
$$APM=\frac{a}{b}\left(\frac{u\sqrt{u^2+b^2}}{2}-\frac{b^2}{2}\log.\frac{u+\sqrt{u^2+b^2}}{b}\right),$$
$$ACQM=\frac{a}{b}\left(\frac{u\sqrt{u^2+b^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\log.\frac{u+\sqrt{u^2+b^2}}{b}\right),\text{ или}$$
$$ACQM=\frac{b}{a}\left(\frac{z\sqrt{z^2-a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log.\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}\right).$$

И такъ всякая квадратура гиперболы, какъ въ разсужденiи асимптотъ, такъ и въ разсужденiи координатъ, зависитъ отъ логариѳмовъ; и по сему интегралы, кои приведены быть могутъ къ квадратурѣ гиперболы, всегда опредѣляются помощiю логариѳмовъ же.

Посмотримъ отъ чего зависитъ квадратура еллипсиса, и чрезъ что интегралы, кои къ сей квадратурѣ приведены быть могутъ, опредѣляются.

На сей конецъ означимъ координаты AP, PM еллипсиса (черт. 29) чрезъ x, y, большую полуось AC чрезъ a, и меньшую CD чрезъ b; мы будемъ имѣть квадратуру полусегмента еллипсиса $APM=\int y\partial x=\frac{b}{a}\int\partial x\sqrt{2ax-x^2}$; потомъ по приведенiи сего интеграла въ видъ $\frac{b}{a}\left(\int\frac{2ax\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{x^2\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)$, поступимъ съ нимъ по предложенному въ 4й статьѣ нашихъ присовокупленiй, и мы получимъ $APM=$ $\frac{b}{a}(2a(-\sqrt{2ax-x^2}+a\text{Asin.}v.\frac{x}{a})+(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}a)\sqrt{2ax-x^2}-\frac{3}{2}a^2\text{Asin.}v.\frac{x}{a})=$ $\frac{b}{a}(\frac{1}{2}a^2\text{Asin.}v.\frac{x}{a}-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2})$; и какъ сiе выраженiе тоже значитъ, что и умноженная на содержанiе осей $\frac{b}{a}$ разность круговаго сектора ACM, описаннаго большею полуосью $CA=a$, и треугольника CPm, то будемъ имѣть $APM=\frac{b}{a}APm$. Откуда слѣдуетъ ѳеорема доказанная въ

членѣ 132мъ инымъ образомъ, то есть $APM : APm = b : a$. Къ тому же слѣдствию достигнуть можно еще такимъ образомъ: Означивъ ординату Pm круга, списаннаго полуосью CA, чрезъ u, мы имѣемъ $APm = \int u \partial x = \int \partial x \sqrt{2ax - x^2}$; но выше было $APM = \frac{b}{a} \int \partial x \sqrt{2ax - x^2}$; чего ради будетъ $APM = \frac{b}{a} APm$, и $APM : APm = b : a$.

Откуда слѣдуетъ, что и секторъ еллиптической ACM къ сектору круговому ACm содержится какъ b къ a; ибо треуг. CPM : треуг. $CPm = b : a$. И такъ будетъ $ACM = \frac{b}{a} ACm = \frac{b}{a} \cdot \frac{a \cdot Am}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{Am}{a} = \frac{ab}{2} A \sin. v. \frac{x}{a}$ или $= \frac{ab}{2} \cdot A \sin. \frac{Pm}{a} = \frac{ab}{2} A \sin. \frac{y}{b}$.

Послѣ сего заключенія обратно достигнуть можно къ квадратурѣ APM, или $ACQM$, содержащейся между прямоугольными координатами AP и PM, или CQ и QM, и именно будетъ $APM =$ сект. $ACM -$ треуг. CPM, и $ACQM =$ сект. $ACM +$ треуг. CQM. И чтобы отсюда оныя квадратуры APM, $ACQM$ опредѣлить самымъ дѣломъ, въ одной абсциссѣ или ординатѣ еллипсиса, означимъ абсциссу CP чрезъ z, удержавъ у ординаты PM и полуосей AC, CD тѣ же буквы, коими прежде онѣ были означены; мы будемъ имѣть

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}, \quad z = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

$$APM = \frac{ab}{2} A \sin. \frac{y}{b} - \frac{zy}{2} = \frac{ab}{2} A \sin. \frac{y}{b} - \frac{ay\sqrt{b^2 - y^2}}{2b} =$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b^2}{2} A \sin. \frac{y}{b} - \frac{y\sqrt{b^2 - y^2}}{2}\right), \text{ или}$$

$$APM = \frac{ab}{2} A \sin. v. \frac{x}{a} - \frac{zy}{2} = \frac{ab}{2} A \sin. v. \left(1 - \frac{z}{a}\right) - \frac{zy}{2} =$$

$$\frac{ab}{2} A \cos. \frac{z}{a} - \frac{bz\sqrt{a^2 - z^2}}{2a} = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2} A \cos. \frac{z}{a} - \frac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{2}\right), \text{ и}$$

$$ACQM = \frac{a}{b}\left(\frac{b^2}{2} A \sin. \frac{y}{b} + \frac{y\sqrt{b^2 - y^2}}{2}\right), \text{ или}$$

$$ACQM = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2} A \cos. \frac{z}{a} + \frac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{2}\right).$$

Точно къ тѣмъ же выраженіямъ мы достигнемъ и прямо, опредѣляя интегралы $\int -y \partial z = APM$ и $\int z \partial y = ACQM$ по предложенному въ 4й и 5й статьѣ нашихъ присовокупленій къ обратному способу предѣловъ. Причемъ знать надлежитъ, что въ первомъ интегралѣ дифференціалу приданъ знакъ $-$, а въ другомъ удержанъ $+$, для того, что квадратура APM убываетъ, когда z прибываетъ, и что напротивъ того квадратура $ACQM$ прибываетъ, когда y прибываетъ.

Сіи два интеграла въ y и z даютъ четыре слѣдующіе

$$\frac{a}{b}\int\frac{y^2\partial y}{\sqrt{b^2-y^2}}=\int-y\partial z,\quad -\frac{b}{a}\int\partial z\sqrt{a^2-z^2}=\int-y\partial x,$$
$$\frac{a}{b}\int\partial y\sqrt{b^2-y^2}=\int z\partial y,\quad \frac{b}{a}\int\frac{-z^2\partial z}{\sqrt{a^2-z^2}}=\int z\partial y,$$

изъ коихъ во второмъ и четвертомъ, для полученія совершенно тѣхъ же выраженій, что и преднаписанныя, надлежитъ брать интегралъ дифференціала $\frac{\partial z}{\sqrt{a^2-z^2}}$ въ косинусѣ, а не въ синусѣ, какъ въ 4й статьѣ нашихъ присовокупленій сдѣлано было.

И такъ наконецъ отсюда заключить можемъ, что квадратура вообще кривыхъ линей втораго порядка или получается точно или зависитъ отъ логариѳмовъ и дугъ круга, и что потому всѣ тѣ интегралы, которые къ квадратурѣ сихъ кривыхъ линей приведены быть могутъ, всегда опредѣлятся или точно или чрезъ логариѳмы и дуги круга. И въ семъ состоитъ Котезово облегченіе Нютоновой ѳеоріи.

Обратимся теперь къ опредѣленію квадратуры другихъ неменѣе извѣстныхъ кривыхъ линей.

3) Сыскать квадратуру логариѳмики.

Пусть CBMZ (черт. 30) логариѳмика, отнесенная къ координатамъ AP, $=x$, и PM, $=y$; будетъ, назвавъ подкасательную PT, которая логариѳмическому модулю $\frac{1}{k}$ равняется и есть всегда постоянна, буквою m, $\frac{y\partial x}{\partial y}=m$ и квадратура APMB $=\int y\partial x=\int m\partial y=my+c$, гдѣ чтобы опредѣлить произвольное постоянное количество c, положи $y=AB=1$, когда квадратура APMB обращается въ нуль, и выдетъ $c=-m$ и APMB $=my-m=m(y-1)$, сирѣчь квадратура логариѳмики APMB равна прямоугольнику RU, составленному изъ подкасательной PT, $=$ RS, и разности RM ординатъ PM и AB.

Естьли въ уравненіи $\int y\partial x=m(y-1)$ положишь $y=0$, то получишь безконечно длинное пространство ABCDA $=-m$, сирѣчь оное пространство равно прямоугольнику PS, составленному изъ тойже подкасательной PT и ординаты AB, $=1$; и по сему такъ же безконечно длинное пространство PMBCDAP равно прямоугольнику PU составленному изъ подкасательной PT и ординаты PM.

Къ тому же заключенію достигнешь опредѣляя въ уравненіи $\int y\partial x=my+c$ постоянное количество c такимъ образомъ, чтобы былъ $\int y\partial x=0$, когда $y=0$; ибо изъ того выдетъ $c=0$ и $\int y\partial x=my$, сирѣчь безконечно длинное пространство CMPD $=$ тому же прямоугольнику PU.

Пусть другая абсцисса AQ $=$ z и другая соотвѣтственная ордината QN $=$ u, будетъ пространство AQNB $=$ $m(u-1)$, и потому выдетъ PMNQ ($=$ APMB $-$ A QNB) $=$ $m(y-u)$, сирѣчь вообще всякая часть логариѳмики содержащаяся между какими нибудь двумя ординатами PM и QN равна прямоугольнику XU, составленному изъ подкасательной PT, $=$ XY, и разности XM тѣхъ ординатъ.

2) Сыскать квадратуру обыкновенной циклоиды.

Въ примѣчаніи къ члену 150му найдено, что уравненіе сей кривой линеи есть $y = s + \sqrt{2ax - x^2}$, гдѣ $x =$ CL и $y =$ LB $=$ EK (черт. 2); почему означивъ ординату KB чрезъ u, будетъ квадратура KECB $=$ $\int u\,\partial y = \int \frac{u(2a-x)\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, и какъ $u = 2a - x$, то выдетъ KECB $=$ $\int \frac{-u^2\partial u}{\sqrt{2au-u^2}}$, которой интегралъ опредѣлится по 4й статьѣ нашихъ присовокупленій къ обратному способу предѣловъ, и будетъ KECB $=$ $-(\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}a)\sqrt{2au - u^2} - \frac{3}{2}a^2$ A fin. v. $\frac{u}{a} + c$, гдѣ чтобы опредѣлить произвольное постоянное количество c, положи $u = 2a$, когда квадратура KECB обращается въ нуль, и выдетъ $c = \frac{3a^2\pi}{2}$ и KECB $= \frac{3a^2\pi}{2}$ $-(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}a)\sqrt{2au - u^2} - \frac{3}{2}a^2$ A fin. v. $\frac{u}{a}$.

Естьли положишь $u = 0$, то получишь квадратуру полуциклоиды AECA $= \frac{3a^2\pi}{2}$, сирѣчь оная квадратура есть трикратная полукруга производителя CEF.

Къ тому же заключенію достигнешь еще съ большею удобностію, ища квадратуру избытка ACQ описаннаго около полуциклоиды прямоугольника EQ надъ квадратурою AECA той полуциклоиды; въ самомъ дѣлѣ, когда взявъ CP, $=$ LB $= y$, за абсциссу и PB, $=$ CL $= x$, за ординату, имѣешь PCB $= \int x\partial y = \int \frac{x(2a-x)\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \partial x \sqrt{2ax - x^2}$, то явствуетъ, что оный избытокъ ACQ равенъ полукругу CEF, и что потому квадратура AECA есть трикратная того полукруга CEF.

3) Сыскать квадратуру обыкновенной эпициклоиды.

Возмемъ для сего найденную въ предъидущемъ примѣчаніи формулу P $= \int \frac{z^2\partial\beta}{2}$ и принаровимъ оную къ чертежу 16, полагая уголъ BO$b = \beta$, радіусъ векторъ O$b = z$ и квадратуру BbO $=$ P; будетъ, по причинѣ что $\partial s^2 = \partial z^2 + z^2\partial\beta^2$, квадратура P $= \int \frac{z\sqrt{\partial s^2 - \partial z^2}}{2}$; потомъ поелику въ концѣ примѣчанія къ члену 151му найдено $\partial z = -\frac{a(a+c)\partial\Phi \text{ fin. } \Phi}{z}$

и $\partial s = 2a\left(\frac{a+c}{c}\right)\partial\phi \operatorname{cos}.\frac{1}{2}\phi$, выдетъ по сысканіи $\partial z = -\frac{c\partial s \operatorname{sin}.\frac{1}{2}\phi}{z}$, оная квадратура $P = \int\frac{\partial s\sqrt{z^2 - c^2 \operatorname{sin}.\frac{1}{2}\phi^2}}{2}$. Теперь, попричинѣ что въ примѣчаніи къ члену 180му найдено $\sqrt{z^2 - c^2 \operatorname{sin}\frac{1}{2}\phi^2} = h + c.\operatorname{cos}.\frac{1}{2}\phi$ и $h = 2a\operatorname{cos}.\frac{1}{2}\phi$, будетъ та квадратура $P = \int\frac{2a+c}{2}\partial s \operatorname{cos}.\frac{1}{2}\phi = \frac{a(a+c)(2a+c)}{c}\int\partial\phi \operatorname{cos}.\frac{1}{2}\phi^2 = \frac{a(a+c)(2a+c)}{2c}\int\partial\phi(1+\operatorname{cos}.\phi) = \frac{a(a+c)(2a+c)}{2c}(\phi + \operatorname{sin}.\phi)$, гдѣ произвольное постоянное количество равно нулю, потому что интегралъ взятъ такимъ образомъ, что бы было $P = 0$, когда $\phi = 0$.

Пусть $\phi = \pi$, будетъ квадратура $BbNO = \frac{(a+c)(2a+c)}{2c}.\ \pi a = \frac{(a+c)(2a+c)}{2c}.\ AZB$ или $= \frac{(a+c)(2a+c)}{2c}.\ AQN$.

Вычтемъ отсюда круговой секторъ AON, $= AQN.\frac{c}{2} = a\pi.\frac{c}{2}$; мы получимъ квадратуру полуэпициклоиды $ABN = \frac{2a+3c}{c}.\frac{\pi a^2}{2} = \frac{2a+3c}{c}.ABZ$.

Пусть $a = c$, будетъ $\frac{2a+3c}{c} = 5$ и $ABN = 5ABZ$.

Когда $c = \frac{1}{0}$, то $\frac{2a+3c}{c} = \frac{3\cdot\frac{1}{0}+2a}{\frac{1}{0}} = 3$, и квадратура полуциклоиды = трикратному полукругу производителю, какъ и прежде.

4) найти квадратуру конхоиды Никомедовой.

Въ членѣ 175мъ показано, что означивъ абсциссу AP чрезъ x (черт. 17) ординату PM чрезъ y, высоту вершины AB чрезъ a и высоту полюса UB чрезъ b, имѣетъ мѣсто въ сей кривой слѣдующее уравненіе $y = \frac{(a+b-x)\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$, почему будетъ квадратура $APM = \int y\partial x = \int\frac{(a+b-x)\partial x\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} = \int\partial x\sqrt{2ax-x^2} + b\int\frac{\partial x\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} = -\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2} + \frac{1}{2}a^2 A\operatorname{sin}.v.\frac{x}{a} + b\int\frac{\partial x\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$. Смотри 4 и 5 статью нашихъ присовокупленій къ обратному способу предѣловъ. Теперь чтобы сего послѣдняго количества найти интегралъ, положи $a - x = u$, будетъ $x = a - u$, $\partial x = -\partial u$, $\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - u^2}$, и $\int\frac{\partial x\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} = -\int\frac{\partial u\sqrt{a^2-u^2}}{u} = -\int\frac{a^2\partial u}{u\sqrt{a^2-u^2}} + \int\frac{u\partial u}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{2}a\operatorname{Log}.\frac{a-\sqrt{a^2-u^2}}{a+\sqrt{a^2-u^2}} - \sqrt{a^2-u^2} = -\frac{1}{2}a\operatorname{Log}.\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}}$

$-\sqrt{2ax-x^2}$. И такъ $APM = -\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$ $+\frac{1}{2}a^2 A\,\text{fin. }\nu.\frac{x}{a} + b\int\frac{\partial x\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} = -\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$ $+\frac{1}{2}a^2 A\,\text{fin.}\nu.\frac{x}{a} - \frac{1}{2}ab\log.\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}} - b\sqrt{2ax-x^2} =$ $-\frac{1}{2}(a+2b-x)\sqrt{2ax-x^2} - \frac{1}{2}ab\log.\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}}$ $+\frac{1}{2}a^2 A\,\text{fin. }\nu.\frac{x}{a}$, гдѣ произвольное постоянное количество есть нуль.

Естьли къ пространству APM приложится треугольникъ UPM, то получится квадратура $AUM = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b-x)^2\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} -$ $\frac{1}{2}(a+2b-x)\sqrt{2ax-x^2} - \frac{1}{2}ab\log.\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{1}{2}a^2 A\,\text{fin.}\nu.\frac{x}{a}$. Означимъ радїусъ векторъ UM чрезъ z и уголъ AUM чрезъ β, будетъ $a+b-x = z\cos.\beta$, $a+2b-x = z\cos\beta + b$, $a-x = z\cos.\beta - b$, что (по причинѣ найденнаго во 2мъ примѣчанїи къ члену 152 му уравненїя конхоиды $z = \frac{b}{\cos.\beta} + a$) $= a\cos.\beta$, потомъ $x = a - a\cos\beta$, $\sqrt{2ax-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\cos.\beta^2} = a\,\text{fin}\,\beta$, и наконецъ квадратура AUM $=$ $\frac{1}{2}\left(\frac{z^2\cos\beta^2}{z\cos\beta - b} - (z\cos.\beta + b)\right)a\,\text{fin.}\beta - \frac{1}{2}ab\log.\frac{a-a\,\text{fin.}\beta}{a+a\,\text{fin.}\beta}$ $+\frac{1}{2}a^2\ A\,\text{fin.}\nu.\frac{x}{a} = \frac{1}{2}b^2\,\text{tang.}\,\beta - ab\log.\sqrt{\frac{\text{fin.}\,90^\circ - \text{fin.}\,\beta}{\text{fin.}\,90^\circ + \text{fin.}\,\beta}}$ $+\frac{1}{2}a^2\ A\,\text{fin.}\,\nu.\frac{x}{a}$. Пусть $A\,\text{fin.}\,\nu.\frac{x}{a} = \gamma$, будетъ $\text{fin.}\,\nu.\,\gamma = \frac{x}{a}$, $\cos.\,\gamma = 1 - \text{fin.}\,\nu.\,\gamma = 1 - \frac{x}{a} = \frac{a-x}{a} = \frac{a\cos.\beta}{a} = \cos.\,\beta$, сирѣчь $A\,\text{fin.}\,\nu.\frac{x}{a} = \gamma = \beta$. И такъ $AUM = \frac{1}{2}b^2\,\text{tang.}\beta$

$$-ab\log.\sqrt{\frac{\text{tang}\ (45^\circ - \frac{1}{2}\beta)}{\text{tang.}\ (45^\circ + \frac{1}{2}\beta)}} + \frac{1}{2}a^2\beta = \frac{1}{2}b^2\,\text{tang.}\ \beta -$$

$$ab\log.\frac{1}{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}\beta)} + \frac{1}{2}a^2\beta = \frac{1}{2}b^2\text{tang.}\beta + ab\log.\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}\beta)$$

$$+\frac{1}{2}a^2\beta.$$

Къ сему послѣднему заключенїю достигнуть можно прямо чрезъ формулу $P = \int\frac{z^2\partial\beta}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ по причинѣ $z = \frac{b}{\cos.\beta} + a$, будетъ $AUM = P = \int\frac{z^2\partial\beta}{2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{b+a\cos.\beta}{\cos\beta}\right)^2\partial\beta = \frac{1}{2}b^2\int\frac{\partial\beta}{\cos.\beta^2} + ab\int\frac{\partial\beta}{\cos\beta}$ $+\frac{1}{2}a^2\int\partial\beta = \frac{1}{2}b^2\,\text{tang.}\,\beta + ab\int\frac{\partial\beta}{\cos.\beta} + \frac{1}{2}a^2\,\beta$. Чтобы найти интегралъ дифференцїала $\frac{\partial\beta}{\cos\beta}$, положи $\text{fin.}\,\beta = u$, будетъ $\partial\beta = \frac{\partial u}{\cos.\beta} =$

$\frac{\partial u}{\surd 1 - u^2}$ и $\int \frac{\partial \beta}{cof. \beta} = \int \frac{\partial u}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{1 + u} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{1 - u} = \frac{1}{2} \text{Log.} (1 + u)$ $- \frac{1}{2} \text{log.} (1 - u) = \text{log.} \surd \frac{1 - u}{1 - u} = \text{log.} \surd \frac{fin. 90^\circ + fin. \beta}{fin. 90^\circ - fin. \beta} =$ $\text{log.tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}\beta)$. И такъ AUM, $= \frac{1}{2} b^2 \text{tang.} \beta + a b \int \frac{\partial \beta}{cof. \beta} + \frac{1}{2} a^2 \beta$, $= \frac{1}{2} b^2 \text{tang.} \beta + a b \text{ log tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}\beta) + \frac{1}{2} a^2 \beta$; что совершенно тоже, что предъ симъ нашли инымъ образомъ.

Уравненіе для нижней конхоиды A′M′K′ есть сіе $z = \frac{b}{cof. \beta} - a$; почему будетъ A′UM′ $= \frac{1}{2} b^2 \text{tang.} \beta - ab \text{ log tang.} (45 + \frac{1}{2} \beta) + \frac{1}{2} a^2 \beta$.

Откуда слѣдуетъ что пространство AA′M′M, = AUM — A′UM′, $= 2 ab \text{ log. tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \beta)$.

Сверьхъ того, поелику $b \text{ tang.} \beta = BN$, еще слѣдуетъ, что пространство ABNM, = AUM — BUN, $= ab \text{ log. tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \beta) + \frac{1}{2} a^2 \beta$, и что A′BNM′, = BUN — A′UM′, $= ab \text{log.tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \beta) - \frac{1}{2} a^2 \beta$.

5) Найти квадратуру циссоиды Діоклесовой.

Въ 154 членѣ показано, что означивъ абсциссу UP чрезъ x (черт. 23), ординату PM чрезъ y и радіусъ CU чрезъ a, имѣетъ мѣсто въ сей кривой слѣдующее уравненіе $y = \frac{x^3}{2a - x} = \frac{x^4}{2ax - x^2}$; почему будетъ квадратура UPM $= \int y \partial x = \int \frac{x^2 \partial x}{\surd 2ax - x^2} =$ $-(\frac{1}{2} x + \frac{3}{2} a) \surd 2ax - x^2 + A \, fin. v. \frac{x}{a}$, гдѣ произвольное постоянное количество есть нуль. Смотри 4 статью упомянутыхъ нашихъ присовокупленій.

Пусть $x = 2a$, выдетъ безконечно длинное пространство AUZE $= \frac{3}{2} a^2 \pi$, сиръчь оное пространство есть трикратное полукруга производителя A″U.

Къ тому же заключенію достигнешь чрезъ посредство формулы P $= \int \frac{z^2 \partial \beta}{2}$, гдѣ z радіусъ векторъ UM и β уголъ AUM. Въ самомъ дѣлѣ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ AUS и AUB имѣешь US $= \frac{2a}{cof. \beta}$, UB = MS $= 2a \, cof. \beta$ и z = UM = US — MS $= \frac{2a}{cof. \beta} - 2a \, cof. \beta =$ $2a (\frac{1}{cof. \beta} - cof. \beta)$; почему будетъ UDMU $= \int \frac{z^2 \partial \beta}{2} =$ $2a^2 \int (\frac{1}{cof \beta} - cof. \beta)^2 \partial \beta = 2a^2 \int \frac{\partial \beta}{cof. \beta^2} - 4a^2 \int \partial \beta + 2a^2 \int \partial \beta \, cof. \beta^2$, что для 3 статьи упомянутыхъ присовокупленій, $= 2a^2 \text{ tang.} \beta - 4a^2 \beta$

$+ a^2 \sin\beta \cos.\beta + a^2 \beta = 2a^2 \tan.\beta + \frac{1}{2} a^2 \sin.2\beta - 3a^2\beta$, гдѣ произвольное постоянное количество есть нуль. И какъ площадь треугольника $UPM = \frac{2\sin.\beta \times 2\cos.\beta}{2} = \frac{z^2 \sin.2\beta}{4} = a^2 \left(\frac{1}{\cos.\beta} - \cos.\beta\right)^2 \sin.2\beta = \frac{a^2 \sin.2\beta}{\cos.\beta^2} - 2a^2 \sin.2\beta + a^2 \cos.\beta^2 \sin.2\beta = 2a^2 \tan.\beta - 2a^2 \sin.2\beta + a^2 \cos.\beta^2 \sin.2\beta$, то по причинѣ что UPMDU = треуг. UPM — UDMU, будетъ $UPMDU = 3a^2\beta - \frac{5}{2} a^2 \sin.2\beta + a^2 \cos.\beta^2 \sin.2\beta = 3a^2\beta - \frac{3}{2} a^2 \sin.2\beta - a^2 \sin.\beta^2 \sin 2\beta$; что такъ же, какъ и прежде, для безконечно длиннаго пространства AUZE даетъ трикратную величину полукруга производителя ADBUA.

Чтобы изъ формулы $-(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a)\sqrt{2ax - x^2} + \frac{3}{2}a^2 A \sin.v.\frac{x}{a}$, предъ симъ найденной, произвести послѣднюю, положи $A \sin.v.\frac{x}{a} = \gamma$; будетъ $\cos.\gamma = 1 - \frac{x}{a} = \frac{a - x}{a} = \frac{a - z\cos.\beta}{a}$, понеже $x = z\cos.\beta$; потомъ по причинѣ $z = 2a\left(\frac{1}{\cos.\beta} - \cos.\beta\right) = \frac{2a \sin.\beta^2}{\cos.\beta}$, выдетъ $2a \sin.\beta^2 = a(1 - \cos.\gamma) = 2a \sin.\frac{1}{2}\gamma^2$, $\sin.\beta = \sin.\frac{1}{2}\gamma$ и $\gamma = 2\beta$. И такъ $\frac{3}{2}a^2 A \sin.v.\frac{x}{a} = \frac{3}{2}a^2.2\beta = 3a^2\beta$. Теперь поелику $x = z\cos.\beta$, и $z = \frac{2a\sin.\beta^2}{\cos.\beta}$, будетъ $\sqrt{2ax - x^2} = 2a \sin.\beta \cos.\beta = a \sin.2\beta$ и $-(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}x)\sqrt{2ax - x^2} = -(\frac{3}{2}a + a\sin.\beta^2)\, a \sin.2\beta = -\frac{3}{2}a^2 \sin.2\beta - a^2 \sin.\beta^2 \sin.2\beta$. Слѣд. и проч.

Здѣсь еще то достойно примѣчанія, что пространство UPM = 2 ANMU — 3 UPT. Въ самомъ дѣлѣ уравненія $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ или $2ay^2 - xy^2 = x^3$ взявъ дифференціалъ, имѣемъ $2(2a - x)\partial y - y\partial x = \frac{3x^2 \partial x}{y}$ или, поставивъ вмѣсто x^2 равную величину $y\sqrt{2ax - x^2}$, $2(2a - x)\partial y - y\partial x = 3\partial x\sqrt{2ax^2 - x^2}$; откуда выдетъ $\int y\partial x = 2\int(2a - x)\partial y - 3\int\partial x\sqrt{2ax^2 - x^2}$, сирѣчь предначисанное.

Отсюда паки слѣдуетъ, что безконечно длинное пространство AUZE есть въ три краты болѣе полукруга ADBUA.

б) Сыскать квадратуру спирали Архимедовой.

Въ послѣднемъ примѣчаніи въ члену 152 му показано, что означивъ радіусъ векторъ UM чрезъ z (черт. 71), уголъ AUM чрезъ β и радіусъ AU круга производителя чрезъ a, имѣетъ мѣсто въ сей кривой уравне-

ніе $2\pi z = \partial\beta$; почему будетъ UBMU $= P = \int \frac{z^2 \partial\beta}{2} = \int \frac{\pi z^2 \partial z}{a} = \frac{\pi z^3}{3a}$, гдѣ произвольное постоянное количество есть нуль.

Пусть $z = a$, выдетъ квадратура спирали UBMCAU $= \frac{\pi a^2}{3}$; сирѣчь оная квадратура есть $\frac{1}{3}$ круга производителя, и потому квадратура содержащаяся между окружностію круга и спиралью есть $\frac{2}{3}$ того круга.

Естьли положимъ $z = 2a$, то будетъ $P = \frac{8\pi a^2}{3}$; однако сіе выраженіе не означаетъ квадратуры UBMCAM′C′A′ACMBU содержащейся между двумя оборотами спирали, но заключая въ себѣ сверьхъ того квадратуру UBMCAU, означаетъ сумму сихъ двухъ квадратуръ; и потому первая изъ оныхъ квадратуръ $= \frac{7\pi a^2}{3}$, и квадратура UAM′C′A′ACMBU $= \frac{6\pi a^2}{3} = 2\pi a^2$; сирѣчь сія послѣдняя квадратура есть двукратная круга производителя. Наконецъ квадратура содержащаяся между вторымъ оборотомъ AM′C′A′ спирали и окружностію круга производителя, какъ равная $2\pi a^2 - \frac{4}{3}\pi a^2 = \frac{2}{3}\pi a^2$, есть двукратная квадратуры содержащейся между первымъ оборотомъ UMCA спирали и тоюже окружностію круга.

7) Сыскать квадратуру спирали гиперболической.

Въ томъ же примѣчаніи показано, что означивъ радіусъ векторъ UM чрезъ z (черт. 18), уголъ AUM чрезъ β, постоянную дугу AB чрезъ b, радіусъ круга производителя чрезъ a и постоянной уголъ AUB чрезъ μ, имѣетъ мѣсто въ сей кривой уравненіе $z = \frac{b}{\mu - \beta}$; почему будетъ квадратура AMU $= P = \int \frac{z^2 \partial\beta}{2} = \int \frac{z^2 \partial z (\mu - \beta)^2}{2b} = \int \frac{b \partial z}{2} = \frac{bz}{2} + C$; откуда, полагая что $z = a$ даетъ $P = 0$, выдетъ $C = -\frac{ab}{2}$ и AMU $= \frac{b}{2}(z - a)$, или $= \frac{b}{2}\left(\frac{b}{\mu - \beta} - a\right) = \frac{\mu\beta}{2(\mu - \beta)} a^2$.

Когда въ сію послѣднюю формулу вмѣсто β поставить -2π, то получишь квадратуру AM′A′ $= -\frac{\mu\pi}{\mu + 2\pi} \cdot a^2$; потомъ вмѣсто β поставляя -4π, будешь имѣть сумму квадратуръ содержимыхъ двумя спирали оборотами, до радіуса UD простертыми; такъ что квадратура содержимая однимъ вторымъ оборотомъ будетъ $= -\frac{\mu^2\pi}{(\mu + 2\pi)(\mu + 4\pi)} \cdot a^2$.

8) Сыскать квадратуру спирали логариѳмической.

Взявъ уравненіе сей кривой линеи $\beta = \frac{1}{ak} \log. z$, гдѣ z означаетъ радіусъ векторъ UM (черт. 20), β уголъ AUM и a радіусъ AU круга производителя, имѣемъ $\partial\beta = \frac{1}{ak} \frac{\partial z}{z}$ и квадр. UBM $= P = \int \frac{z^2 \partial\beta}{2} =$

$\frac{1}{2ak}\int z\partial z = \frac{z^2}{4ak} + c$, чтобы опредѣлить произвольное постоянное c, положи $z = UB = 1$, когда $\beta = 0$ и $P = 0$; будетъ $c = -\frac{1}{4ak}$ и UBM $= \frac{1}{4ak}(z^2 - 1) = \frac{1}{ak}\frac{(z-1\,.\,z+1)}{4}$. И какъ описавъ радїусомъ UB круговую линею BQC и протянувъ къ оной въ точкѣ Q касательную QS, имѣешь пропорцїю UM ($= z$).QM ($= z - 1$) $=$ UR ($= \frac{1}{ak} z$). QS, которая даетъ QS $= \frac{1}{ak}(z - 1)$, потомъ продолживъ радїусъ векторъ MU до пресѣченїя съ упомянутою круговою линеею въ C и протянувъ прямую CS, имѣешь треугольникъ CMS, котораго площадь $= \frac{QS \times CM}{2} = \frac{1}{ak}\frac{(z-1\,.\,z+1)}{2}$, то явствуетъ, что квадратура UBM спирали логариѳмической есть половина онаго треугольника CMS.

Естьли постоянное количество c опредѣлится такимъ образомъ, что бы было $P = 0$, когда $z = 0$; то будетъ $c = 0$ и чрезъ выраженїе $\frac{z^2}{4ak}$ получится сумма квадратуръ безчисленнымъ множествомъ оборотовъ спирали содержимыхъ, начиная отъ полюса U. Оное выраженїе $\frac{z^2}{4ak}$, какъ $= \frac{1}{ak} z . \frac{z}{4} = \frac{UR \times UM}{4}$, составляетъ точную половину треугольника UMR.

О сысканіи длины кривыхъ линей.

(185) Формула служащая ко опредѣленію длины кривыхъ линей есть сія $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$. (*) Естьли хочешь знать, какія суть изъ параболъ, которыя прямою измѣрить можно, то поставивъ въ предъидущую формулу вмѣсто $\frac{\partial y}{\partial x}$ равную величину найденную изъ уравненія $y^m = x$, получишь $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{m}\sqrt{m^2 + x^{2(\frac{1}{m} - 1)}}$. Но явно, что можно найти точно дугу АМ въ двухъ слѣдующихъ случаяхъ: когда $\frac{m}{2(1-m)}$ и $\frac{1}{2(m-1)}$ суть числа цѣлыя положительныя (член. 182).

И такъ полагая i числомъ цѣлымъ положительнымъ, параболы изображаемыя уравненіемъ $y^{2i} = x^{2i+1}$ или $y^{2i+1} = x^{2i}$ будутъ кривыя прямою измѣряемыя. Я нахожу изъ втораго уравненія $y = x^{\frac{2i}{2i+1}}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2i}{2i+1}x^{\frac{-1}{2i+1}}$ и слѣдственно $\frac{\partial s}{\partial x} = x^{\frac{-1}{2i+1}}\sqrt{\frac{4i^2}{(2i+1)^2} + x^{\frac{2}{2i+1}}}$; потомъ положивъ $\frac{4i^2}{(2i+1)^2} + x^{\frac{2}{2i+1}} = X$, имѣю $x = \left(X - \frac{4i^2}{(2i+1)^2}\right)^{\frac{2i+1}{2}}$, $\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{2i+1}{2}\left(X - \frac{4i^2}{(2i+1)^2}\right)^{\frac{2i-1}{2}}$, и вставливая сіи величины, получаю $\frac{\partial s}{\partial X} = \frac{2i+1}{2}.X^{\frac{1}{2}}\left(X - \frac{4i^2}{(2i+1)^2}\right)^{i-1}$, котораго уравненія разложенная вторая часть даетъ рядъ опредѣленнаго числа членовъ сего вида aX^n. Когда параметръ 1, кубическая парабола упомянутая въ 178 членѣ приметъ урав-

(*) Такъ же формула служащая ко опредѣленію длины кривыхъ линей, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки, есть слѣдующая $\partial s = \sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}$.

неніе $y^3 = x^2$; и тогда будетъ $i = 1$ и величина дуги ея $= X^{\frac{3}{2}} + c = (\frac{4}{9} + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + c$.

(186) Ни единая изъ кривыхъ линей втораго порядка не есть прямою измѣряемая, и мало другихъ кривыхъ линей, которыя бы были прямою измѣряемыя; но циклоида явно есть таковая, понеже въ ней $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}$, что даетъ, означивъ чрезъ S дугу BC (черт. XXXIII), $S = 2\sqrt{2ax}$. Чтобы имѣть всеобщее уравненіе, къ которому бы мы могли относить всѣ уравненія сей самой кривой линеи, которыя могутъ намъ представиться въ слѣдующихъ приложеніяхъ, да будетъ протянута прямая IOG, дѣлающая съ діаметромъ уголъ m, и да опустится перпендикуляръ IK и протянется прямая BH, дѣлающая съ IOG уголъ q; тогда означивъ CK чрезъ h, IH чрезъ X, HB чрезъ Y, формула предложенная въ 23 членѣ дастъ $x = h + X \operatorname{cof.} m - Y \operatorname{cof.} (q-m)$; откуда выдетъ $S = 2\sqrt{2a}\sqrt{h + X \operatorname{cof} m - Y \operatorname{cof.} (q-m)}$.(*).

(*) Сей членъ требуетъ многихъ присовокупленій, а именно надлежитъ показать какъ за недостаткомъ точныхъ способовъ найти по приближенію длину кривыхъ линей втораго порядка, потомъ какъ опредѣлить длину логариѳмики и, поелику предложено уже о длинѣ циклоиды, длину эпициклоиды, и наконецъ какъ найти длину другихъ не менѣе извѣстныхъ кривыхъ линей, а наипаче тѣхъ, у коихъ ординаты выводятъ изъ одной точки. И такъ

1) Найти длину параболы.

Пусть AMZ (черт. 32) парабола отнесенная къ координатамъ $AP = x$ и $PM = y$, и имѣющая параметръ $2a$; будетъ $y^2 = 2ax$, $y\partial y = a\partial x$, и означивъ дугу AM чрезъ s, $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\partial y\sqrt{y^2+a^2}}{a}$ и $s = \int \frac{\partial y\sqrt{y^2+a^2}}{a}$, которой интегралъ найдется по 5й статьѣ нашихъ присовокупленій къ обратному способу предѣловъ, и выдетъ $s = \frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}$.

Къ тому же заключенію можно достигнуть еще инымъ образомъ. Положи $\sqrt{y^2+a^2} = y + z$, будетъ $y = \frac{a^2 - z^2}{2z}$, $\partial y = -\frac{(z^2+a^2)\partial z}{2z^2}$

и $s = \int \frac{\partial y\sqrt{y^2+a^2}}{a} = \int \frac{\partial y(y+z)}{a} = \int\frac{y\partial y}{a} + \int\frac{z\partial y}{a} = \frac{y^2}{2a}$
$-\int\frac{(z^2+a^2)\partial z}{2az} = \frac{y^2}{2a} - \frac{z^2}{4a} - \frac{a}{2}\log. z + c = \frac{y^2}{2a} - \frac{(\sqrt{y^2+a^2}-y)^2}{4a}$
$-\frac{a}{2}\log.(\sqrt{y^2+a^2}-y) + c = -\frac{a}{4} + \frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.\frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}-y}$
$+ c = -\frac{a}{4} + \frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.(y+\sqrt{y^2+a^2}) + c;$
гдѣ чтобы опредѣлить произвольное постоянное количество c, положи $y=0$, когда и $s=0$, и выдетъ $c = \frac{a}{4} - \frac{a}{2}\log. a$, и потому s, $=$ AB, $=$
$\frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.(y+\sqrt{y^2+a^2}) - \frac{a}{2}\log. a = \frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2a}$
$+ \frac{a}{2}\log.\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}$.

Естьли произвольное постоянное количество c опредѣлится такимъ образомъ, чтобы бы было $s=0$, когда $y=b=$ KL, то будетъ $c=\frac{a}{4}$
$-\frac{b\sqrt{b^2+a^2}}{2a} - \frac{a}{2}\log.\frac{b+\sqrt{b^2+a^2}}{a}$ и KM $= \frac{y\sqrt{y^2+a^2} - b\sqrt{b^2+a^2}}{2a}$
$+\frac{a}{2}\log.\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{b+\sqrt{b^2+a^2}}$.

Откуда слѣдуетъ рѣшенïе вопроса, о которомъ славной Iоаннъ Бернуллïй сомнѣвался нѣкогда, чтобы могъ быть подчиненъ подъ изчисленïе дифференцïальное. Вотъ въ чемъ состоитъ сей вопросъ.

По данной дугѣ KB параболы найти другую дугу DG, къ которой бы первая такъ содержалася какъ 1 къ n.

Означимъ извѣстной дуги KB извѣстныя ординаты KL и BC чрезъ b и e, а неизвѣстной дуги DG неизвѣстныя ординаты DE и GH чрезъ r и t; будетъ

KB $= \frac{e\sqrt{e^2+a^2} - b\sqrt{b^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.\frac{e+\sqrt{e^2+a^2}}{b+\sqrt{b^2+a^2}}$, или означивъ для краткости $\frac{e\sqrt{e^2+a^2} - b\sqrt{b^2+a^2}}{2a}$ чрезъ f и $\frac{e+\sqrt{e^2+a^2}}{b+\sqrt{b^2+a^2}}$ чрезъ k, выдетъ KB $= f + \frac{a}{2}\log. k$; такъ же DG $= \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a}$
$+ \frac{a}{2}\log.\frac{t+\sqrt{t^2+a^2}}{r+\sqrt{r^2+a^2}}$; и какъ KB : DG $= 1 : n$, то произойдетъ
$nf + n.\frac{a}{2}\log. k = nf + \frac{a}{2}\log. k^n = \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.\frac{t+\sqrt{t^2+a^2}}{r+\sqrt{r^2+a^2}}$.
Теперь уравнивъ алгебраическую часть алгебраической, а логариѳмическую логариѳмической, получишь, по отнятïи логариѳмическаго знака, два уравненïя

$$nf = \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a}$$
$$k^n = \frac{t+\sqrt{t^2+a^2}}{r+\sqrt{r^2+a^2}},$$

чрезъ которыя опредѣляются ординаты DE и GH искомой дуги DG.

Отпуда же слѣдуетъ рѣшенія еще другаго вопроса, которой состоитъ въ томъ:

Опредѣлить двѣ дуги KB и DG параболы, коихъ бы сумма или разность была прямою измѣримая, сирѣчь количество алгебраическое.

Удержавъ прежнія буквы, и приведши себѣ на память, что сумма или разность логариѳмовъ двухъ количествъ есть логариѳмъ произведенія или частнаго оныхъ, будемъ имѣть.

$$KB + DG = f + \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.\frac{k(t+\sqrt{t^2+a^2})}{r+\sqrt{r^2+a^2}},$$

$$KB - DG = f - \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a} + \frac{a}{2}\log.\frac{k(r+\sqrt{r^2+a^2})}{t+\sqrt{t^2+a^2}}.$$

Въ томъ и другомъ уравненій логариѳмическую частьуравняй нулю, получишь:

Въ случаѣ суммы, $\frac{k(t+\sqrt{t^2+a^2})}{r+\sqrt{r^2+a^2}} = 1$ или $k(t+\sqrt{t^2+a^2}) = r+\sqrt{r^2+a^2}$, которое уравненіе даетъ соотношеніе между r и t, и потому въ выраженіи $KB + DG = f + \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a}$ неболѣе остается, какъ одна токмо неопредѣленная величина или r или t.

Въ случаѣ разности, $\frac{k(r+\sqrt{r^2+a^2})}{t+\sqrt{t^2+a^2}} = 1$, или $k(r+\sqrt{r^2+a^2}) = t+\sqrt{t^2+a^2}$, которое уравненіе даетъ r въ t, или t въ r, и потому въ выраженіи $KB - DG = f - \frac{t\sqrt{t^2+a^2} - r\sqrt{r^2+a^2}}{2a}$ не болѣе остается какъ одна токмо неопредѣленная величина или r или t.

Положимъ напримѣръ, что въ первомъ случаѣ t ищется въ r, будетъ, означивъ для краткости $\frac{r+\sqrt{r^2+a^2}}{k}$ чрезъ R, $t+\sqrt{t^2+a^2} = R$ или $\sqrt{t^2+a^2} = R - t$ и $t = \frac{R^2-a^2}{2R}$. И такъ $\sqrt{t^2+a^2} = \frac{R^2+a^2}{2R}$, $t\sqrt{t^2+a^2} = \frac{R^4-a^4}{4R^2}$ и $KB + DG = f + \frac{R^4-a^4}{2a \times 4R^2} - \frac{kRr - r^2}{2a}$.
Подобное слѣдствіе найдется и для другаго случая.

2) Сыскать длину эллипсиса.

Пусть AMZ (черт. 29) еллипсисъ отнесенной къ координатамъ $AP = x$, $PM = y$, и имѣющій полуосями $AC = a$, $CD = b$, будетъ,

означивъ дугу AM чрезъ s и $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ чрезъ n, $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\partial x \sqrt{b^2 + n(2ax - x^2)}}{\sqrt{2ax - x^2}}$.

Сіе выраженіе можетъ представлять, какъ дифференціалъ дуги AM, такъ и дифференціалъ дуги DM или еще ZM, лишь бы только въ семъ случаѣ оное взято было отрицательно.

Естьли абсциссы вмѣсто вершины A возьмутся отъ центра C, то означивъ теперь CP чрезъ x, будешь имѣть $\partial s = -\frac{\partial x \sqrt{b^2 + n(a^2 - x^2)}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, или, изключивъ b^2 чрезъ посредство $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n$, $\partial s = -\frac{\partial x \sqrt{a^2 - nx^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, которая формула простѣе первой; но совсѣмъ тѣмъ интегралъ ея не иначе взять можно, какъ по приближенію. И такъ мы различимъ два главные случая: одинъ будетъ тотъ, въ которомъ еллипсисъ малой имѣетъ ексцентрицитетъ, или мало отъ круга разнится, а другой тотъ, въ которомъ еллипсисъ весьма великой имѣетъ ексцентрицитетъ, сирѣчь въ которомъ приближается къ простой прямой линеи.

I случай.

Положимъ $a = 1$ и ексцентрицитетъ $= e$, такъ что $a^2 - b^2 = 1 - b^2 = e^2$ и $n = \frac{a^2 - b^2}{a} = e^2$; чрезъ что послѣдняя формула сдѣлается $\partial s = -\frac{\partial x \sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$, или разумѣя чрезъ s' дугу DM, учинится $\partial s' = \frac{\partial x \sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{1 - e^2 x^2}$.

Поелику въ семъ выраженіи первой множитель есть дифференціалъ дуги, коея радіусъ 1 и синусъ x, то означивъ оную дугу чрезъ μ, мы будемъ имѣть $\partial s' = \partial \mu \sqrt{1 - e^2 \sin. \mu^2}$. Разложимъ количество $\sqrt{1 - e^2 \sin. \mu^2}$ въ рядъ, и мы найдемъ
$$\partial s' = \partial \mu \left(1 - \frac{e^2 \sin. \mu^2}{2} - \frac{e^4 \sin. \mu^4}{8} - \frac{e^6 \sin. \mu^6}{16} - \frac{5 e^8 \sin. \mu^8}{128} - \frac{7 e^{10} \sin. \mu^{10}}{256} - \text{и проч}\right).$$

Съ другой стороны изъ члена 8го имѣемъ

$$\text{sin.}\,\mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{cos.}\,2\mu}{2};$$

$$\text{sin.}\,\mu^4 = \frac{3}{8} - \frac{\text{cos.}\,2\mu}{2} + \frac{\text{cos.}\,4\mu}{8},$$

$$\text{sin.}\,\mu^6 = \frac{5}{16} - \frac{15\,\text{cos.}\,2\mu}{32} + \frac{3\,\text{cos.}\,4\mu}{32} - \frac{\text{cos.}\,6\mu}{32},$$

$$\text{sin.}\,\mu^8 = \frac{35}{128} - \frac{7\,\text{cos.}\,2\mu}{16} + \frac{7\,\text{cos.}\,4\mu}{32} - \frac{\text{cos.}\,6\mu}{16} + \frac{\text{cos.}\,8\mu}{128};$$

$$\text{sin.}\,\mu^{10} = \frac{63}{256} - \frac{105\,\text{cos.}\,2\mu}{256} + \frac{15\,\text{cos.}\,4\mu}{64} - \frac{45\,\text{cos.}\,6\mu}{512} + \frac{5\,\text{cos.}\,8\mu}{256} - \frac{\text{cos.}\,10\mu}{512};$$

и такъ далѣе.

Почему вставливая сіи величины въ выраженіе дифференціала ∂s, и составляя два отдѣла членовъ, изъ коихъ одни тѣ, у которыхъ предстоящее дифференціала $\partial\mu$ есть постоянное, а другіе тѣ, въ коихъ содержащіеся косинусы дугъ 2μ, 4μ, и проч., мы найдемъ

$$\partial s' = \partial\mu \left(1 - \frac{e^2}{2.2} - \frac{3e^4}{8.8} - \frac{5e^6}{16.16} - \frac{3.35e^8}{1.8.128} - \frac{7.63e^{10}}{256.256} - \text{и проч.}\right)$$
$$+ \frac{e^2\,\partial\mu\,\text{cos.}\,2\mu}{2.2} + \frac{3e^4\,\partial\mu}{8.8}\left(\frac{\text{cos.}\,2\mu}{2} - \frac{\text{cos.}\,4\mu}{8}\right)$$
$$+ \frac{5e^6\,\partial\mu}{16.16}\left(\frac{15\,\text{cos.}\,2\mu}{32} - \frac{3\,\text{cos.}\,4\mu}{32} + \frac{\text{cos.}\,6\mu}{32}\right)$$
$$+ \frac{5.35e^8\,\partial\mu}{128.128}\left(\frac{7\,\text{cos.}\,2\mu}{16} - \frac{7\,\text{cos.}\,4\mu}{32} + \frac{\text{cos.}\,6\mu}{16} - \frac{\text{cos.}\,8\mu}{128}\right)$$
$$+ \frac{7.63e^{10}\,\partial\mu}{256.256}\left(\frac{105\,\text{cos.}\,2\mu}{256} - \frac{15\,\text{cos.}\,4\mu}{64} + \frac{45\,\text{cos.}\,6\mu}{512} - \frac{5\,\text{cos.}\,8\mu}{256} + \frac{\text{cos.}\,10\mu}{512}\right)$$
$$+ \text{и проч.}$$

Откуда взявъ интегралъ, получимъ

$$s' = \mu \left(1 - \frac{e^2}{2.2} - \frac{3e^4}{8.8} - \frac{5e^6}{16.16} - \frac{5.35e^8}{128.128} - \frac{7.63e^{10}}{258.256} - \text{и проч.}\right)$$
$$+ \frac{e^2\,\text{sin.}\,2\mu}{2.2.2} + \frac{3e^4}{8.8}\left(\frac{\text{sin.}\,2\mu}{4} - \frac{\text{sin.}\,4\mu}{16}\right)$$
$$+ \frac{5e^6}{16.16}\left(\frac{15\,\text{sin.}\,2\mu}{64} - \frac{3\,\text{sin.}\,4\mu}{128} + \frac{\text{sin.}\,6\mu}{192}\right)$$
$$+ \frac{5.35e^8}{1.8.1.8}\left(\frac{7\,\text{sin.}\,2\mu}{32} - \frac{7\,\text{sin.}\,4\mu}{128} + \frac{\text{sin.}\,6\mu}{96} - \frac{\text{sin.}\,8\mu}{1024}\right)$$
$$+ \frac{7.63e^{10}}{256.256}\left(\frac{105\,\text{sin.}\,2\mu}{512} - \frac{15\,\text{sin.}\,4\mu}{256} + \frac{45\,\text{sin.}\,6\mu}{3072} - \frac{5\,\text{sin.}\,8\mu}{2048} + \frac{\text{sin.}\,10\mu}{5120}\right)$$
$$+ \text{и проч.}$$

Сей интегралъ есть полной, потому что когда $x = 0$, и слѣдственно $\mu = 0$, оный изчезаетъ.

Явно, что естьли e положимъ малою въ разсужденіи единицы дробью, то величина дуги s' изобразится чрезъ рядъ приближающійся, и оный рядъ тѣмъ болѣе будетъ приближающійся, чѣмъ e будетъ меньше.

Естьли хочешь имѣть цѣлую окружность еллипсиса, то положи

$\mu = 2\pi$, и тогда, по причинѣ что сдѣлается $\sin. 2\mu = 0$, $\sin. 4\mu = 0$; $\sin. 6\,\mu = 0$, и проч., будетъ имѣть, означивъ оную окружность чрезъ E,

$$E = 2\pi\left(1 - \frac{e^2}{2.2} - \frac{3e^4}{8.8} - \frac{5e^6}{16.16} - \frac{5.35}{128.}\frac{e^8}{128} - \frac{7.63}{256.}\frac{e^{10}}{256} - \text{и проч.}\right).$$

Когда $e = 0$, сирѣчь когда еллипсисъ сдѣлается кругомъ, то сїя формула даетъ $E = 2\pi$, какъ и быть долженствуетъ.

Естьли отъ $\frac{E}{4}$ отнимется найденная выше величина дуги $DM = s'$, то получится величина дуга $AM = s$ чрезъ рядъ, разнствующїй отъ преднайденнаго для s' токмо тѣмъ, что въ первомъ отдѣлѣ членовъ вмѣсто μ будетъ множитель $\frac{\pi}{2} - \mu$, и что во второмъ вмѣсто знака $+$, будетъ $-$.

Выраженїе изображающее цѣлую окружность еллипсиса можетъ быть представлено такимъ образомъ

$$E = 2\pi\left(1 - \frac{1.1}{2.2}.e^2 - \frac{1.1.3.}{2.2.4.4}e^4 - \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6 - \frac{1.1.3.3.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8}e^8 - \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10}e^{10} - \text{и проч.}\right),$$

гдѣ законъ, коему послѣдуютъ члены, явственъ, дабы рядъ могъ быть простертъ столь далеко, какъ хочешь.

Естьли положить $e = 1$, сирѣчь естьли еллипсисъ сдѣлается простою прямою линеею по длинѣ большей его оси протянутою, то выдетъ

$$2 = 2\pi\left[1 - \left(\frac{1.1}{2.2} + \frac{1.1.3}{2.2.4.4} + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} + \text{и проч.}\right)\right], \text{ или}$$

$$\frac{\pi - 1}{\pi} = \frac{1.1}{2.2} + \frac{1.1.3}{2.2.4.4} + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} + \text{и проч.};$$

чрезъ что имѣемъ сумму сего до безконечности простирающагося ряда.

11 случай

Положимъ, что e весьма близко къ 1; для сего выраженїе $\partial s' = \frac{\partial x\sqrt{1 - e^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$ преобразимъ въ слѣдующїй видъ

$$\partial s' = \frac{\partial x\sqrt{1 - ex}.\sqrt{1 + ex}}{\sqrt{1 - x}.\sqrt{1 + x}} = \frac{\partial x\sqrt{1 - ex}}{\sqrt{1 - x}}.\sqrt{\frac{ex + 1}{x + 1}} =$$

$$\frac{\partial x\sqrt{1 - ex}}{\sqrt{1 - x}}\sqrt{e + \frac{1 - e}{x + 1}} = \frac{\partial x\sqrt{e - e^2x}}{\sqrt{1 - x}}\sqrt{1 + \frac{1 - e}{e(1 + x)}} =$$

$$\frac{\partial x(e - e^2x)}{\sqrt{1 - x}.\sqrt{e - e^2x}}.\sqrt{1 + \frac{1 - e}{e(1 + x)}} = \frac{\partial x(1 - ex)}{\sqrt{1 - x}\sqrt{\frac{1}{e} - x}}\sqrt{1 + \frac{1 - e}{e(1 + x)}}.$$

ПотомЪ положимЪ весьма малое положительное количество $\frac{1-e}{e}=k$, $1+x=u$, и, для небольшаго сокращенія, $\frac{2(1+e)}{e}=2m$, $\frac{3e+1}{e}=2n$; чрезЪ что послѣдняя формула преобразится въ сей видЪ

$$\partial s=\frac{e\partial u\,(m-u)}{\sqrt{2m-2nu+u^2}}\sqrt{1+\frac{k}{u}},$$

и разложивЪ несоизмѣримое количество $\sqrt{1+\frac{k}{u}}$ вЪ рядЪ, сдѣлается

$$\partial s'=\frac{e\partial u\,(m-u)}{\sqrt{2m-2nu+u^2}}\times\left(1+\frac{k}{2u}-\frac{k^2}{8u^2}+\frac{k^3}{16u^3}-\frac{5k^4}{128u^4}+\frac{7k^5}{256u^5}-\text{и проч.}\right).$$

ОзначимЪ покамѣстЪ $\sqrt{2m-2nu+u^2}$ буквою U, мы получимЪ, совокупляя воедино члены одного рода,

$$s'=e\left(m-\frac{k}{2}\right)\int\frac{\partial u}{U}-e\int\frac{u\partial u}{U}+ek\left(\frac{m}{2}+\frac{k}{8}\right)\int\frac{\partial u}{uU}-ek^2\left(\frac{m}{8}+\frac{k}{16}\right)\int\frac{\partial u}{u^2U}$$
$$+ek^3\left(\frac{m}{16}+\frac{5k}{128}\right)\int\frac{\partial u}{u^3U}-ek^4\left(\frac{5m}{128}+\frac{7k}{256}\right)\int\frac{\partial u}{u^4U}+\text{и проч.}$$

Сей рядЪ можно продолжать столь далеко, какЪ пожелаешь, поелику законЪ, коему послѣдуютЪ члены его, извѣстенЪ; и онЪ тѣмЪ болѣе будетЪ приближающійся, чѣмЪ k менѣе будетЪ, между тѣмЪ какЪ e, m, n остаются обыкновенными вЪ разсужденіи k количествами.

Теперь все дѣло состоитЪ токмо вЪ дѣйствительномЪ взятіи интеграловЪ, чрезЪ способы изЪясненные вЪ упомянутыхЪ присовокупленіяхЪ нашихЪ; и поелику дуга s' должна изчезнуть, когда $x=0$ и слѣдственно такЪ же когда $u=1$, то каждой по порядку слѣдующій интегралЪ долженЪ быть дополненЪ согласно сЪ симЪ условіемЪ. И такЪ

$$\int\frac{\partial u}{U}=\int\frac{\partial u}{\sqrt{2m-2nu+u^2}}=\log.\left(u-n+\sqrt{2m-2nu+u^2}\right)+c,$$

гдѣ постоянное количество c должно быть опредѣлено такимЪ образомЪ, что бы $\int\frac{\partial u}{U}$ былЪ нуль, когда $u=1$, и будетЪ $c=-\log.\left(1-n+\sqrt{2m-2n+1}\right)$ и $\int\frac{\partial u}{U}=\log.\frac{u-n+\sqrt{2m-2nu+u^2}}{1-n+\sqrt{2m-2n+1}}$.

Для краткости означимЪ сіе выраженіе буквою M.

$$\int\frac{u\partial u}{U}=\int\frac{u\partial u}{\sqrt{2m-2nu+u^2}}=\int\frac{u\partial u-n\partial u}{\sqrt{2m-2nu+u^2}}+\int\frac{n\partial u}{\sqrt{2m-2nu+u^2}}=$$

$\sqrt{2m-2nu+u^2}-\sqrt{2m-2n+1}+nM$, гдѣ произвольное постоянное количество опредѣлено такимЪ же образомЪ. ОзначимЪ сіе выраженіе для той же причины буквою N.

Потомъ чтобы опредѣлить интегралы членовъ $\frac{\partial u}{uU}$, $\frac{\partial u}{u^2U}$, $\frac{\partial u}{u^3U}$, $\frac{\partial u}{u^4U}$, я возьму формулу $\frac{\partial u}{u^r\sqrt{2m-2nu+u^2}}$ гдѣ r цѣлое положительное число, котораго самая меньшая величина есть 1, и положу $u=\frac{\sqrt{2m}}{t}$, что даетъ преобразованную формулу $\frac{-1}{(2m)^{\frac{r}{2}}}\cdot\frac{t^{r-1}\partial t}{\sqrt{t^2-\frac{2nt}{\sqrt{2m}}+1}}$, или положивъ для краткости $\frac{n}{\sqrt{2m}}=h$, $\frac{-1}{(2m)^{\frac{r}{2}}}\cdot\frac{t^{r-1}\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}$.

Посредствомъ сей формулы найдутся интегралы всѣхъ приведенныхъ выше членовъ, полагая попремѣнно $r=1$, $r=2$, $r=3$, $r=4$ и помня, что интегралы изображенные въ функціяхъ количества u долженствуютъ изчезнуть, когда $u=1$, и слѣдственно такъ же, когда $t=\sqrt{2m}=\frac{n}{h}$.

И такъ полагая $r=1$, мы имѣемъ $\int\frac{\partial u}{uU}=-\frac{1}{(2m)^{\frac{1}{2}}}\int\frac{\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}$, или $-(2m)^{\frac{1}{2}}\int\frac{\partial u}{uU}=\int\frac{\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}=\log.\frac{h(t-h+\sqrt{t^2-2ht+1})}{n-h^2+\sqrt{n^2-2nh^2+h^2}}$, которое выраженіе означимъ буквою P, и будетъ $\int\frac{\partial u}{uU}=-\frac{P}{(2m)^{\frac{1}{2}}}$.

Потомъ полагая $r=2$, получимъ $\int\frac{\partial u}{u^2U}=-\frac{1}{2m}\int\frac{t\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}$ или $-2m\int\frac{\partial u}{u^2U}=\int\frac{t\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}=\int\frac{t\partial t-h\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}+\int\frac{h\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}=\sqrt{t^2-2ht+1}-\frac{\sqrt{n^2-2nh^2+h^2}}{h}+hP$; которое выраженіе означимъ буквою Q, и будетъ $\int\frac{\partial u}{u^2U}=-\frac{Q}{2m}$.

Теперь полагая $r=3$, имѣемъ $\int\frac{\partial u}{u^3U}=-\frac{1}{(2m)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{t^2\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}$; или $-(2m)^{\frac{3}{2}}\int\frac{\partial u}{u^3U}=\int\frac{t^2\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}$. Чтобы найти сей интегралъ, я примѣчаю, что $\partial(t\sqrt{t^2-2ht+1})=\frac{(2t^2-3ht+1)\partial t}{\sqrt{t^2-2ht+1}}$, и пото-

му нахожу, что $\int \frac{t^2 \partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}} = \frac{t\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}{2} + \frac{3b}{2}\int \frac{t\,\partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}$ $- \frac{1}{2}\int \frac{\partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}} + C = \frac{t\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}{2} - \frac{n\sqrt{n^2 - 2nb^2 + b^2}}{2b^2} + \frac{3bQ}{2}$ $- \frac{P}{2}$, которое выраженіе означимЪ буквою R, и будетЪ $\int \frac{\partial u}{u^3 U} =$ $- \frac{R}{(2m)^{\frac{3}{2}}}$.

НаконецЪ положеніе $r = 4$ даетЪ $\int \frac{\partial u}{u^4 U} = - \frac{1}{(2m)^2}\int \frac{t^3 \partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}$, или $-(2m)^2 \int \frac{\partial u}{u^4 U} = \int \frac{t^3 \partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}$; и какЪ $\partial(t^2\sqrt{t^2 - 2bt + 1}) =$ $\frac{(3t^3 - 5bt^2 + 2t)\partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}$, то будетЪ $\int \frac{t^3 \partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}} = \frac{t^2\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}{3}$ $+ \frac{5b}{3}\int \frac{t^2 \partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}} - \frac{2}{3}\int \frac{t\,\partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}} + C = \frac{t^2\sqrt{t^2 - 2bt + 1}}{3}$ $- \frac{n^2\sqrt{n^2 - 2nb^2 + b^2}}{3b^3} + \frac{5bR}{3} - \frac{2Q}{3}$, которое выраженіе означимЪ буквою S, и будетЪ $\int \frac{\partial u}{u^4 U} = - \frac{S}{(2m)^2}$.

Когда вмѣсто t поставишь $\frac{\sqrt{2m}}{u}$ или $\frac{n}{bu}$, то количества P, Q, R, S, изобразятся вЪ функціяхЪ количества u, какЪ и M, N, и оныя функціи поставивЪ вмѣсто интеграловЪ $\int \frac{\partial u}{U}$, $\int \frac{u\,\partial u}{U}$, $\int \frac{\partial u}{uU}$, и проч. вЪ выраженіе дуги s', будешь имѣть оную дугу вЪ функціяхЪ количества u, и потомЪ поставивЪ $1 + x$ вмѣсто u, вЪ функціяхЪ абсциссы x.
Чтобы опредѣлить цѣлую окружность эллипсиса, надлежитЪ сперва найти четвертую часть оной DA, положивЪ $x = 1$, или $u = 2$ или еще $t = \frac{\sqrt{2m}}{2} = \frac{n}{2b}$; и такимЪ образомЪ, поставляя вмѣсто m равную величину $\frac{1+e}{e}$ и вмѣсто n равную $\frac{1+3e}{2e}$, мы имѣемЪ

$M = \log. \frac{1 + \sqrt{e}}{1 - \sqrt{e}}$, $N = \frac{1+3e}{2e} \log. \frac{1 + \sqrt{e}}{1 - \sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}$,

$P = \log. \frac{1 - e}{3 + e + 2\sqrt{2(1+e)}}$,

$Q = \frac{1 + 3e}{2\sqrt{2e}\sqrt{1+e}} \log. \frac{1 - e}{3 + e + 2\sqrt{2(1+e)}} - \frac{1}{\sqrt{e}}$,

$R = \frac{3 + 10e + 19e^2}{16e(1+e)} \log. \frac{1 - e}{3 + e + 2\sqrt{2(1+e)}} - \frac{5 + 47e}{4\sqrt{2(1+e)}}$,

$S = \frac{5 + 21e + 39e^2 + 63e^3}{32e\sqrt{2e}(1+e)^{\frac{3}{2}}} \log. \frac{1 - e}{3 + e + 2\sqrt{2(1+e)}} - \frac{32 + 89e + 127e^2 + 60e^3}{48e(1+e)\sqrt{e}}$
$+ \frac{1 + 3e}{3e\sqrt{2(1+e)}}$;

потомъ по причинѣ что $k = \frac{1-e}{e}$, найдемъ $m - \frac{k}{2} = \frac{1+2e}{2e}$, $\frac{m}{2} + \frac{k}{8} = \frac{5+3e}{8}$, $\frac{m}{8} + \frac{k}{16} = \frac{9+3e}{48e}$, $\frac{m}{16} + \frac{5k}{128} = \frac{13+3e}{128e}$, $\frac{5m}{128} + \frac{7k}{256} = \frac{17+3e}{256e}$;
и наконецъ поставляя всѣ сіи величины въ выраженіе дуги s' и означая чрезъ E цѣлую окружность еллипсиса, получимъ

$$E = \sqrt{e} - \frac{(1-e)(5e+3e^2)}{(1+e)^{\frac{1}{2}} 8\sqrt{2e}} \log. \frac{1-e}{3+e+2\sqrt{2(1+e)}}$$
$$+ \frac{(1-e)^2(3+10e+3e^2)}{(1+e)^{\frac{3}{2}}.64\sqrt{2e}} \log. \frac{1-e}{3+e+2\sqrt{2(1+e)}} - \frac{(1-e)^2(9+3e)}{(1+e)^2.96e\sqrt{e}}$$
$$+ \frac{(1-e)^3(39+139e+277e^2+57e^3)}{(1+e)^{\frac{5}{2}}4096e^2\sqrt{2e}} \log. \frac{1-e}{3+e+2\sqrt{2(1+e)}}$$
$$+ \frac{(1-e)^3(65+27e+12e^2)}{(1+e)^2.2048e^3}$$
$$+ \frac{(1-e)^4(35+372e+726e^2+188e^3+189e^4)}{(1+e)^{\frac{7}{2}}.32768e^3\sqrt{2e}} \log. \frac{1-e}{3+e+2\sqrt{2(1+}}$$
$$- \frac{(1-e)^4(544+1609e+2426e^2+1401e^3+180e^4)}{(1+e)^3.49152e^3\sqrt{2e}}$$
$$+ \frac{(1-e)^4(1+3e)}{(1+e)^{\frac{3}{2}}.1872e^4\sqrt{2e}}.$$

Симъ образомъ зная опредѣленную и неопредѣленную длину еллипсиса въ двухъ крайнихъ случаяхъ, мы можемъ найти оную длину съ довольною точностію и въ другихъ среднихъ случаяхъ.

Все сіе произведено изъ формулы $\partial s = -\frac{\partial x\sqrt{a^2 - nx^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, непосредственно представляющейся; но вотъ ея преобразованія, которыя ведутъ еще болѣе къ достопримѣчательнымъ заключеніямъ.

Положимъ $a^2 - n^2x^2 = u^2$ или $a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2 = u^2$, будетъ $x = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, когда $a > b$, и $x = \frac{a\sqrt{u^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, когда $a < b$; поставь то и другое вмѣсто x въ формулу $\partial s = -\frac{\partial x\sqrt{a^2 - nx^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, и будешь имѣть въ томъ и другомъ случаѣ

$$\partial s = \frac{u^2\partial u}{\sqrt{(a^2 + b^2)u^2 - u^4 - a^2b^2}},$$

гдѣ замѣтить должно, что когда $a > b$, тогда знаменатель можно почитать составленнымЪ изЪ сихЪ двухЪ множителей $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 - b^2}$, а когда $a < b$, тогда изЪ сихЪ $\sqrt{b^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$.

ПоложимЪ еще $a^2 - n x^2 = \frac{a^2 t^2}{u^2}$ или $a^2 - \frac{(a^2 - b^2) x^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2}{u^2}$, будетЪ $x = \frac{a^2 \sqrt{u^2 - b^2}}{u \sqrt{a^2 - b^2}}$, когда $a > b$, и $x = \frac{a^2 \sqrt{b^2 - u^2}}{u \sqrt{b^2 - a^2}}$, когда $a < b$; поставь то и другое вЪ ту же формулу, и будешь имѣть вЪ томЪ и другомЪ случаѣ

$$\partial s = \frac{-a^2 b^2 \partial u}{u^2 \sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}.$$

Явно, что когда u вЪ сихЪ двухЪ формулахЪ будетЪ имѣть одну и ту же величину, тогда абсцисса x будетЪ имѣть величины различныя, какЪ и дуга s.

ПоложивЪ сїе, не трудно будетЪ разрѣшить подобной предложенному выше для параболы вопросЪ, а именно:

Опредѣлить двѣ дуги еллипсиса, коихЪ бы разность была прямою измѣримая.

Возми алгебраическаго количества $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u}$ дифференцїалЪ, получишь

$$\partial \left(\frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u} \right) = \frac{-u^2 \partial u}{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}$$
$$+ \frac{a^2 b^2 \partial u}{u^2 \sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}, \text{ или}$$
$$\frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}} - \frac{a^2 b^2 \partial u}{u^2 \sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}} = -\partial \left(\frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u} \right);$$

и какЪ по предложенному выше два члена первой части сего уравненїя суть дифференцїалы двухЪ еллиптическихЪ дугЪ AM, AN (черт. 33), изЪ коихЪ первая соотвѣтствуетЪ абсциссѣ $CP = \frac{a \sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, а другїя абсциссѣ $CQ = \frac{a^2 \sqrt{u^2 - b^2}}{u \sqrt{a^2 - b^2}}$, то взявЪ интегралЪ будешь имѣть $AM + AN = c - \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u}$.

Чтобы опредѣлить произвольное постоянное количество c, положимЪ, что дуга AM обратилася вЪ нуль; будетЪ, по причинѣ что тогда $CP = a$, $\frac{a \sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = a$, и слѣдственно $u = b$; $CQ = 0$ и $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u} = 0$; и такЪ когда дуга AM изчезаетЪ, тогда дуга AN дѣлается четвертью окружности еллипсиса AD, а алгебраическое количество $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u}$ изтребляется; почему будетЪ $c = AD$, и $AM + AN = AD$.

$-\frac{\sqrt{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2}}{u}$ или $ND-AM=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2}}{u}$, то есть разность двухъ эллиптическихъ дугъ ND, AM равняется алгебраическому количеству, которое геометрически построить можно.

Отсюда слѣдуетъ ѳеорема, которую безъ доказательства далъ славной Ейлеръ въ Лейбцигскихъ актахъ на 1754 годъ, и которая заключаетъ въ себѣ способъ опредѣлять двѣ дуги еллипсиса, коихъ бы разность была прямою измѣряемая. Вотъ въ чемъ состоитъ оная.

Естьли въ еллипсисѣ ADBE проведутся два какіе нибудь сопряженные діаметра RT, MS, потомъ возмется CV равная половинѣ оси CA, и опустится изъ точки V на оную ось перпендикуляръ VQ, встрѣчающійся съ еллипсисомъ въ точкѣ N; то опустивъ изъ конца M діаметра MS на другой діаметръ RT перпендикуляръ MH, будешь имѣть двѣ дуги NDS, NAM, коихъ разность равна двукратной величинѣ отрѣзка CH.

Чтобы доказать сію ѳеорему замѣтимъ сначала, что $NDS-NAM=2(ND-AM)$; въ самомъ дѣлѣ, когда $NDS=ADB-AN-BS=2AD-AN-AM$, и съ другой стороны $NAM=AN+AM$, то будетъ $NDS-NAM=2AD-2AN-2AM=2(ND-AM)$.

Потомъ означимъ половину діаметра CR буквою u и протянемъ ординату RK; будетъ, по причинѣ что $\overline{RK}^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CK}^2)$, $u^2=\overline{CK}^2+\overline{RK}^2=\overline{CK}^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CK}^2)$; откуда выдетъ $CK=\frac{a\sqrt{u^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$, и для подобія треугольниковъ CKR и CQV будетъ $CR\ (=u):CK\ (=\frac{a\sqrt{u^2-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}})=CV\ (=a):CQ=\frac{a^2\sqrt{u^2-b^2}}{u\sqrt{a^2-b^2}}$; слѣдовательно и обратно, когда абсцисса $CQ=\frac{a^2\sqrt{u^2-b^2}}{u\sqrt{a^2-b^2}}$, то половина діаметра $CR=u$, сирѣчь буква u въ предъидущемъ вопросѣ не иное что значитъ, какъ половину діаметра CR, котораго положеніе опредѣляется, какъ сказано въ Ейлеровой ѳеоремѣ.

Теперь остается увѣриться, что абсцисса $CP=\frac{a\sqrt{a^2-u^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$, есть соотвѣтственная сопряженному діаметру MS діаметра TR. На сей конецъ примѣчаю, что по свойству сопряженныхъ діаметровъ $\overline{CM}^2+\overline{CR}^2=\overline{CA}^2+\overline{CD}^2$ или $\overline{CM}^2=a^2+b^2-u^2$ и что по уравненію еллипсиса $PM^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CP}^2)$; откуда нахожу, что дѣйствительно $CP=\frac{a\sqrt{a^2-u^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$, сирѣчь CP въ предъидущемъ вопросѣ дѣйствительно тоже значитъ, что и въ Ейлеровой ѳеоремѣ.

Наконецъ, поелику $CR\times MH=AC\times CD$ или $MH=\frac{ab}{u}$, имѣемъ $CH=\sqrt{CM^2-MH^2}=\sqrt{a^2+b^2-u^2-\frac{a^2b^2}{u^2}}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2}}{u}$.

И такЪ ѳеорема Ейлерова доказана, и есть не иное что какЪ предЪидущій вопросЪ.

ИзЪ сего вопроса или ѳеоремы слѣдуетЪ, что дуга NDS превозходитЪ четверть окружности еллипсиса AD на количество CH, и что четверть еллипсиса AD превозходитЪ дугу NAM на то же количество CH. ВЪ самомЪ дѣлѣ, когда NDS — NAM = 2 CH, и сЪ другой стороны NDS + NAM = ADB = 2 AD, то будетЪ NDS = AD + CH и NAM = AD — CH.

3) Сыскать длину гиперболы.

Пусть AMZ (черт. 28) гипербола отнесенная кЪ координатамЪ AP = x, PM = y и имѣющая полуосями CA = a и CD = b; будетЪ, означивЪ дугу AM чрезЪ s и $\frac{a^2+b^2}{a^2}$ чрезЪ n, $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\partial x \sqrt{b^2 + n(2ax + x^2)}}{\sqrt{2ax + x^2}}$.

Естьли абсциссы вмѣсто вершины A возьмутся отЪ центра C, то означивЪ теперь CP чрезЪ x, будешь имѣть $\partial s = \frac{\partial x \sqrt{n x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, которой формулы, такЪ какЪ и найденной выше для еллипсиса, интеграла иначе опредѣлить не можно, какЪ по приближенію; и вЪ ономЪ приближенномЪ опредѣлени подобнымЪ еллипсису образомЪ поступить надлежитЪ. Но зная длину еллипсиса, нѣтЪ уже нужды производить еще другое толь длинное изчисленіе, потому что опредѣленіе длины гиперболы всегда приведено быть можетЪ кЪ опредѣленію длины еллипсиса. И чтобы сіе показать на самомЪ дѣлѣ, то вЪ формулѣ $\partial s = \frac{\partial x \sqrt{n x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ надлежитЪ учинить подобныя тѣмЪ преобразованія, которыя выше сдѣланы были вЪ подобной формулѣ еллипсиса. И такЪ положимЪ $n x^2 - a^2 = u^2$, будетЪ $x = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{n}} = \frac{a\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\partial s = \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(a^2 - b^2) u^2 + u^4 - a^2 b^2}}$, гдѣ знаменатель состоитЪ изЪ двухЪ множителей $\sqrt{u^2 + a^2}$ и $\sqrt{u^2 - b^2}$.

ПоложимЪ еще $n x^2 - a^2 = \frac{a^2 b^2}{u^2}$, будетЪ $x = \frac{a\sqrt{u^2 + b^2}}{\sqrt{n}} = \frac{a^2\sqrt{u^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\partial s = \frac{-a^2 b^2 \partial u}{u^2 \sqrt{(a^2 - b^2) u^2 - u^4 + a^2 b^2}}$, гдѣ знаменатель состоитЪ изЪ двухЪ множителей $\sqrt{u^2 + b^2}$ и $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Теперь возмемЪ найденную выше для еллипсиса формулу $\partial E = \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}$, гдѣ E взято вмѣсто s, и означимЪ $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2) u^2 - u^4 - a^2 b^2}}{u}$ чрезЪ v; будетЪ

$$\partial E = -\frac{\partial v}{2} - \frac{(a^2+b^2-v^2)\partial v}{2\sqrt{(a^2+b^2-v^2)^2-4a^2b^2}},$$ или

$$\partial E = -\frac{\partial v}{2} - \frac{(a^2+b^2-v^2)\partial u}{2\sqrt{a^2+b^2+2ab-v^2}\,.\,\sqrt{a^2+b^2-2ab-v^2}},$$ или еще,

положивъ для краткости $a^2+b^2 = c^2$, $a+b = \lambda$, $a-b = \mu$,

$$\partial E = -\frac{\partial v}{2} - \frac{(c^2-v^2)\partial v}{2\sqrt{\lambda^2-v^2}\,.\,\sqrt{\mu^2-v^2}}.$$

Теперь положимъ $\frac{c^2-v^2}{\sqrt{\lambda^2-v^2}\,.\,\sqrt{\mu^2-v^2}} = \frac{A\sqrt{\lambda^2-v^2}}{\sqrt{\mu^2-v^2}} + \frac{B\sqrt{\mu^2-v^2}}{\sqrt{\lambda^2-v^2}}$; найдется $A+B = 1$, $A\lambda^2+B\mu^2 = c^2$ и слѣдственно $A = \frac{c^2-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}$, $B = \frac{\lambda^2-c^2}{\lambda^2-\mu^2}$. Для краткости удержимъ A и B, и мы будемъ имѣть

$$\partial E = -\frac{\partial v}{2} - \frac{A\,\partial v\sqrt{\lambda^2-v^2}}{2\sqrt{\mu^2-v^2}} - \frac{B\,\partial v\sqrt{\mu^2-v^2}}{2\sqrt{\lambda^2-v^2}},$$ потомъ

$$E = -\frac{v}{2} - \frac{A}{2}\int\frac{\partial v\sqrt{\lambda^2-v^2}}{\sqrt{\mu^2-v^2}} - \frac{B}{2}\int\frac{\partial v\sqrt{\mu^2-v^2}}{\sqrt{\lambda^2-v^2}}.$$

Здѣсь положивъ $\lambda^2-v^2 = z^2$, выдетъ $\int\frac{\partial v\sqrt{\lambda^2-v^2}}{\sqrt{\mu^2-v^2}} =$ $-\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{\lambda^2-z^2}\,.\,\sqrt{z^2-(\lambda^2-\mu^2)}}$, которая формула, какъ то явно изъ сравненія ея съ формулою $\partial s = \frac{u^2\partial u}{\sqrt{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2}} = \frac{u^2\partial u}{\sqrt{a^2-u^2}\,.\,\sqrt{u^2-b^2}}$, выше для еллипсиса найденною, изъявляетъ дугу DM (черт. 29) еллипсиса, у коего половина большей оси $= \lambda$, а половина меньшей $= \sqrt{\lambda^2-\mu^2}$, и соотвѣтствующая оной дугѣ абсцисса $CP = \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2-z^2}}{\sqrt{\lambda^2-(\lambda^2-\mu^2)}}$. Означимъ для краткости сію дугу буквою E′.

Положивъ еще $\mu^2-v^2 = t^2$, будетъ $\int\frac{\partial v\sqrt{\mu^2-v^2}}{\sqrt{\lambda^2-v^2}} =$ $\int -\frac{t^2\partial t}{\sqrt{\mu^2-t^2}\,.\,\sqrt{t^2+\lambda^2-\mu^2}} = \frac{\sqrt{\mu^2-t^2}\,.\,\sqrt{t^2+\lambda^2-\mu^2}}{t}$ $-\int\frac{-\mu^2(\lambda^2-\mu^2)\partial t}{t^2\sqrt{\mu^2-t^2}\,.\,\sqrt{t^2+\lambda^2-\mu^2}}$, которое выраженіе состоитъ изъ двухъ частей, изъ коихъ одна есть алгебраическое количество, а другая, какъ то явствуетъ изъ сравненія ея съ формулою $\partial s = \frac{-a^2b^2\partial u}{u^2\sqrt{(a^2-b^2)u^2-u^4+a^2b^2}} = \frac{-a^2b^2\partial u}{u^2\sqrt{a^2-u^2}\,.\,\sqrt{u^2+b^2}}$, изъявляетъ дугу AM (черт. 28) гиперболы, которой половина первой оси $= \mu$, а половина другой $= \sqrt{\lambda^2-\mu^2}$, и соотвѣтствующая оной дугѣ абсцисса $CP = \frac{\mu^2\sqrt{t^2+\lambda^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2-\mu^2}}$. Означимъ, для краткости, сію дугу буквою H.

Совокупляя всѣ сіи количества, мы получимъ

$$E = -\frac{v}{2} - \frac{A}{2}\,.\,E' - \frac{B}{2}\,.\,\frac{\sqrt{\mu^2-t^2}\,.\,\sqrt{t^2+\lambda^2-\mu^2}}{t} + \frac{B}{2}\,.\,H,$$

и оттуда

$$H = \frac{2E}{B} + \frac{v}{B} + \frac{A\,.\,E'}{B} + \frac{\sqrt{\mu^2-t^2}\,.\,\sqrt{t^2+\lambda^2-\mu^2}}{t}.$$

Сїе уравненїе нѣтъ нужды дополнять, потому что обѣ части его въ одно и то же время изчезаютъ.

Тѣ же преобразованныя формулы ведутъ насъ къ разрѣшенїю сего вопроса.

Опредѣлить двѣ дуги гиперболы, коихъ бы разность была прямою измѣряемая.

Замѣтивъ, что первая преобразованная формула для опредѣленїя длины гиперболы есть $\partial s = \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(a^2 - b^2) u^2 + u^4 - a^2 b^2}} = \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{u^2 + a^2} \cdot \sqrt{u^2 - b^2}}$, возьми дифференцïалъ алгебраическаго количества $\frac{u \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}}$, и будешь имѣть

$$\partial \left(\frac{u \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}} \right) = \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{u^2 + a^2} \cdot \sqrt{u^2 - b^2}} - \frac{b^2 \partial u \sqrt{u^2 + a^2}}{(u^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Явно, что первой членъ второй части сего уравненїя есть дифференцïалъ дуги гиперболы AM (черт. 28) соотвѣтственной абсциссѣ $CP = \frac{a \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. И чтобы узнать, что значитъ второй членъ, положимъ $\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^2 \sqrt{-b^2}} = \frac{v}{b}$, будетъ $u = \frac{b \sqrt{v^2 + a^2}}{\sqrt{v^2 - b^2}}$, $\partial u = - \frac{b v \partial v (a^2 + b^2)}{\sqrt{v^2 + a^2} \cdot \sqrt{v^2 - b^2}}$ и $- \frac{b^2 \partial u \sqrt{u^2 + a^2}}{(u^2 - b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v^2 \partial v}{\sqrt{v^2 + a^2} \cdot \sqrt{v^2 - b^2}}$; сїе показываетъ, что оный вторый членъ есть дифференцïалъ гиперболической дуги AN, которая соотвѣтствуетъ абсциссѣ $CK = \frac{a \sqrt{v^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a u}{\sqrt{u^2 - b^2}}$. И такъ

$$\partial \left(\frac{u \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}} \right) = \partial (AM) + \partial (AN), \text{ и посему } AM + AN = c + \frac{u \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}}.$$

Когда $u = b$ и $v = b$, тогда по причинѣ что выдетъ какъ $CP = a$, такъ и $CK = a$, двѣ дуги AM, AN изчезаютъ; но алгебраическое количество $\frac{u \sqrt{u^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ обращается въ $\frac{1}{0}$, и потому произвольное постоянное количество c такъ же будетъ $= \frac{1}{0}$, изъ чего никакого заключенїя произвести не можно; чего ради употребимъ къ достиженїю того другое средство. Положивъ $v = u$, двѣ дуги AM, AN сдѣлаются равны между собою; пусть сїя общая ихъ величина будетъ дуга AT соотвѣтствующая абсциссѣ CH; и поелику вообще $\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}} = \frac{v}{b}$, то будетъ $\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}} = \frac{u}{b}$,

и откуда выдетъ $u = \sqrt{b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$, которую величину поставь въ общее выраженіе абсциссы $CP = \frac{a\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, и будешь имѣть абсциссу $CH = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; равнымъ образомъ поставивъ ту же величину въ алгебраическое выраженіе $\frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}}$; получишь совсѣмъ опредѣленное и извѣстное количество; пусть для краткости оное означится буквою k и пусть означится такъ же буквою h гиперболическая дуга AT, соотвѣтствующая извѣстной абсциссѣ CH; будетъ $2h = c + k$ и $c = 2h - k$, и слѣдственно вообще

$$AM + AN = 2h - k + \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}}, \text{ или}$$

$$2AT - AM - AN = k - \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}}.$$

И какъ $AT = AM - MT$ и $AT = AN + NT$, то будетъ

$$NT - MT = k - \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}}, \text{ или}$$

$$MT - NT = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 - b^2}} - k$$

И такъ разность сихъ двухъ гиперболическихъ дугъ, отъ точки T взятыхъ, есть количество алгебраическое.

4) сыскать длину логариѳмики.

§ Удержавъ тѣ же буквы и значенія ихъ, каковыя были въ предъидущемъ примѣчаніи въ вопросѣ о квадратурѣ логариѳмики, имѣемъ $y\partial x = m\partial y$, $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\partial y}{y}\sqrt{m^2 + y^2}$ и $s = \int \frac{\partial y}{y}\sqrt{m^2 + y^2} = m^2 \int \frac{\partial y}{y\sqrt{m^2 + y^2}} + \int \frac{y\partial y}{\sqrt{m^2 + y^2}} = \sqrt{m^2 + g^2} + \frac{m}{2}\log.\frac{\sqrt{m^2 + y^2} - m}{\sqrt{m^2 + y^2} + m} + c = \sqrt{m^2 + y^2} - m\log.\frac{m + \sqrt{m^2 + y^2}}{y} + c$.

Естьли хочешь имѣть длину дуги BM логариѳмики (черт. 30), то опредѣли произвольное постоянное количество c такъ что бы было $s = 0$, когда $y = 1$, и будетъ $BM = \sqrt{y^2 + m^2} - \sqrt{1 + m^2} + m\log.\frac{y(m + \sqrt{1 + m^2})}{m + \sqrt{y^2 + m^2}}$.

Естьли же желаешь имѣть длину дуги NM, содержащейся между двумя какими нибудь ординатами $PM = y$ и $QN = u$ логариѳмики, то опредѣли произвольное постоянное количество c такъ чтобы было $s = 0$, когда $y = u$, и будетъ длина дуги $NM = \sqrt{y^2 + m^2} - \sqrt{u^2 + m^2} + m\log.\frac{y(m + \sqrt{u^2 - m^2})}{u(m + \sqrt{y^2 + m^2})}$.

Вѣ предѣидущемѣ общемѣ выраженіи длины логариѳмики интегралѣ, дифференціала $\frac{m^2 \partial y}{\sqrt{m^2 + y^2}}$ взятѣ по преобразованію предложенному вѣ 5й статьѣ нашихѣ присовокупленій кѣ обратному способу предѣловѣ; но кѣ тому же заключенію достигнуть можно прямо, положивѣ $\sqrt{m^2+y^2} = z$. Вѣ самомѣ дѣлѣ изѣ того выдетѣ $y = \sqrt{z^2 - m^2}$, $\partial y = \frac{z \partial z}{\sqrt{z^2 - m^2}}$, $\partial s = \frac{\partial y \sqrt{m^2 + y^2}}{y} = \frac{z^2 \partial z}{z^2 - m^2} =$ $\partial z + \frac{m^2 \partial z}{z^2 - m^2}$, и наконецѣ $s = z + \frac{1}{2} m \log. \frac{z-m}{z+m} = \sqrt{m^2 + y^2}$ $- m \log. \frac{m + \sqrt{m^2 + y^2}}{y} + C$.

5) Сыскать длину обыкновенной эпициклоиды.

Вѣ примѣчаніи кѣ члену 151 му найдено $\partial z = \frac{2a(a+c)}{c} \partial \Phi \operatorname{cof.} \frac{1}{2}\Phi$; почему преобразивѣ оную формулу вѣ сію $\partial s = \frac{4a(a+c)}{c} \partial(\frac{1}{2}\Phi) \operatorname{cof.} \frac{1}{2}\Phi$, будешь имѣть $s = \frac{4a(a+c)}{c} \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi$, гдѣ произвольное постоянное количество есть нуль.

Пусть $\phi = \pi$, будетѣ $\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\pi = 1$, и длина полуэпициклоиды BbN $= \frac{4a(a+c)}{c}$ (черт. 16). Пусть $a = c$, выдетѣ оная длина $= 8a$.

Положимѣ вѣ формулѣ BbN $= \frac{4a(a+c)}{c}$, $c = \frac{1}{0}$, будетѣ длина полуциклоиды $= \frac{4a(\frac{1}{0} + a)}{\frac{1}{0}} = 4a$, какѣ вѣ самомѣ дѣлѣ и быть долженствуетѣ.

Послѣ сего мы можемѣ показать, что когда эпициклоида возмется за разверзающуюся кривую, тогда кривая разверзанія будетѣ эпициклоида же подобная первой, но имѣющая превратное вѣ разсужденіи ея положеніе. Вѣ самомѣ дѣлѣ, пусть BbN (черт. 34) будетѣ обыкновенная эпициклоида обвятая нитью, коя разверзаніемѣ своимѣ производитѣ кривую Bb'B', такѣ что прямая bTb' будучи касательная кѣ кривой BbN и равная дугѣ Bb, концемѣ своимѣ опредѣляетѣ точку b' оной кривой Bb'B'; мы имѣемѣ, удержавѣ у буквѣ a, c, x, y, ϑ и ϕ тѣ же значенія, каковыя онѣ имѣли вѣ примѣчаніи кѣ члену 150 и 151 му,
O P $= x = (a+c) \operatorname{cof.} \vartheta + a \operatorname{cof.} (\vartheta + \phi)$, или B P $= 2a + c - x = 2a + c - (a+c) \operatorname{cof.} \vartheta - a \operatorname{cof} (\vartheta + \phi)$, P$b$ $= y = (a+c) \operatorname{fin.} \vartheta + a \operatorname{fin.} (\vartheta + \phi)$, сверхѣ того B$b = bb' = s = \frac{4a(a+c)}{c} \cdot \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\phi$.

Изѣ сихѣ то трехѣ уравненій долженствуетѣ произвести свойство кривой Bb'B', относя ее сперва кѣ координатамѣ B$r = x'$ и $b'r = y'$, потомѣ кѣ координатамѣ B$p = x''$ и $pb' = y''$, и наконецѣ кѣ координатамѣ OP' $=$ X и P'b' $=$ Y.

Для перваго дѣйствія необходимо надлежитѣ опредѣлить уголѣ Pbb'; на сей конецѣ, притянувѣ bq параллельно Ob, нахожу что уголѣ Q$qb' =$

$AOQ = \vartheta$, уголъ $Qcb = \pi - acQ = \pi - \phi$, уголъ $cbq = \pi - \phi - \vartheta$ и уголъ $Qbq = \frac{1}{2}\phi + \pi - \phi - \vartheta = \pi - \vartheta - \frac{1}{2}\phi$; потому уголъ $qbR = QbR - Qbq = \frac{\pi}{2} - (\pi - \vartheta - \frac{1}{2}\phi) = -\frac{1}{2}\pi + \vartheta + \frac{1}{2}\phi$ и напослѣдокъ уголъ $Pbb' = Pbq + qbR = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + \vartheta + \frac{1}{2}\Phi = \vartheta + \frac{1}{2}\Phi$. И такъ $bK = bb'.\cos. b'bK = -bb.\cos. Pbb' = -s.\cos.(\vartheta + \frac{1}{2}\phi) = -\frac{4a(a+c)}{c}\sin.\frac{1}{2}\Phi\cos.(\vartheta + \frac{1}{2}\Phi) = -\frac{2a(a+c)}{c}.2\sin.\frac{1}{2}\Phi\cos.(\vartheta + \frac{1}{2}\Phi) =$
$-\frac{2a(a+c)}{c}(\sin.(\vartheta + \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi) - \sin.(\vartheta + \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2}\Phi)) =$
$-\frac{2a(a+c)}{c}(\sin.(\vartheta + \Phi) - \sin.\vartheta)$, $b'K = bb'.\sin. bb'K = bb'.\sin. Pbb' = \frac{4a(a+c)}{c}\sin.\frac{1}{2}\Phi\sin.(\vartheta + \frac{1}{2}\Phi) = \frac{2a(a+c)}{c}(\cos.\vartheta - \cos.(\vartheta + \Phi))$; и посему $Br = x' = Pb + bK = y + bK = (a+c)\sin.\vartheta + a\sin.(\vartheta + \Phi) - \frac{2a(a+c)}{c}(\sin.(\vartheta + \Phi) - \sin.\vartheta) = \frac{(a+c)(2a+c)}{c}\sin.\vartheta - \frac{a(2a+c)}{c}\sin.(\vartheta + \Phi)$, и $b'r = y' = b'K - BP = \frac{2a(a+c)}{c}(\cos.\vartheta - \cos.(\vartheta + \Phi)) + (a+c)\cos.\vartheta + a\cos.(\vartheta + \Phi) - (2a+c) = \frac{(a+c)(2a+c)}{c}\cos.\vartheta - \frac{a(2a+c)}{c}\cos.(\vartheta + \Phi) - (2a+c)$. Положи для краткости $\frac{2a+c}{c} = n$, будетъ

$x' = n(a+c)\sin.\vartheta - na\sin.(\vartheta + \Phi)$

$y' = n(a+c)\cos.\vartheta - na\cos.(\vartheta + \Phi) - (2a+c)$.

Теперь, поелику дуга $AN = \pi a$, будетъ уголъ $AON = \frac{\pi a}{c}$, и опустивъ изъ точки r на BS и $b'p$ перпендикуляры rg и rh, выдетъ, по причинѣ что уголъ $AON = rBg = rb'h$, въ треугольникѣ Brg, $gr = x'\sin.\frac{\pi a}{c}$, $Bg = x'\cos.\frac{\pi a}{c}$, и въ треугольникѣ $b'rh$, $hr = y'\sin.\frac{\pi a}{c}$, $b'h = y'\cos.\frac{\pi a}{c}$. И посему

$x'' = Bp = Bg - hr = x'\cos.\frac{\pi a}{c} - y'\sin.\frac{\pi a}{c}$

$y'' = pb' = gr + b'h = x'\sin.\frac{\pi a}{c} + y'\cos.\frac{\pi a}{c}$.

Первое изъ сихъ уравненій умноживъ на $\cos.\frac{\pi a}{c}$, а другое на $\sin.\frac{\pi a}{c}$, сложимъ одно съ другимъ, потомъ первое умноживъ на $\sin.\frac{\pi a}{c}$, а другое на $\cos.\frac{\pi a}{c}$, отнимемъ то первое отъ сего другаго; мы получимъ

$x' = y''\sin.\frac{\pi a}{c} + x''\cos.\frac{\pi a}{c}$, $y' = y''\cos.\frac{\pi a}{c} - x''\sin.\frac{\pi a}{c}$;

откуда, поставивъ вмѣсто x' и y' ихъ величины, выдетъ

$$y'' \sin.\tfrac{\pi a}{c} + x'' \cos.\tfrac{\pi a}{c} = n(a+c)\sin.\vartheta - na\sin.(\vartheta+\Phi),$$

$$y'' \cos.\tfrac{\pi a}{c} - x'' \sin.\tfrac{\pi a}{c} = n(a+c)\cos.\pi - na\cos.(\vartheta+\Phi) - (2a+c);$$

первое изъ сихъ уравненій умноживъ на $\cos.\frac{\pi a}{a}$, а другое на $\sin.\frac{\pi a}{c}$, отнимемъ сїе другое отъ перваго, потомъ первое умноживъ на $\sin.\frac{\pi a}{c}$, а другое на $\cos \frac{\pi a}{c}$, приложимъ одно къ другому; и мы будемъ имѣть

$$x'' = n(a+c)(\sin.\vartheta \cos.\tfrac{\pi a}{a} - \cos.\vartheta \sin.\tfrac{\pi a}{c})$$

$$- na(\sin.(\vartheta+\Phi)\cos.\tfrac{\pi a}{c} - \cos.(\vartheta+\Phi)\sin.\tfrac{\pi a}{c}) + (2a+c)\sin.\tfrac{\pi a}{c},$$

$$y'' = n(a+c)(\sin.\vartheta \sin.\tfrac{\pi a}{c} + \cos.\vartheta \cos.\tfrac{\pi a}{a})$$

$$- na(\sin.(\vartheta+\Phi)\sin.\tfrac{\pi a}{c} + \cos.(\vartheta+\Phi)\cos.\tfrac{\pi a}{c}) - (2a+c)\cos.\tfrac{\pi a}{c},$$ или

$$x'' = -n(a+c)\sin.(\tfrac{\pi a}{c} - \vartheta) - na\sin.(\vartheta+\Phi-\tfrac{\pi a}{c}) + (2a+c)\sin.\tfrac{\pi a}{c},$$

$$y'' = n(a+c)\cos.(\tfrac{\pi a}{c} - \vartheta) - na\cos.(\vartheta+\Phi-\tfrac{\pi a}{c}) - (2a+c)\cos.\tfrac{\pi a}{c}.$$

Теперь замѣтивъ, что $\frac{\pi a}{c} - \vartheta = \frac{a(\pi - \frac{c\vartheta}{a})}{c} = \frac{a(\pi - \frac{c}{a}.\frac{u}{c})}{c} = \frac{a(\pi - \frac{u}{a})}{c} = \frac{a(\pi-\Phi)}{c} = \frac{a}{c}.$ угол. Qcb, и означивъ сей уголъ Qcb чрезъ μ, будемъ имѣть $\frac{\pi a}{c} - \vartheta = \frac{a\mu}{c}$, $\vartheta = \frac{\pi a}{c} - \frac{a\mu}{c}$, $\vartheta + \Phi = \frac{\pi a}{c} - \frac{a\mu}{c} + \pi - \mu$ и $\vartheta + \Phi - \frac{\pi a}{c} = \pi - \mu - \frac{a\mu}{c}$. И потому выдетъ

$$x'' = -n(a+c)\sin.\tfrac{a\mu}{c} - na\sin.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}) + (2a+c)\sin.\tfrac{\pi a}{c},$$

$$y'' = n(a+c)\cos.\tfrac{a\mu}{c} + na\cos.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}) - (2a+c)\cos.\tfrac{\pi a}{c}.$$

И какъ $BS = (2a+c)\sin.\frac{\pi a}{c}$, $OS = (2a+c)\cos.\frac{\pi a}{c}$, то будетъ

$$X = OS + y'' = n(a+c)\cos.\tfrac{a\mu}{c} + na\cos.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}),$$

$$Y = BS - x'' = n(a+c)\sin.\tfrac{a\mu}{a} + na\sin.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}),$$ или

$$X = (\tfrac{(2a+c).a}{c} + 2a + c)\cos.\tfrac{a\mu}{c} + \tfrac{(2a+c)a}{c}\cos.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}),$$

$$Y = (\tfrac{(2a+c)a}{c} + 2a + c)\sin.\tfrac{a\mu}{c} + \tfrac{(2a+c)a}{c}\sin.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}),$$ или

положивъ $\frac{(2a+c)a}{c} = A$ и $2a + c = C$, такъ чтобъ было $\frac{a}{c} = \frac{A}{C}$,

$$X = (A+C)\cos.\tfrac{a\mu}{c} + A\cos.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}),$$

$$Y = (A+C)\sin.\tfrac{a\mu}{c} + A\sin.(\mu + \tfrac{a\mu}{c}).$$

гдѣ замѣтить надлежитъ, что $C = 2a + c$ есть радїусъ круга описаннаго разстоянїемъ OB отъ центра O до вершины B развертающейся эпициклоиды, и $A = \frac{(2a+c)a}{c}$ есть радїусъ круга описаннаго на продолженїи RR′ дїаметра QR круга производителя въ извѣстномъ его положенїи, по данной хордѣ $Rb' = bb' - bR = \frac{4a(a+c)}{c} \sin. \frac{1}{2}\varphi - 2a \sin. \frac{1}{2}\varphi = \frac{2a(2a+c)}{c} \sin. \frac{1}{2}\varphi$, ибо для подобїя треугольниковъ QbR, Rb′R′, будетъ $bR\ (= 2a \sin. \frac{1}{2}\Phi) : Rb'\ (= \frac{2a(2a+c)}{c} \sin. \frac{1}{2}\Phi) = cQ\ (= a) : c'R = \frac{(2a+c)a}{c}$.

Теперь, поелику $\mu =$ угл. $Qcb = a'cR$, будетъ $\mu = \frac{a'R}{A}$ или $a'R = A\mu$; потомъ, поелику $\mu = \frac{Qb}{a} = \frac{QN}{a} = \frac{QN}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{A'R}{C} \cdot \frac{C}{A} = \frac{A'R}{A}$, выдетъ $A'R = A\mu$; или иначе, поелику $A'OR = QON = \frac{\pi a}{c} - \frac{u}{c} = \pi - \frac{u}{a} \cdot \frac{c}{a} = \pi - \Phi : \frac{c}{a} = \mu : \frac{C}{A} = \frac{A\mu}{C}$, выдетъ $AR' = A\mu$. И такъ дуги $a'R$ и $A'R$ равны между собою, и изъ того слѣдуетъ, что кругъ A′BZ равный кругу $a'Rb'$ катясь по кругу A′RB дѣйствительно въ точкѣ B приметъ такое положенїе, каковое имѣетъ кругъ $a'Rb'$, то есть что точка A′ будетъ въ a', дїаметръ A′B′ въ $a'b'$ и конецъ его B′ въ b', и потому точка a' есть въ эпициклоидѣ подобной первой и имѣющей превратное положенїе въ разсужденїи оной. Но что бы сїе заключенїе произвести изъ уравненїй, то означимъ каждую изъ равныхъ дугъ $a'R$, $A'R$ буквою U; будетъ, попричинѣ что $a'R = A'R = A\mu$, $\mu = \frac{U}{A}$, $\frac{a\mu}{c} = \frac{U}{C}$, и наконецъ

$$X = (A + C) \cos. \frac{U}{C} + A \cos. \left(\frac{U}{A} + \frac{U}{C}\right),$$
$$Y = (A + C) \sin. \frac{U}{C} + A \sin. \left(\frac{U}{A} + \frac{U}{C}\right),$$

которыя уравненїя будучи тѣже самыя, что и уравненїя найденныя въ примѣчанїи къ члену 150 му, возвѣщаютъ тоже самое заключенїе, къ коему предъ симъ достигли и въ коемъ подобїе новой эпициклоиды съ развертающеюся основано, какъ и здѣсь, на уравненїи $\frac{A}{C} = \frac{a}{c}$.

6) Сыскать длину спирали Архимедовой.

Взявъ уравненїе сей кривой $2\pi z = a\beta$, и положивъ для краткости $\frac{a}{2\pi} = b$, такъ что бы было $z = b\beta$, будешь имѣть $\partial s = \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial\beta^2} = \frac{\partial z \sqrt{z^2 + b^2}}{b}$ и $s = \int \frac{\partial z \sqrt{z^2 + b^2}}{b}$, которой интегралъ, по сходству своему съ интеграломъ изображающимъ длину обыкновенной или Аполлонїевой параболы, найдется какъ показано было въ первомъ вопросѣ, и будетъ $s = \frac{z\sqrt{z^2 + b^2}}{2b} + \frac{b}{2} \log. \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2}}{b}$.

ИзЪ сего упоминаемаго нами сходства слѣдуетЪ, что длина спирали Архимедовой можетЪ опредѣлиться длиною параболы Аполлоніевой, и именно такимЪ образомЪ: естьли изЪ полюса на радіусѣ векторѣ z возставишь перпендикулярЪ и на ономЪ, какЪ оси, опишешь параметромЪ $2b$ параболу, то длина оной, усѣченная ординатою равною радіусу вектору z, будетЪ таже самая, что и длина спирали. Ибо означивЪ чрезЪ x абсциссу сей параболы и чрезЪ s' соотвѣтственную дугу оной, найдешь, попричинѣ уравненія $z^2 = 2bx$, $\partial s' = \frac{\partial z \sqrt{z^2 + b^2}}{b}$.

7) Найти длину спирали гиперболической.

ВзявЪ уравненіе сей кривой $z = \frac{b}{\mu - \beta}$ и сыскавЪ $\partial \beta = \frac{(\mu - \beta)\partial z}{z} = \frac{b\,\partial z}{z^2}$, будешь имѣть $\partial s = \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2} = \frac{\partial z}{z}\sqrt{b^2 + z^2}$ и $s = \int \frac{\partial z \sqrt{b^2 + z^2}}{z}$, которой интегралЪ по сходству своему сЪ интеграломЪ изображающимЪ длину логариѳмики, найдется какЪ показано было вЪ 4 мЪ вопросѣ, и будетЪ

$$s = \sqrt{b^2 + z^2} - b \log. \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{z} + c.$$

ИзЪ сего упоминаемаго нами сходства слѣдуетЪ, что длина гиперболической спирали опредѣляется длиною логариѳмики, у которой подкасательная равна подкасательной спирали b, и именно симЪ образомЪ: естьли c опредѣлится такЪ что бы $s = 0$, когда $z = 1$, то длина логариѳмической дуги, взятой отЪ ординаты равной единицѣ до ординаты равной радіусу вектору z, будетЪ таже самая, что и длина спиральной дуги, содержащейся между радіусами векторами, изЪ коихЪ одинЪ $= z$, а другой $= 1$. Естьли же c опредѣлится такЪ что бы было $s = 0$, когда $z =$ радіусу a круга производителя, то длина логариѳмической дуги, содержащейся между двумя ординатами, изЪ коихЪ одна z, а другая a, будетЪ таже самая, что и длина спиральной дуги, содержащейся между радіусомЪ векторомЪ и точкою, вЪ коей спираль сЪ кругомЪ производителемЪ пресѣкается. ВЪ выраженіи аналитическомЪ сія длина $= \sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{b^2 + a^2} + b \log. \frac{z(b + \sqrt{b^2 + a^2})}{a(b + \sqrt{b^2 + z^2})}$.

8) Сыскать длину спирали логариѳмической.

ВзявЪ уравненіе сей кривой $\beta = \frac{1}{ak} \log. z$ или $\frac{z\partial\beta}{\partial z} = \frac{1}{ak}$, имѣешь $\partial s = \frac{\partial z \sqrt{1 + a^2 k^2}}{ak}$, и потому $s = \frac{z\sqrt{1 + a^2 k^2}}{ak} + c$.

Естьли хочешь имѣть длину дуги BM (черт. 20) сей кривой, то опредѣли c такЪ что бы было $s = 0$, когда $z = UB = 1$, и будетЪ $BM = (z - 1)\frac{\sqrt{1 + a^2 k^2}}{ak}$. Естьли же желаешь знать отЪ точки M всю длину спирали, то положи $z = 0$, когда и $s = 0$, и выдетЪ оная длина $= \frac{z\sqrt{1 + a^2 k^2}}{ak} = UR$.

О измѣреніи поверьхностей тѣлъ вращенія.

(187) Вообразимъ, что весь XLVI чертежъ совершилъ около оси AC цѣлое обращеніе, и означимъ чрезъ S поверьхность описанную дугою AM, которая поверьхность будетъ имѣть разностію поясъ описанный дугою MM′. Поелику поверьхность описанная хордою $MM' = \pi (2y + \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и поверьхность описанная линеею LK, по причинѣ что $AB = 1$, $= 2\pi \Delta x$; то содержаніе между сими двумя поверьхностями будетъ $\frac{2y + \Delta y}{2 \Delta x} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и предѣлъ онаго содержанія $\frac{y\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}{\partial x}$, Но сіе самое содержаніе тѣмъ болѣе приближается къ $\frac{\Delta S}{2\pi \Delta x}$, чѣмъ точка M′ будетъ ближае къ точкѣ M, то есть что оное имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и содержаніе $\frac{\Delta S}{2\pi \Delta x}$; слѣдовательно означивъ сей предѣлъ чрезъ $\frac{\partial S}{2\pi \partial x}$, получишь формулу $\partial S = 2\pi y . \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$, которую употреблять надлежитъ при сыскании поверьхности всякаго отъ обращенія произходящаго тѣла (*).

Напримѣръ естьли отъ обращенія произходящее тѣло будетъ шаръ, коего радіусъ r; то выдетъ $\partial S = 2\pi r \partial x$ и $S = 2\pi r x + c$. Здѣсь $2\pi r x$ есть поверьхность сегмента шара, коего стрѣла x; и потому, естьли въ семъ выраженіи положишь $x = 2r$, то будешь имѣть поверьхность цѣлаго шара $4\pi r^2$. Но естьли хочешь найти величину пояса, содержащагося между двумя малыми кругами, изъ коихъ ближайшій къ екватору от-

(*) Формула служащая ко опредѣленію поверьхности тѣлъ произходящихъ отъ обращенія кривыхъ линей, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки, найдется, поставивъ въ сысканную авторомъ $z \sin. \beta$ вмѣсто y и $\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$ вмѣсто $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ и будетъ $\partial S = 2\pi z \sin. \beta \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}$.

даленъ отъ онаго на количество b, а другой на количество d, то надлежитъ поступить такимъ образомъ, чтобы выраженіе буквы S было нуль, когда $x = r - d$, и что дастъ $2\pi r(r - d) + c = o$ и $S = 2\pi r(d - r + x)$; потомъ положивъ $x = r - b$, будешь имѣть величину искомой поверьхности $2\pi r(d - b)$.

При сысканіи поверьхности параболоида, котораго параметръ a, будешь имѣть $\partial S = \pi \partial x \sqrt{4ax + a^2}$ и $S = \frac{\pi}{6a}(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} + c$.

Естьли хочешь знать сію поверьхность отъ вершины A, то найдешь, что оная будетъ $= \frac{\pi}{6a}(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi a^2}{6}$. (*)

(*) Пусть требуется еще найти поверьхность еллипсоида, котораго половина большей оси a, меньшей b и ексцентрицитетъ e, имѣемъ, полагая начало абсциссъ въ центрѣ, $\partial S = 2\pi y \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = 2\pi y \partial x \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} = 2\frac{b}{a}\pi y \partial x \sqrt{\frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}{a^2}} : \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2\pi b \partial x}{a}\sqrt{a^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2}} = \frac{2\pi b e \partial x}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}$, которой формулы интегралъ, и слѣдственно такъ же поверьхность описанная дугою MD еллипсиса (черт. 29), удобно найдется по предложенному въ 5й статьѣ нашихъ присовокупленій къ обратному способу предѣловъ. Но кромѣ того мы можемъ изобразить оной интегралъ или сію поверьхность квадратурою круга описаннаго радіусомъ $CG = \frac{a^2}{e}$; ибо проведши ординату $PN = z$, имѣемъ $CPNH = \int z\partial x = \int \partial x \cdot \sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}$, и слѣдственно упомянутой интегралъ или поверьхность описанная дугою MD еллипсиса и равная $\frac{2\pi be}{a^2}\int \partial x \sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}$, будетъ $= \frac{2\pi CD}{CG}$. CPNH.

Естьли хочешь имѣть поверьхность описанную дугою AM, то стоитъ токмо замѣтить, что оная $= \frac{2\pi be}{a^2}\int - \partial x \sqrt{\frac{e^4}{e^2} - x^2}$, ибо изъ того, по причинѣ что $\int - \partial x \sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2} = PGN$, слѣдуетъ, что та

поверьхность есть $\frac{2\pi CD}{CG}$. PGN.

Когда въ предъидущемъ выраженіи $\frac{2\pi CD}{CG}$. CPNH, или и въ семъ $\frac{2\pi CD}{CG}$. PGN какая нибудь часть круга CPNH или PGN сдѣлается четвертью CGH онаго, то выраженіе сіе обратится въ $\frac{2\pi CD}{CG}$. CGH и изобразитъ поверьхность описанную четвертью AD еллипсиса, или все тоже, поверьхность полуеллипсоида.

Въ заключеніе сего остается замѣтить, что когда изъ фокуса F на оси еллипсиса возставится перпендикуляръ FI до пресѣченія въ I съ окружностію AmB извѣстнаго круга, и потомъ другой AL до пресѣченія съ прямою CL, изъ C чрезъ I протянутою, то CL будетъ радіусъ того круга, по квадратурѣ коего поверьхность еллипсоида опредѣляется. Ибо CF $(= e)$: CA $(= a)$ = CI $(= a)$: CL, и CL $= \frac{a^2}{e}$.

Пусть требуется найти поверьхность гиперболоида, котораго половина первой оси a, второй b и ексцентрицитетъ e; мы имѣемъ, полагая начало абсциссъ въ центрѣ; $\partial S = \frac{2\pi be}{a^2}\partial x\sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}}$, которой формулы интегралъ удобно найдется по упомянутой статьѣ нашихъ присовокупленій. Въ прочемъ положи $\sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}}$ или $\sqrt{x^2 - h^2} = x - z$, гдѣ h взято вмѣсто $\frac{a^2}{e}$; будетъ $x = \frac{z^2 + h^2}{2z}$, $\partial x = \frac{\partial z}{2} - \frac{h^2\partial z}{2z^2}$, $\partial x\sqrt{x^2 - h^2}$ $= \partial x(x - z) = x\partial x - z\partial x = x\partial x - \frac{z\partial z}{2} + \frac{h^2\partial z}{2z}$ и

$\int\partial x\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{h^2}{2}\log. z + c = \frac{x^2}{2} - \frac{(x - \sqrt{x^2 - h^2})^2}{4}$ $+ \frac{h^2}{2}\log.(x - \sqrt{x^2 - h^2}) + c = \frac{h^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - h^2} + \frac{h^2}{2}\log.(x^2 - \sqrt{x - h^2})$ $+ c$. И такъ $S = \frac{2\pi be}{a^2}\left(\frac{a^4}{4e^2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}} + \frac{a^4}{2e^2}\log.\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}}\right)\right)$ $+ c = \frac{\pi ba^2}{2e} + \frac{\pi bx\sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{e}\log.\left(\frac{ex - \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{e}\right) + c.$

Естьли $S = o$, когда $x = a$, то $c = -\frac{\pi ba^2}{2e} - \pi b^2 -$ $\frac{\pi a^2 b}{e}\log.\frac{(e-b)a}{e}$, и $S = \frac{\pi bx\sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a^2} - \pi b^2 +$ $\frac{\pi a^2 b}{e}\log.\frac{ex - \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a(e-b)}$.

Наконецъ пусть, для поясненія примѣромъ формулы $\partial s = 2\pi z \sin.\beta\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}$, требуется опредѣлить поверьхность происшедшую отъ обращенія кривой линеи, коея уравненіе $z = \frac{p}{2(1 + \cos.\beta)}$ или $z =$

$\frac{p}{4 \operatorname{cof} \frac{1}{2} \beta^2}$, и коя не иное что есть, какЪ парабола кЪ фокусу отнесенная (смотри первое примѣчанїе кЪ члену 37); мы имѣемЪ $\partial \beta = \frac{4 \partial z \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \beta^3}{p \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \beta}$, $z^2 \partial \beta^2 = \frac{\partial z^2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \beta^2}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \beta^2}$, $\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2} = \frac{\partial z}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \beta}$, $\partial S = 2 \pi z \operatorname{fin.} \beta. \frac{\partial z}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \beta} = 4 \pi z \partial z \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \beta = 2 \pi p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \partial z$, и $S = \frac{4 \pi p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}}{3} + c$. Естьли $S = 0$, когда $z = \frac{p}{4}$, то выдетЪ $c = -\frac{\pi p^2}{6}$ и $S = \frac{4 \pi p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\pi p^2}{6}$. И какЪ $z = x + \frac{p}{4}$, то будетЪ $S = \frac{\pi}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi p^2}{6}$; что совершенно сходствуетЪ сЪ найденнымЪ авторомЪ выраженїемЪ для поверьхности параболоида.

О измѣреніи толщинъ тѣлъ вращенія.

(188) Я означу чрезъ T тѣло произведенное пространствомъ APM во время его обращенія около оси AC; оное тѣло имѣетъ разностію другое произведенное пространствомъ MPP M′ ограниченнымъ дугою MM′. Потомъ поелику усѣченный конусъ произведенный трапеціею MPP′M′ $= \frac{\pi}{3}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)\Delta x$ и цилиндръ произведенный прямоугольникомъ LPP K $= \pi \Delta x$, содержаніе между сими двумя тѣлами будетъ $\frac{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}{3}$ и предѣлъ онаго содержанія y^2. Но сіе самое содержаніе тѣмъ болѣе приближается къ $\frac{\Delta T}{\pi \Delta x}$, чѣмъ Δx будетъ меньше; слѣдовательно означивъ чрезъ $\frac{\partial T}{\pi \partial x}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta T}{\pi \Delta x}$, будешь имѣть формулу $\partial T = \pi y^2 \partial x$, способную къ найденію толщины всякаго отъ обращенія произходящаго тѣла. (*).

Естьли данное тѣло шаръ, то получишь $\partial T = \pi(2rx - x^2)\partial x$, и толщина сегмента, коего стрѣла x, будетъ $\pi(rx^2 - \frac{x^3}{3}$, ибо T должно быть нуль, когда $x = 0$; положивъ

(*) Формула служащая ко опредѣленію толщины тѣлъ произходящихъ отъ обращенія кривыхъ линей, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки, сыщется такимъ образомъ.

Пусть толщина тѣла произходящаго отъ обращенія площади AMU $=$ P (черт. 15), произходящаго отъ обращенія площади AMP $=$ Q и произходящаго отъ обращенія площади UMP $=$ R; будетъ $P = Q + R$ и $\partial P = \partial Q + \partial R = \pi y^2 \partial x + \partial(\frac{\pi y^2 v}{3}) = \pi y^2 \partial x - \frac{\pi y^2 \partial x}{3} + \frac{2\pi v y \partial y}{3} = \frac{2\pi}{3}(y^2 \partial x + v y \partial y) = \frac{2\pi}{3}(z^2 \sin.\beta^2 (z\partial\beta \sin.\beta - \partial z \cos.\beta) + z^2 \sin.\beta \cos.\beta(z\partial\beta \cos.\beta + \partial z \sin.\beta)) - \frac{2\pi}{3}(z^3 \partial\beta \sin.\beta^3 + z^3 \partial\beta \sin.\beta \cos.\beta^2) = \frac{2\pi}{3} z^3 \partial\beta \sin.\beta$.

же въ семъ выраженіи $x = 2r$, выдетъ толщина самаго шара $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Естьли тѣло отъ обращенія произходящее параболоидъ, коего параметръ $= a$, то будетъ $\partial T = \pi a x \partial x$ и $T = \frac{\pi a x^2}{2} + c$. И естьли требуется толщина отрѣзка содержащагося между ординатою чрезъ фокусъ проходящею и другою какою нибудь, то въ семъ случаѣ T должно быть нуль, когда $x = \frac{a}{4}$, и сіе даетъ искомую толщину $\frac{\pi a}{2}(x^2 - \frac{a^2}{16})$; и естьли сей отрѣзокъ долженствуетъ имѣть высоту b, то положи $x = \frac{a}{4} + b$, и толщина его будетъ $\frac{\pi a}{2}(\frac{ab}{2} + b^2)$. Естьли тѣло произведено будетъ обращеніемъ еллиптическаго или гиперболическаго пространства около оси $2a$, то по причинѣ что $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)$, найдется $\partial T = (\frac{\pi b^2}{a^2})\, 2ax \mp x^2)\partial x$ и $T = \frac{\pi b^2}{3a^2}(3ax^2 \mp x^3) + c$. (*).

(*) Здѣсь присовокупимъ еще примѣръ для поясненія найденной въ предъидущемъ примѣчаніи формулы $\partial P = \frac{2\pi}{3} z^3 \partial \beta \sin. \beta$, а именно: требуется опредѣлить толщину тѣла произходящаго отъ обращенія кривой линеи, коея уравненіе $z = \frac{p}{4 \cos. \frac{1}{2}\beta^2}$; мы имѣемъ $\partial \beta = \frac{4\, \partial z \cos. \frac{1}{2}\beta^3}{p \sin. \frac{1}{2}\beta}$, $\partial P = \frac{8\pi}{3} z^3 \partial z. \frac{\sin. \beta. \cos. \frac{1}{2}\beta^3}{p \sin. \frac{1}{2}\beta} = \frac{16\pi}{3p} z^3 \partial z \cos. \frac{1}{2}\beta^4 = \frac{\pi p}{3} z \partial z$, и $P = \pi z^2. \frac{p}{6} + c$. Естьли $P = 0$, когда $z = \frac{p}{4}$, то будетъ $c = -\frac{\pi p^2}{16}.\frac{p}{6}$ и $P = \pi(z^2 - \frac{p^2}{16}).\frac{p}{6} = \pi(x^2 + \frac{px}{2}).\frac{p}{6}$. И когда къ сему выраженію толщины пораболоидическаго сектора приложится толщина конуса $\frac{1}{3}px(x - \frac{p}{4})$, содержащаяся между поверьхностію описанною радіусомъ векторомъ z и площадью описанною ординатою y, то выдетъ толщина параболоида $T = \frac{\pi p x^2}{2}$; что совершенно сходствуетъ съ выраженіемъ найденнымъ автором.

ГЛАВА V.

Употребленіе способа предѣловъ при доказательствѣ началъ механики.

О центрѣ тяжести.

(189) Всѣ тѣла тяжелы; оставленныя сами по себѣ низходятъ по направленіямъ перпендикулярнымъ къ поверьхности земли, или по направленіямъ стремящимся почти въ центръ сея планеты, которая, какъ извѣстно, есть сфероидъ весьма мало отъ шара отступающій. Но на поверьхности земли находящіяся тѣла обыкновенно имѣютъ столь малое протяженіе, что во все нѣтъ надобности принимать въ разсужденіе весьма малые углы дѣлаемые направленіями составляющихъ ихъ частей, приемлемыхъ за малыя тяжелыя тѣла. И потому неопасаясь никакой чувствительной погрѣшности, можно почитать всѣ сіи направленія за параллельныя. Такъ же, хотя тяжесть не равно дѣйствуетъ при различныхъ разстояніяхъ отъ центра земли, но прибавляется или уменьшается въ обратномъ содержаніи квадратовъ сихъ разстояній, однако не опасаясь никакой чувствительной погрѣшности, можно не принимать въ разсужденіе разности имѣющейся между тяжестію одной частицы и тяжестію другой того же тѣла. И такъ тяжесть всѣхъ частицъ вещества мы будемъ почитать за силу постоянную, и направленія тяжестей всѣхъ частей того же тѣла за параллельныя.

И поелику въ сочиненіяхъ о Статикѣ доказывается, что когда силы параллельны, тогда какое бы положеніе какому ни-

есть числу связанныхъ тѣлъ дано ни было, лишь бы только оныя тѣла сохраняли между собою тѣ же разстоянія, направленія равнодѣйствующей силы всегда пресѣкутся въ той же точкѣ; то въ каждомъ тѣлѣ есть таковая точка, что оное повѣшенное на веревкѣ, которой продолженное направленіе проходитъ чрезъ сію точку, пребываетъ во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ неподвижно. Сія то точка наименована *центромъ тяжести*.

(190) Вошло во употребленіе называть *моментами* произведенія силъ умноженныхъ на разстоянія ихъ направленій къ одной какой нибудь точкѣ, линеи или плоскости, и доказывается что когда силы параллельны, тогда, естьли онѣ находятся по одну и ту же сторону точки, линеи или плоскости, сумма ихъ особенныхъ моментовъ равна моменту равнодѣйствующей силы; естьли же съ разныхъ сторонъ, то разность имѣющаяся между суммою моментовъ силъ находящихся съ одной стороны и суммою моментовъ силъ пребывающихъ съ другой, равна моменту равнодѣйствующей силы.

Положивъ сіе, и принявъ кривую линею AME (черт. XLVII) за тѣло тяжелое, составленное изъ частей, какова есть MM′, вообразимъ себѣ двѣ взаимно перпендикулярныя оси AB, AD; будетъ моментъ всей линеи AME въ разсужденіи каждой изъ сихъ осей равенъ суммѣ моментовъ всѣхъ ея частей въ разсужденіи каждой изъ тѣхъ же осей. Тоже сказать можно о пространствѣ ABE, о поверьхности описанной дугою AE во время обращенія чертежа около оси AB, и о самомъ тѣлѣ произведенномъ въ продолженіе того же обращенія пространствомъ ABE.

(191) Я возьму на AE неопредѣленную дугу AM и воображу себѣ, что центръ тяжести сея дуги находится въ C, и что центръ тяжести ея разности MM′ въ C′; потомъ я про-

тяну къ двумъ осямъ AB, AD параллельныя CK и CO, C′R и C′S. Явствуетъ, что моменты AM. CK, AM. CO имѣютъ разностями MM′. C′R, MM′. C′S, то есть, что $\frac{\Delta (AM.CK)}{\Delta AM} = C'R$ и что $\frac{\Delta (AM.CO)}{\Delta AM} = C'S$. Но когда $\Delta x = o$, тогда CR′ сдѣлается = AP и C′S учинится = PM; слѣдовательно, означивъ чрезъ s дугу AM, выдетъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta (s.CK)}{\Delta s} = x$ и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta (s.CO)}{\Delta s} = y$; откуда найдутся CK, CO, и тѣмъ опредѣлится положеніе центра тяжести дуги AM.

Положимъ, что C и C′ будутъ центры тяжести пространствъ APM, MPPM; будетъ

$$\frac{\Delta (APM.CK)}{\Delta APM} = C'R,\ \frac{\Delta (APM.CO)}{\Delta APM} = C'S.$$

Но когда $\Delta x = o$, тогда C′R сдѣлается = AP и C′S учинится = $\frac{PM}{2}$, понеже центръ тяжести прямой линеи находится на ея срединѣ; слѣдовательно, означивъ чрезъ E пространство APM, выдетъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta (E.CK)}{\Delta E} = x$ и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta (E.CO)}{\Delta E} = \frac{y}{2}$ (*).

(*) Изъ сихъ двухъ предложеній слѣдуетъ Гульденово правило о сысканіи поверьхностей и толщинъ отъ обращенія произходящихъ тѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Когда предѣлъ содержанія $\frac{\Delta (s.CO)}{\Delta s} (= y) = \frac{\partial (s.CO)}{\partial s}$, то будетъ $\partial (s.CO) = y \partial s$ и $\int 2\pi.\partial (s.CO) = \int 2\pi y \partial s$; но $\int 2\pi \partial (s.CO) = 2\pi.CO.s$ и $\int 2\pi y \partial s \ (= \int 2\pi y \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2})$ по члену 187 есть поверьхность описанная кривою линеею AM; слѣдовательно поверьхность отъ обращенія произходящаго тѣла равна дугѣ кривой линеи AM (= s) умноженной на путь 2π. CO ея центра тяжести C.

2) Такъ же, когда предѣлъ содержанія $\frac{\Delta (E.CO)}{\Delta E} (= \frac{y}{2}) = \frac{\partial (E.CO)}{\partial E}$, то будетъ $\partial (E.CO) = \frac{y}{2} \partial E = \frac{1}{2} y \partial x = \frac{y^2}{2} \partial x$, и $\int 2\pi.\partial (E.CO) =$

Центры тяжести поверьхностей описанныхъ дугами AM, MM′ и тѣлъ произведенныхъ пространствами APM, MPP′M′, во время обращенія чертежа около оси AB, будутъ находиться на сей самой оси. И такъ пусть O и S будутъ центры тяжести поверьхностей описанныхъ дугами AM, MM′; означивъ чрезъ S поверьхность описанную дугою AM, будешь имѣть $\frac{\Delta (S.\,AO)}{\Delta S} = SA$, и когда $\Delta x = o$, предѣл. содержанія $\frac{\Delta (S.\,AO)}{\Delta S} = x$.

Естьли точки O и S будутъ центры тяжести тѣлъ произведенныхъ пространствами APM, MPP′M′; то означивъ чрезъ Σ тѣло произведенное пространствомъ APM, будешь имѣть $\frac{\Delta (\Sigma.\,AO)}{\Delta \Sigma} = SA$, и когда $\Delta x = o$, предѣл. содержанія $\frac{\Delta (\Sigma.\,AO)}{\Delta \Sigma} = x$. (*)

$\int 2\pi \frac{y^2}{2} \partial x = \int \pi y^2 \partial x$; но $\int 2\pi \partial (E.\,CO) = 2\pi.\,CO.\,E$ и $\int \pi y^2 \partial x$ по члену 188 есть толщина произведенная пространствомъ APM; слѣдовательно толщина отъ обращенія произходящаго тѣла равна пространству APM ($= E$) умноженному на путь $2\pi.\,CO$ его центра тяжести.

(*) Изложимъ здѣсь подобныя формулы для кривыхъ линей, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки.

1) Пусть разстояніе центра тяжести дуги $AM = s$ (черт. 15) до непремѣнной линеи $UA = p$, и разстояніе того же центра до перпендикулярной къ оной линеи GH, которая отъ U въ извѣстномъ разстояніи a находится, $= q$; будетъ $p = \frac{\int y \partial s}{s} = \frac{\int z \sin.\beta \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}{s}$ и $q = \frac{\int x \partial s}{s} = \frac{\int (a - z \cos.\beta).\partial s}{s} = a - \frac{\int z \cos.\beta \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}{s}$, то есть разстояніе сего центра отъ полюса $U = \frac{\int z \cos.\beta \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}{s}$.

2) Положимъ, что квадратура $APM = Q$, $PMU = R$ и $AMU = P$; и что разстоянія ихъ центровъ тяжести отъ линеи UA суть q, r и p, и отъ линеи GH суть q', r' и p'; будетъ, полагая G началомъ координатъ,

$$p = \frac{Qq + Rr}{Q + R} = \frac{\int \frac{1}{2} y \partial Q + \int \partial (\frac{1}{3} y \cdot \frac{yv}{2})}{P} =$$

$$\frac{\int (3 y^2 \partial x + \partial (y^2 v))}{6 P} = \frac{\int (y^2 \partial x + y v \partial y)}{3 P} =$$

$$\frac{\int (z^2 \sin. \beta^2 (z \partial \beta \sin. \beta - \partial z \cos. \beta) + z^2 \sin. \beta \cos. \beta (z \partial \beta \cos. \beta + \partial z \sin. \beta))}{3 P} =$$

$$\frac{\int z^3 \partial \beta \sin. \beta}{3 P}.$$

Потомъ $p' = \dfrac{Qq' + Rr'}{Q + R} = \dfrac{\int x \partial Q + \int \partial (\frac{yv}{2} (x + \frac{1}{3} v))}{P} =$

$$\frac{\int (6xy\partial x + \partial (yv(3x + v)))}{6 P} = \frac{\int (6xy\partial x + yv(3\partial x + \partial v) + y(3x + v)\partial v + v(3x + v)\partial y)}{6 P} =$$

$$\frac{\int (y (3x + v) \partial x + v (3x + v) \partial y)}{6 P} = \frac{\int (3a - 2v)(y \partial x + v \partial y)}{6 P} =$$

$\dfrac{\int (3a - 2z \cos. \beta) z^2 \partial \beta}{6 P} = \dfrac{a \int \frac{z^2 \partial \beta}{2}}{P} - \dfrac{\int z^3 \partial \beta \cos. \beta}{3 P} = a - \dfrac{\int z^3 \partial \beta \cos. \beta}{3 P}$; то есть разстоянїе сего центра отъ полюса $U = \dfrac{\int z^3 \partial \beta \cos. \beta}{3 P}$.

3) Пусть разстоянїе центра тяжести поверьхности S, описанной дугою AM около прямой UAG, отъ точки $G = q$; будетъ $q = \dfrac{\int x \partial S}{S} = \dfrac{\int (a - z \cos \beta) \partial S}{S} = a - \dfrac{2 \pi \int z^2 \sin. \beta \cos. \beta \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}{S}$, то есть разстоянїе сего центра отъ полюса $U = \dfrac{\pi \int z^2 \sin. 2 \beta \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \beta^2}}{S}$.

4) Положимъ что тѣло произведенное площадью $APM = Q$, тѣло произведенное площадью $UPM = R$ и тѣло произведенное площадью $UAM = T$, и что разстоянїе центра тяжести отъ точки G перваго тѣла $= q$, втораго $= r$ и третьяго $= t$; будетъ

$$t = \frac{Qq + Rr}{Q + R} = \frac{\int x \partial Q + \int \partial (\frac{\pi y^2 v}{3} (x + \frac{v}{4}))}{T} =$$

$$\frac{\int (12\pi x y^2 \partial x + \pi \partial (y^2 v (4x + v)))}{12 T} = \frac{\pi \int (12 x y^2 \partial x + y^2 v (4 \partial x + \partial v) + y^2 (4x + v) \partial v + 2 y v (4x + v) \partial y)}{12 T} =$$

$$\frac{\pi \int (8 x y^2 \partial x + 2 y^2 v \partial x + 2 y v (4x + v) \partial y)}{12 T} = \frac{\pi \int (4x + v)(y^2 \partial x + y v \partial y)}{6 T} =$$

$$\frac{\pi \int (4a - 3z \cos. \beta) z^3 \partial \beta \sin. \beta}{6 T} = \frac{a \cdot \int \frac{2 \pi}{3} z^3 \partial \beta \sin. \beta}{T} - \frac{\pi \int z^4 \partial \beta \sin. \beta \cos. \beta}{2 T} =$$

$a - \dfrac{\pi \int z^4 \partial \beta \sin. 2 \beta}{4 T}$, то есть разстоянїе сего центра отъ полюса $U = \dfrac{\pi \int z^4 \partial \beta \sin. 2 \beta}{4 T}$.

(162) Ежели AM будетъ дуга круга имѣющаго радїусъ a, то есть ежели $y = \sqrt{2ax - x^2}$, то означивъ чрезъ $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \Sigma}{\partial x}$ предѣлы содержаній $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta s}{\Delta x}, \frac{\Delta E}{\Delta x}, \frac{\Delta S}{\Delta x}, \frac{\Delta \Sigma}{\Delta x}$, будешь имѣть $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a-x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{\partial E}{\partial x} = \sqrt{2ax - x^2}$, $\frac{\partial S}{\partial x} = 2\pi a$, $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = \pi(2ax - x^2)$. И потому предѣл. содержанія $\frac{\Delta(s.CK)}{\Delta x} = \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{a(a-x)}{\sqrt{2ax - x^2}}$, откуда $s.CK = as - ay$ и $CK = a - \frac{ay}{s}$; предѣл. содержанія $\frac{\Delta(s.CO)}{\Delta x} = a$, откуда $s\,CO = ax$ и $CO = \frac{ax}{s}$; предѣл. содержанїя $\frac{\Delta(E.CK)}{\Delta x} = x\sqrt{2ax - x^2} = a\sqrt{2ax - x^2} - (a - x)\sqrt{2ax - x^2}$, откуда $E\,CK = aE - \frac{y^3}{3}$ и $CK = a - \frac{y^3}{3E}$; предѣл. содержанїя $\frac{\Delta(E.CO)}{\Delta x} = ax - \frac{x^2}{2}$, откуда $E.CO = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{2.3}$ и $CO = \frac{3ax^2 - x^3}{2.3.E}$; предѣл. содержанія $\frac{\Delta(S.AO)}{\Delta x} = 2\pi ax$, откуда $S.AO = \pi ax^2$ и $AO = \frac{x}{2}$; предѣл. содержанія $\frac{\Delta(\Sigma.AO)}{\Delta x} = \pi(2ax^2 - x^3)$, откуда $\Sigma.AO = \pi(\frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4})$ и $AO = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x}$.

Произвольныя постоянныя количества мы здѣсь опредѣляли изъ того, что положивъ $x = 0$, каждой изъ сихъ моментовъ равенъ нулю. Естьли въ выраженіяхъ разстояній CK, AO положимъ $x = 2a$, $y = 0$, то найдется, что центръ тяжести окружности круга, самаго круга, поверьхности шара и самаго шара, приемлемыхъ за однородныя тѣла, будетъ находиться въ центрѣ самой величины.

(163). Естьли дуга AM принадлежитъ къ параболѣ, которой уравненіе $y^2 = ax$; то по причинѣ что $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$, будешь имѣть предѣл. содержанія $\frac{\Delta(s.CK)}{\Delta x} = \frac{x\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$. Пусть A неопредѣленное постоянное количество и X неизвѣстная функція абсциссы x, и пусть чрезъ $\frac{\partial X}{\partial x}$ изображенъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta X}{\Delta x}$; положи $\frac{x\sqrt{4ax + x^2}}{2\sqrt{ax}} = A.\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}$, изъ того найдется $\frac{\partial X}{\partial x} = (x - A)\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$. Мы положимъ, что X будетъ сего вида

B $(4ax + a^2)^m (ax)^n$, гдѣ B неопредѣленное предстоящее, которое опредѣлить надлежитъ, такъ какъ и числа m и n; тогда мы получимъ $(x - A)\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}} = B(4ma(4ax + a^2)^{m-1}(ax^n) + na(4ax + a^2)^m (ax)^{n-1})$, и раздѣливъ обѣ части сего уравненія на $\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$, $x - A = 8maB(4ax + a^2)^{m-\frac{3}{2}}(ax)^{n+\frac{1}{2}} + 2naB(4ax + a^2)^{m-\frac{1}{2}}(ax)^{n-\frac{1}{2}}$. И понеже сіи двѣ части уравненія должествуютъ быть тожественны, надлежитъ, чтобы во второй не находилося иной степени отъ x, кромѣ первой; что неминуемо послѣдуетъ, когда $m = \frac{3}{2}$ и $n = \frac{1}{2}$, и тогда выдетъ $x - A = 16a^2Bx + a^3B$, откуда извлечешь $B = \frac{1}{16a^2}$, $A = -\frac{a}{16}$. И такъ $X = \frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{16a^2}\sqrt{ax}$, и s. CK $=$ $\frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{10a^2}\sqrt{ax} - \frac{as}{16}$.

Изъ уравненія предѣл. содержанія $\frac{\Delta(s.CO)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2}$, извлечется удобнѣе величина момента $s.CO = \frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{12a} - \frac{a^2}{12}$; здѣсь, какъ и въ предъидущихъ изчисленіяхъ, равно какъ и въ слѣдующихъ, произвольное постоянное количество опредѣляется изъ того, что положивъ $x = 0$, моментъ равенъ нулю. Мы поступимъ далѣе въ чиненіи вставливаній извлекаемыхъ изъ уравненія параболы, и мы будемъ имѣть предѣл. содержанія $\frac{\Delta(\Sigma.CK)}{\Delta x} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ и $CK = \frac{3}{5}x$; предѣл. содержанія $\frac{\Delta(\Sigma.CO)}{\Delta x} = \frac{ax}{2}$ и $CO = \frac{3}{8}\sqrt{ax}$; предѣл. содержанія $\frac{\Delta(S.AO)}{\Delta x} = \pi x\sqrt{4ax + a^2}$, и $S.AO = \frac{\pi}{60a^2}(6ax - a^2)(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi a^3}{60}$; предѣл. содержанія $\frac{\Delta(\Sigma.AO)}{\Delta x} = \pi a x^2$, и $\Sigma.AO = \frac{\pi a x^3}{3}$. (*)

(*) Къ опредѣленію момента s CK гораздо скорѣе и прямѣе достигнуть можно слѣдующимъ образомъ.

Поелику $s \cdot CK = \int \frac{x\partial x\sqrt{4ax+a^2}}{2\sqrt{ax}} = \int \partial x \sqrt{x^2 + \frac{ax}{4}}$, то положивъ $\frac{a}{8} = b$ и, $x + b = z$, будетъ $s \cdot CK = \int \partial x \sqrt{x^2 + 2bx} = \int \partial z \sqrt{z^2 - b^2} = \int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}} - b^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}}$; и какъ по 5й статьѣ нашихъ къ обратному способу предѣловъ присовокупленій $\int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}} = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 - b^2} + \frac{1}{2} b^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}}$ и $\int \frac{\partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}} = \log. (z + \sqrt{z^2 - b^2})$, то выдетъ $s \cdot CK = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 - b^2} - \frac{1}{2} b^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{z^2 - b^2}} = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 - b^2} - \frac{1}{2} b^2 \log. (z + \sqrt{z^2 - b^2}) + c = \frac{1}{2}(x + b)\sqrt{x^2 + 2bx} - \frac{1}{2} b^2 \log. (x + b + \sqrt{x^2 + 2bx}) + c$; гдѣ чтобы опредѣлить произвольное постоянное количество c, положи $x = 0$, когда и $s \cdot CK = 0$, и получишь $c = \frac{1}{2} b^2 \log. b$ и $s \cdot CK = \frac{1}{2}(x + b)\sqrt{x^2 + 2bx} - \frac{1}{2} b^2 \log. \frac{x + b + \sqrt{x^2 + 2bx}}{b}$, которое выраженіе съ найденнымъ авторомъ совершенно сходствуетъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда въ примѣчаніи къ члену 186 му найдено было для s сіе выраженіе $\frac{y\sqrt{y^2 + a^2}}{2a} + \frac{a}{2} \log. \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}$, гдѣ за уравненіе параболы взято $y^2 = 2ax$, то въ выраженіи $s \cdot CK = \frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{ax}}{16a^2} - \frac{as}{16}$, въ которомъ уравненіе параболы есть $y^2 = ax$, будетъ $s = \frac{y\sqrt{4y^2 + a^2}}{2a} + \frac{a}{4} \log. \frac{2y + \sqrt{4y^2 + a^2}}{a} = \frac{\sqrt{4ax + a^2} \cdot \sqrt{ax}}{2a} + \frac{a}{4} \log. \frac{2\sqrt{ax} + \sqrt{4ax + a^2}}{a}$, и оное выраженіе момента $s \cdot CK$ сдѣлается $\frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{ax}}{16a^2} - \frac{a}{16} \left(\frac{\sqrt{4ax + a^2} \cdot \sqrt{ax}}{2a} + \frac{a}{4} \log. \frac{2\sqrt{ax} + \sqrt{4ax + a^2}}{a} \right) = \frac{8ax + a^2}{16 \cdot 2a^2} \sqrt{ax} \cdot \sqrt{4ax + a^2} - \frac{a}{16} \cdot \frac{a}{4} \log. \frac{2\sqrt{ax} + \sqrt{4ax + a^2}}{a} = \frac{8x + a}{16} \sqrt{x^2 + \frac{a}{4} x} - \frac{a}{16} \cdot \frac{a}{4} \log. \frac{2\sqrt{ax} + \sqrt{4ax + a^2}}{a}$; куда вмѣсто a поставя $8b$, преобразишь моментъ $s \cdot CK$ въ сей видъ $\frac{1}{2}(x + b)\sqrt{x^2 + 2bx} - \frac{1}{2} b^2 \log. \left(\frac{2\sqrt{8bx} + \sqrt{32bx + 64b^2}}{8b} \right)^2 = \frac{1}{2}(x + b)\sqrt{x^2 + 2bx} - \frac{1}{2} b^2 \log. \frac{x + b + \sqrt{x^2 + 2bx}}{b}$, который есть совершенно тотъ же что и предъ симъ найденной.

Чтоже принадлежитъ до момента $S \cdot AO$, то оный найдется по члену 182 му.

О движенiи ускоренномъ или укосненномъ.

(194) Ежели параллельныя между собою линеи PM, P′M′, и проч., изображающiя перейденныя во времена AP, AP′, и проч. пространства, принадлежатъ къ прямой линеи AMM′ (черт. XLVIII), то движенiе будетъ равномѣрное, понеже въ семъ случаѣ перейденныя пространства содержатся какъ времена употребленныя на перейденiе оныхъ пространствъ. Положивъ сiе, да движутся равномѣрно два тѣла, и во времена AP, AP′, и проч. да переходятъ, одно пространства PM, P′M′, и проч., а другое пространства Pm, $P'm'$, и проч. Ясно видно, что скорости оныхъ тѣлъ суть между собою, какъ PM къ Pm или какъ $P'M'$ къ $P'm'$, и проч. Но по причинѣ что $AP : AP' = Pm : P'm'$, $Pm = \frac{AP . P'm'}{AP'}$; чего ради сiи скорости суть между собою какъ PM къ $\frac{AP . P'm'}{AP'} = \frac{PM}{AP} : \frac{P'm'}{AP'}$, то есть скорости двухъ равномѣрно движущихся тѣлъ суть между собою какъ перейденныя въ какiя ниесть времена пространства, раздѣленныя на употребленныя на перейденiе оныхъ пространствъ времена. Такъ же явственно, что движущiя сылы суть между собою, какъ произведенiя составовъ на скорости, а такимъ образомъ, означивъ чрезъ M, m составы, чрезъ F, f движущiя силы, чрезъ U, u скорости, чрезъ T, t времена и чрезъ E, e пространства, мы будемъ имѣть слѣдующiя двѣ пропорцiи

$$F : f = MU : mu, \quad U : u = \frac{E}{T} : \frac{e}{t},$$

которыя заключаютъ въ себѣ всю ѳеорiю движенiя равномѣрнаго. (*)

(*) Для объясненiя сея ѳеорiи примѣромъ, мы предложимъ здѣсь слѣдующiй вопросъ: Славный нѣмецкiй астрономъ Кеплеръ измѣривъ среднiя разсто-

(195) Естьли же линеи PM, P′M′, P″M″, и проч. принадлежатъ къ кривой линеи BMM M″ (черт. XLIX), то движенїе будетъ ускоренное, или укосненное, смотря потому, выпуклая или вогнутая со стороны AC кривая линея будетъ. Пусть движенїе будетъ ускоренное, и пусть тѣло въ то самое мгновенїе, въ которое оканчиваетъ перехожденїе линеи PM, станетъ двигаться равномѣрно со скоростїю приобрѣтенною въ точкѣ M; я возьму $Pp = PP'$ и изъ точекъ M и m параллельно AC протяну прямыя MN, mn; тогда взявъ Nt за пространство, перейденное во время PP′ равномѣрно со скоростїю приобрѣтенною въ точкѣ M, явно, что оное должно быть больше нежели пространство Mn, которое тѣло дѣйствительно перешло во время Pp, $= PP'$, и меньше нежели пространство NM′; и посему Mt неминуемо будетъ касательная къ кривой линеи въ точкѣ M. Въ самомъ дѣлѣ, естьли положивъ Mt касательною къ кривой въ точкѣ M, положимъ пространство, во время PP′ равномѣрно перейденное, меньше нежели Nt, и $=$ напримѣръ Ne, то протянувъ прямую eMh и прямую hg, параллельную AP, выдетъ $Ne = Mg$ и меньше нежели Mn; такъ же сїе самое пространство не можетъ быть больше нежели Nt и $=$ напримѣръ Ne', ибо протянутая прямая Me' встрѣтится съ

нїя планетъ до солнца и опредѣливъ перїодическїя ихъ времена, нашелъ что квадраты оныхъ времянъ содержатся какъ кубы упомянутыхъ разстоянїй; вопрошается теперь, какъ содержатся между собою скорости какихъ нибудь двухъ планетъ, полагая орбиты ихъ совершенными кругами, отъ коихъ дѣйствительно оныя не съ лишкомъ много отступаютъ? Означивъ чрезъ R, r разстоянїя планетъ до солнца, чрезъ E, e окружности круговъ сими разстоянїями описанныхъ, чрезъ T, t перїодическїя времена и чрезъ U, u скорости; будетъ $T^2 : t^2 = R^3 : r^3 = E^3 : e^3$, откуда выдетъ $\frac{E^2}{T^2} \cdot E = \frac{e^2}{t^2} \cdot e$ и $\frac{E^2}{T^2} : \frac{e^2}{t^2} = e : E = r : R$; но $U^2 : u^2 = \frac{E^2}{T^2} : \frac{e^2}{t^2}$, слѣдовательно $U : u = \sqrt{r} : \sqrt{R}$. Таково есть содержанїе скоростей планетъ около солнца обращающихся.

одною изъ ординатъ кривой линеи въ какой нибудь точкѣ E; такое положеніе имѣющей, что N'E будетъ больше нежели N'K, и чрезъ то будетъ пространство во время PQ равномѣрно перейденное больше, нежели пространство въ то же время ускоренно перейденное. И такъ необходимо Mt есть касательная къ кривой въ точкѣ M; откуда слѣдуетъ, что естьли мы означимъ AP чрезъ t и пространство PM чрезъ e, то будетъ $\frac{Nt}{MN}$ = предѣл. содержанія $\frac{\Delta e}{\Delta t}$. Но поелику $\frac{Nt}{MN}$ есть выраженіе скорости приобрѣтенной въ точкѣ M, понеже тѣло съ сею скоростію равномѣрно во время MN перейдетъ пространство Nt; то означивъ оную чрезъ u, мы будемъ имѣть u = предѣл. содержанія $\frac{\Delta e}{\Delta t}$. (*)

(*) Поелику въ ускоренномъ движеніи скорость увеличивается по мѣрѣ прошедшаго времени; то явствуетъ, что тутъ имѣютъ мѣсто три случая: или скорость увеличивается точно въ томъ же содержаніи, какъ протекшее время прибавляется, или въ большемъ, или наконецъ въ меньшемъ содержаніи, нежели сіе время. Въ первомъ случаѣ движеніе можно назвать *равноускореннымъ*, въ другомъ *избыточноускореннымъ*, и наконецъ въ третьемъ *недостаточноускореннымъ*. Авторъ не дѣлая сего различія, всѣ оные случаи разсматриваетъ вообще; но мы здѣсь находимъ за нужное особенно разсмотрѣть первой случай.

И такъ пусть движеніе будетъ равноускоренное, то поелику скорость = предѣл. содержанія $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\partial e}{\partial t}$, будетъ $\frac{\partial e}{\partial t} : t$ = нѣкоторому постоянному количеству a; и посему выдетъ $e = \frac{at^2}{2}$, естьли $e = 0$, когда $t = 0$; откуда слѣдуетъ, что въ случаѣ движенія равноускореннаго предполагаемая авторомъ кривая линея BMM'M'' есть парабола, и пространства отъ начала движенія тѣломъ переходимыя содержатся между собою, какъ квадраты временъ, употребленныхъ на перейденіе сихъ пространствъ, и посему здѣсь постоянное количество a есть не иное что, какъ двойное пространство, въ первую единицу времени перейденное. Естьли оное одинакое означится чрезъ g, то будетъ $e = gt^2$, и уравненіе $\frac{\partial e}{\partial t} : t = a$, сдѣлается $u = 2gt$; изъ чего выдетъ $ut = 2gt^2 = 2e$, то есть въ равноускоренномъ движеніи приобрѣтенная скорость u при концѣ времени t такова, что тѣло двигаясь съ оною равномѣрно, въ то же время t опишетъ пространство ut въ двое большее ускоренно перейденнаго пространства

(196) Мы означимъ чрезъ $\frac{\partial e}{\partial t}$ предѣлъ содержанія и чрезъ $\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 e}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^4 e}{\partial t^4}$ и проч. предѣлы содержаній $\frac{\Delta^2 e}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 e}{\Delta t^3}$, $\frac{\Delta^4 e}{\Delta t^4}$, и проч., полагая Δt постоянною. Потомъ мы замѣтимъ, что пространство tM' есть то, которое тѣло перейдетъ во время PP' сверьхъ пространства Nt, перейденнаго имъ равномѣрно со скоростію пріобрѣтенною въ точкѣ M; и сего ради сіе пространство будетъ то, которое *ускорительная сила* заставила бы тѣло описать во время PP', естьли бы въ началѣ сего времени оное никакой скорости не имѣло. (*).

---

e; и потому, поелику скорость тѣла измѣряется чрезъ пространство въ единицу времени равномѣрно онымъ перейденное, $2g$ будетъ скорость пріобрѣтенная тѣломъ, равноускоренно движущимся, въ концѣ первой единицы времени.

(*) И такъ поелику въ предъидущемъ примѣчаніи видѣли, что въ случаѣ равноускореннаго движенія кривая линея $BMM'M''$ есть парабола, у которой при равныхъ абсциссы AP разностяхъ PP' усѣченныя касательною части tM' ординатъ $P'M'$ бываютъ равныя же, какъ то всякой чрезъ простѣйшую Геометрію удобно удостовѣриться можетъ, слѣдуетъ, что въ семъ движеніи дѣйствіе ускорительной силы, непосредственно ею производимое, въ продолженіе того же времени есть вездѣ одинаковое или постоянное; и какъ всякая ускорительная сила дѣйствуетъ на тѣло непрестанно, то слѣдуетъ еще, что въ семъ равноускоренномъ движеніи и напряженіе ускорительной силы, въ каждое мгновеніе, или при концѣ и началѣ каждаго времени на тѣло изъявляемое, есть такъ же постоянное, по крайней мѣрѣ по неизвѣстности способа, коимъ ускорительныя силы дѣйствуютъ на тѣла, сіе положеніе есть самое простѣйшее и слѣдственно естественнѣйшее. И для того обыкновенно говорится, что въ равноускоренномъ движеніи ускорительная сила есть постоянная. Что же принадлежитъ до величины сея силы, то не иначе опредѣлить ея можно, какъ чрезъ дѣйствіе, въ продолженіе извѣстнаго времени, какъ напримѣръ одной секунды, ею производимое, которое въ прочемъ одно токмо и нужно принимать въ разсужденіе. И такъ поелику въ параболѣ части ординатъ tM' при равныхъ абсциссы разностяхъ PP' суть равныя же, ускорительная сила въ точкѣ M равняется пространству g въ первую секунду времени перейденному. Ибо положивъ $PP' = 1$, будетъ, по причинѣ уравненія кривой линеи $e = gt^2$ $PM = gt^2$, $P'M' = g(t+1)^2$ и по причинѣ что $\frac{Nt}{MN} = u = 2gt$, $Nt = 2gt$, и отсюда выдетъ $tM' (= P'M' - PM - Nt) = g$, сиречь то же.

Пусть $PP' = P'P'' = \Delta t$, то есть что разность Δt постоянна; будетъ $P'M' = e + \Delta e$, $P''M'' = e + 2\Delta e + \Delta^2 e$ и по причинѣ что $Nt = \frac{\partial e}{\partial t}.\Delta t$, выдетъ $P't = e + \frac{\partial e}{\partial t}.\Delta t$ и $tM' = \Delta e - \frac{\partial e}{\partial t}.\Delta t$. Но (по члену 161) $\Delta e = \frac{\partial e}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{1}{2.3}.\frac{\partial^3 e}{\partial t^3}.\Delta t^3$ + и проч.; чего ради $\frac{tM'}{\Delta t^2} = \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{1}{2.3}\frac{\partial^3 e}{\partial t^3}.\Delta t$ + и проч. Означимъ чрезъ φ то количество, въ которое содержаніе $\frac{tM'}{\Delta t^2}$ обратится въ точкѣ M, и мы получимъ $\varphi = \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$.

Означивъ же чрезъ $\frac{\partial u}{\partial t}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, мы изъ уравненія $u = \frac{\partial e}{\partial t}$ извлечемъ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$, почему будетъ $\varphi = \frac{1}{2}.\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\varphi\left(= \frac{1}{2}\partial u : \frac{\partial e}{u}\right) = \frac{1}{2}.\frac{u\,\partial u}{\partial e}$. Ясно видно, что естьли вмѣсто того, что бы положить движеніе ускореннымъ, мы положимъ его укосненнымъ, то получимъ $\varphi = -\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$, $\varphi = -\frac{1}{2}.\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\varphi = -\frac{1}{2}.\frac{u\partial u}{\partial e}$. Мы замѣтимъ что φ есть то, что Геометры ускорительною или укоснительною силою называютъ. (*)

· Сіе собственно показываетъ, что ускорительная сила въ каждомъ мѣстѣ дѣйствуя на тѣло съ равнымъ напряженіемъ, заставитъ его въ продолженіе единицы времени сверьхъ пространства, перейденнаго равномѣрно съ приобрѣтенною въ томъ мѣстѣ скоростію, пройти еще пространство ровное тому, которое въ первую единицу времени перейдено. И для того самаго сіе въ первую единицу времени перейденное пространство g обыкновенно ускорительною силою называется, и оная ускорительная сила, по причинѣ $u = 2gt$, въ семъ движеніи $= \frac{1}{2}.\frac{u}{t}$. Она обыкновенно именуется *простою* ускорительною силою; совершенною же называется произведеніе ея на составъ тѣла; и такъ означивъ чрезъ F, f совершенныя силы, будетъ имѣть мѣсто слѣдующая пропорція $FT : ft = MU : mu$, которая съ пропорціею въ предъидущемъ примѣчаніи найденною $E : e = UT : ut$, заключаетъ въ себѣ всѣ свойства движенія равноускореннаго.

(*) Сіе авторово замѣчаніе купно съ найденными имъ формулами, не подаетъ яснаго понятія о ускорительной или укоснительной силѣ. И такъ, чтобы здѣсь подать оное, я дамъ ускорительной силѣ таковое *опредѣленіе*: ускорительною силою, въ какомъ ниесть мѣстѣ ускоренно переходимаго тѣломъ пространства или при какомъ ниесть мгновеніи соотвѣтствующаго оному пространству времени, называется пространство, которое оное тѣло въ еди-

ницу времени равноускореннымЪ движенїемЪ перешло бы, естьли бы вЪ томЪ мѣстѣ или мгновенїи не имѣло никакой скорости и ускоряющая движенїе причина дѣйствовала бы на него вЪ продолженїе всея сея единицы времени, сЪ тѣмЪ же напряженїемЪ, каковое изЪявила вЪ самомЪ началѣ оной. Сїе опредѣленїе ускорительной силѣ ведетЪ чрезЪ употребленный даже авторомЪ способЪ кЪ той же самой формулѣ $\phi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$: стоитЪ токмо для сего путЪ при точкѣ M описать параболу ту же кривизну сЪ дугою MM′ имѣющую. Но поелику оный способЪ довольно продолжителенЪ и авторЪ вообще здѣсь мало печется о строгости доказательствЪ, то мы предложимЪ другой простѣйшїй.

Пусть u скорость приобрѣтенная тѣломЪ при концѣ времени t, соотвѣтствующемї пространству e, будетъ $u + \Delta u$ скорость приобрѣтенная при концѣ времени $t + \Delta t$, и слѣдственно Δu скорость, которую бы тѣло приобрѣло при концѣ времени Δt, естьли бы при концѣ времени t или началѣ времени Δt оно никакой скорости не имѣло. ОткудА слѣдуетЪ, что движенїе отЪ конца времени t или начала времени Δt продолжающееся, можетЪ быть раздѣлено на два, изЪ коихЪ одно совершается равномѣрно сЪ приобрѣтенною скоростїю u, а другое производится отЪ непрестаннаго ускоряющей причины напряженїя, которое возбуждаетЪ вЪ тѣлѣ при концѣ времени Δt скорость Δu. И какЪ ускоряющая причина свое напряженїе на тѣло изЪявляемое не иначе перемѣнять можетЪ увеличивая или уменьшая оное, какЪ нечувствительными токмо степенями, то явствуетЪ, что чѣмЪ время Δt будетЪ меньше, тѣмЪ послѣднее изЪ упомянутыхЪ движенїй болѣе приближаться станетЪ кЪ равноускоренному, производящемуся одинаковымЪ и тѣмЪ же напряженїемЪ ускоряющей причины, каковое оная изЪявила при началѣ времени Δt или концѣ времени t, а по сему такЪ же тѣмЪ и скорость Δu болѣе приближаться станетЪ кЪ скорости сего равноускореннаго движенїя, при концѣ времени Δt приобрѣтенной; означимЪ сїю скорость буквою ω, и приведемЪ себѣ на память, что вЪ ономЪ равноускоренномЪ движенїи постоянная ускорительная сила, которая да означится буквою ϕ, всегда $= \frac{1}{2}\frac{\omega}{\Delta t}$, какЪ бы время Δt ни уменшилось; откуда слѣдовать будетЪ, что ϕ есть предѣлЪ содержанїя $\frac{1}{2}\frac{\Delta u}{\Delta t}$, и по причинѣ что $\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$ есть такЪ же предѣлЪ содержанїя $\frac{1}{2}\frac{\Delta u}{\Delta t}$, выдетЪ напослѣдокЪ $\phi = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{u\,\partial u}{\partial e} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$, то есть тоже, что авторЪ нашелЪ.

ОнЪ, какЪ и многїе другїе Французскїе математики, послѣ д'Аламберта отвергнувшаго обыкновенно приемлемое начало о пропорцїональности дѣйствїй ихЪ причинамЪ (потому что свойство причинЪ и способЪ ихЪ дѣйствїя намЪ совершенно неизвѣстны) почитаетЪ формулу $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$ или всякую другую, сЪ оной тожественную, мѣрою ускорительной силы единственно токмо по положенїю или по опредѣленїю; что влечетЪ за собою весьма великое неудобство, а именно. принявЪ такимЪ образомЪ оную фор-

мулу за мѣру ускорительной силы, совсѣмъ не можно будетъ приложить ее къ параллелограмму силъ, и слѣдственно такъ же почти ни къ какому вопросу Механики, ибо такимъ образомъ не извѣстнымъ остается, что та формула означаетъ: скорость ли, которую ускоряющая причина въ какое нибудь опредѣленное время произвести въ состояніи, или пространство, которое она перейти по какому либо извѣстному закону въ опредѣленное время заставить тѣло можетъ, или что либо иное къ параллелограмму силъ удобоприлагаемое. Правда само по себѣ нѣкоторымъ образомъ видно, что формула, о которой говоримъ, есть нѣкая функція скорости u, но сего недовольно, чтобы оную принять за мѣру ускорительной силы, по тому что общее понятіе о функціи скорости, ничего ненаучаетъ о особенной, которая служить должна мѣрою ускорительной силѣ, и кто вздумаетъ взести иную, различную отъ сей особенной, функцію скорости за мѣру силы ускорительной, тотъ навѣрное впадетъ въ погрѣшность. Весьма убѣдительной сему примѣръ далъ славный Лапласъ, который видя, что произвольность многихъ Французскихъ писателей въ названіи *сила* (въ прочемъ тожественной функціи скорости) не вела къ погрѣшности, вознамѣрился въ сочиненіи своемъ, Exposition du système du monde, распространить ее гораздо далѣе, утверждая, что вообще *сила можетъ быть изображена чрезъ безчисленное множество функцій скорости, кои не ведутъ къ противорѣчію;* но по нещастію взятый имъ для объясненія сего примѣръ, прямо привелъ его къ оному. Онъ положивъ силу пропорціональною квадрату скорости, говоритъ, дабы утвердить, что изъ того не послѣдуетъ никакого противорѣчія: *въ семъ положеніи удобно опредѣлится движеніе точки побуждаемой какимъ нибудь числомъ силъ, коихъ скорости извѣстны; ибо естьли на направленіяхъ сихъ силъ отъ взаимнаго оныхъ направленій пресѣченія возьмутся прямыя изображающія ихъ скорости, и на тѣхъ же самыхъ направленіяхъ отъ того же оныхъ пресѣченія опредѣлятся другія прямыя, которыя бы между собою были какъ квадраты первыхъ; то оныя прямыя могутъ изобразить самыя силы. Потомъ чрезъ предложенное выше совокупляя ихъ, получится направленіе равнодѣйствующей силы, какъ и прямая, которая ея изображаетъ, и которая будетъ къ квадрату соотвѣтствующей скорости, какъ прямая, изображающая одну изъ союзныхъ силъ, къ квадрату своей скорости. Откуда видно, какимъ образомъ опредѣлить можно движеніе точки, взявъ какую бы то ни было функцію скорости для изображенія силы.*

Чтобы яснѣе показать неосновательность сего Лапласова положенія, возмемъ параллелограммъ прямоугольный, и положимъ, что стороны онаго означенныя чрезъ u и v изъявляютъ скорости производимыя въ особенномъ дѣйствіи союзными силами; то діагональ онаго означенная чрезъ z будетъ скорость произшедшая отъ совокупнаго ихъ дѣйствія или ско-

рость которую произведетъ равнодѣйствующая ихъ сила. Теперь сдѣлаемъ другой параллелограммъ, у котораго бы стороны означенныя чрезъ A и B содержалися между собою какъ u^2 къ v^2, и означимъ діагональ онаго чрезъ C; по мнѣнію Лапласа должно быть сей пропорціи $C : z^2 = A : u^2$ или $= B : v^2$. Положимъ, что оная пропорція дѣйствительно имѣетъ мѣсто, и посмотримъ, что изъ того произойдетъ. Изъ пропорціи $A:B = u^2 : v^2$ слѣдуетъ сія $A + B : B = u^2 + v^2 . v^2$ или $A + B : u^2 + v^2 = B : v^2$ или $A + B : z^2 = B : v^2$; но по положенію Лапласову и $C : z^2 = B . v^2$, слѣдовательно будетъ $C = A + B$; что противно доказанному Е...домъ. И такъ произвольность въ взятіи какой нибудь функціи скорости за мѣру силы не имѣетъ никакого основанія, и есть погрѣшность, противу которой молодые Геометры должны быть крайне осторожны, потому что въ оную впалъ величайшій изъ нынѣшнихъ Геометровъ.

Напротивъ же того при употребленіи формулы $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$, или всякой другой съ нею тожественной, вмѣсто ускорительной силы, по предложенному нами объ оной силѣ и формулѣ понятію, ничего опасаться не должно, потому что ѳеорема извѣстная подъ именемъ *параллелограмма силъ* равно справедлива, какъ въ случаѣ союзныхъ силъ мгновенно тѣло въ равномѣрное движеніе приводящихъ, такъ и въ случаѣ союзныхъ силъ, безпрестанно на тѣло одинаковое напряженіе изъявляющихъ и въ равноускоренное движеніе его приводящихъ.

(197) Въ точкѣ M′ я протяну касательную M′t′ и проведу хорду MM′u; t′M″ будетъ пространство, которое ускорительная сила заставила бы тѣло перейти, въ продолженіе времени P′P″, естьли бы въ началѣ сего времени оное тѣло никакой скорости не имѣло, и величина которую содержаніе $\frac{t'M''}{\Delta t^2}$ приметъ, когда $\Delta t = 0$, будетъ то, что мы ускорительною силою назвали. Иногда дается сіе наименованіе величинѣ, которую приметъ содержаніе $\frac{uM''}{\Delta t^2}$, когда $\Delta t = 0$; но какъ линея $t'M''$ не равна uM'', то надлежитъ тщательно остерегаться, чтобы не принять за одно сихъ разныхъ содержаній при изчисленіи дѣйствій ускорительныхъ силъ и при сравненіи оныхъ между собою.

Опустивъ перпендикуляръ M′O найдется $Ot' = \Delta t \times$ предѣл. содержанія $\frac{\Delta(e+\Delta e)}{\Delta t}$; слѣдовательно будетъ $tM'' = \Delta e + \Delta^2 e - \Delta t \times$ предѣл. содержанія $\frac{\Delta(e+\Delta e)}{\Delta t}$, и поставивъ (член. 161) вмѣсто

Δe, $\Delta^2 e$, и предѣла содержанія $\frac{\Delta(e+\Delta e)}{\Delta t}$ ихъ величины; выдетъ
$\frac{tM''}{\Delta t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^3 e}{\partial t^3}\Delta t +$ и проч. $+ \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 e}{\partial t^3}\Delta t +$ и проч.
$- \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 e}{\partial t^3}\Delta t -$ и проч. $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\partial^3 e}{\partial t^3}\Delta t +$ и проч.
Потомъ чтобы опредѣлить $\frac{uM''}{\Delta t^2}$, я примѣчаю, что $P''u = e + 2\Delta e$ и что, слѣдственно, $uM'' = \Delta^2 e$, то есть что uM'' есть вторая разность пространства; и потому $\frac{uM''}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 e}{\partial t^3}\Delta t +$ и проч. Теперь взявъ предѣлы двухъ содержаній $\frac{tM''}{\Delta t^2}$, и $\frac{uM''}{\Delta t^2}$ находимъ первой $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$, а другой $= \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$. И такъ сіи два предѣла суть между собою какъ 1 къ 2, и естьли одно какое нибудь изъ дѣйствій будетъ изчислено, полагая одинъ изъ сихъ предѣловъ за выраженіе силы ускорительной, то надобно, что бы и всякое другое дѣйствіе было изчислено въ томъ же положеніи; иначе же впадешь въ погрѣшность, учинивъ содержаніе силъ въ двое большимъ или меньшимъ, нежели каково оное есть дѣйствительно.

(198) Изъ доказаннаго теперь нами слѣдуетъ, что естьли тѣло, котораго составъ m, побуждамое силою φ перешло пространство e во время t, то должно быть, полагая Δt постоянною, $\varphi = \pm\frac{m\partial^2 e}{2\partial t^2}$, гдѣ знакъ $+$ принадлежитъ къ случаю, въ которомъ движеніе ускоренное, а знакъ $-$ къ случаю, въ которомъ движеніе укосненное; и естьли u скорость приобрѣтенная тѣломъ при концѣ времени t, то сверьхъ того будетъ $u = \frac{\partial e}{\partial t}$ и $\varphi = \pm\frac{m u}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$. Сіе имѣетъ мѣсто въ предположеніи кривой линеи въ самой строгости кривою; но въ предположеніи кривой линеи периметромъ многоугольника вышло бы
$\varphi = \pm\frac{m\partial^2 e}{\partial t^2}$ и $\varphi = \pm m u\frac{\partial u}{\partial t}$. (*)

(*) По нашему способу въ семъ послѣднемъ случаѣ φ не иное что есть какъ скорость, которую тѣло сверьхъ скорости и приобрѣтетъ отъ ускоряющей причины дѣйствующей въ продолженіе единицы времени съ тѣмъ же напряженіемъ, каковое оная въ началѣ сея единицы времени на тѣло изъявила.

(199) Пусть φ будетъ постоянная ускорительная сила, какова есть тяжесть при небольшей въ сравненіи земнаго радіуса высотѣ; будетъ, опредѣляя произвольныя постоянныя количества такимъ образомъ, что бы онѣ обратилися въ ничто въ началѣ движенія, $2\varphi t = + m. \frac{\partial e}{\partial t}$, $\varphi t^2 = + me$; въ случаѣ же кривой приемлемой за периметеръ многоугольника выдетъ $\varphi t^2 = \pm 2me$. (*) Теперь, чтобы сравнить всякую ускорительную

(*) Но естьли тѣло падаетъ довольно съ великой высоты, то перемѣну въ тяжести надлежитъ принимать въ разсужденіе по упомянутому выше закону Нютонову, тяжесть увеличивается или уменьшается въ обратномъ содержаніи квадратовъ разстояній отъ центра тяготѣнія. Такъ естьли высота h, съ которой тѣло упадаетъ, вмѣстѣ съ радіусомъ земли a, означится чрезъ r, то будетъ тяжесть φ при концѣ какой нибудь части e оной высоты h ($= r - a$), къ постоянной тяжести g на поверхности земли, какъ a^2 къ $(r - e)^2$; откуда выдетъ $\varphi = \frac{g a^2}{(r - e)^2}$; но поелику вообще $\varphi = \frac{1}{2} u \frac{\partial u}{\partial e}$, то произойдетъ уравненіе $u \partial u = \frac{2 g a^2 \partial e}{(r - e)^2}$, изъ коего найдется $\frac{u^2}{2} = \frac{2 g a^2}{r - e} + C$, и по причинѣ, что когда $e = 0$, тогда $u = 0$, выдетъ $C = -\frac{2 g a^2}{r}$, $\frac{u^2}{2} = \frac{2 g a^2}{r - e} - \frac{2 g a^2}{r}$ и $u = \frac{2 a \sqrt{g}}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{e}{(r - e)}}$.

Симъ образомъ нашлась скорость приобрѣтенная при концѣ части e высоты h. Но чтобы опредѣлить употребленное на перейденіе сея части e время t, возьми уравненіе $\partial t = \frac{\partial e}{u}$, которое по учиненіи вставливанія сдѣлается $\partial t = \left(\frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} . \sqrt{\frac{r - e}{e}} \right) \partial e$, и для удобнѣйшаго взятія интеграла положи $r - e = x$; будетъ $e = r - x$, $\partial e = - \partial x$, и $\partial t = \frac{-\partial x \sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} \sqrt{\frac{x}{r - x}} = \frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} \left(- \frac{x \partial x}{\sqrt{r x - x^2}} \right) = \frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} \left(\frac{\frac{1}{2} r \partial x - x \partial x}{\sqrt{r x - x^2}} - \frac{\frac{1}{2} r \partial x}{\sqrt{r x - x^2}} \right)$; откуда выдетъ $t = \frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} \left(\sqrt{r x - x^2} - \frac{1}{2} r \,\mathrm{A\,fin.\,v.} \frac{2x}{r} \right) + C$, и по причинѣ что когда $x = r$, тогда $e = 0$ и $t = 0$, найдется $C = \frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} . \frac{1}{2} \mathrm{A\,fin.\,v.} 2 = \frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} . \frac{1}{2} \pi r$; и такъ $t = \frac{\sqrt{r}}{2 a \sqrt{g}} \left(\frac{\pi r}{2} + \sqrt{r x - x^2} - \frac{1}{2} r \,\mathrm{A\,fin.\,v.} \frac{2x}{r} \right)$.

или укоснительную силу съ тяжестію, которую мы означимъ чрезъ p, пусть будетъ T время употребленное тяжелымъ тѣломъ на паденіе съ высоты g; учинимъ въ предположеніи кривой линеи въ самой строгости кривою сію пропорцію $\frac{g}{T^2} : \pm \frac{1}{2} \frac{m\partial^2 e}{\partial t^2} = p : \varphi = \pm \frac{T^2}{2g} mp \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$ и въ предположеніи кривой линеи периметромъ многоугольника слѣдующую $\frac{2g}{T^2} : \pm \frac{m\partial^2 e}{\partial t^2} = p : \varphi = \pm \frac{T^2}{2g} . mp \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$. Откуда слѣдуетъ, что естьли означится чрезъ m вѣсъ частицы или произведеніе ея состава на тяжесть, и чрезъ g высота, на которую тяжесть въ извѣстное за единицу взятое время заставитъ тѣло низойти, то вмѣсто послѣднихъ формулъ можно будетъ взять сію $\varphi = \pm \frac{m}{2g} . \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$.

(200). Но всѣ сіи формулы недостаточны еще для переложенія на уравненія вопросовъ относящихся къ различнымъ движеніямъ, которыя тѣло отъ силъ его побуждающихъ воспріять можетъ; для сего необходимо надобно ихъ соединить съ

Положи $e = r$ или $x = o$, получишь $t = \frac{\sqrt{r}}{2a\sqrt{g}} . \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r^{\frac{3}{2}}}{4a\sqrt{g}}$, то есть цѣлое время, которое тѣло употребить должно, дабы упасть въ центръ земли, полагая достиженіе къ оному возможнымъ.

Естьли теперь вмѣсто земли возмемъ солнце, а вмѣсто падающаго тѣла какую нибудь планету, у которой касательная сила или скорость какимъ нибудь образомъ уничтожилась; то время t употребленное ею на паденіе въ центръ солнца будетъ такъ же $= \frac{\pi r^{\frac{3}{2}}}{4a\sqrt{g}}$, гдѣ r разстояніе планеты до солнца, a радіусъ солнца и g тяжесть на поверхности его. И по сему означивъ чрезъ R растояніе таковой другой падающей планеты и чрезъ T цѣлое время паденія, выдетъ $T : t = R^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}}$ или $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, то есть законъ открытый Кеплеромъ. Откуда имѣемъ мы примѣръ, сколь природа въ законахъ своихъ непремѣнна; при самомъ своемъ разрушеніи, такъ сказать, она сохранитъ еще оные.

нѣкоторымъ другимъ началомъ, которое бы съ ними не было тожественно. Такъ напримѣръ, естьли я предложу себѣ сей вопросъ: Тѣло, коего составъ m, движется по направленію Tt съ нѣкоторою скоростію и когда придетъ въ точку A, совращается съ сего направленія силою побуждающею его къ центру S (черт. L), такъ что тѣло принуждено будетъ описать криволинейную орбиту AP, въ той же плоскости всею своею длиною находящуюся. Тогда я воображу себѣ тѣло въ точкѣ P, и изъ сей точки опущу на SA перпендикуляръ PM; потомъ я прибѣгну къ сему Статики началу: ежели сколько нибудь силъ въ одной плоскости дѣйствуютъ на тѣло, то всегда можно привести ихъ къ двумъ, взаимно перпендикулярныя направленія имѣющимъ. Откуда слѣдуетъ, что силы на тѣло m дѣйствующія мы можемъ разрѣшить на двѣ P и Q, изъ коихъ одна дѣйствуетъ по направленію SM, кое означимъ чрезъ x, а другая по направленію MP, кое изобразимъ чрезъ y; и означивъ чрезъ $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ предѣлы содержаній $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$, ѳеорія ускореннаго движенія намъ дастъ сіи два уравненія $P = \frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (*)

(*) Сіи два уравненія соединенныя съ третьимъ $u = \frac{\partial s}{\partial t}$ служатъ къ разрѣшенію всѣхъ вопросовъ относящихся къ свободнымъ движеніямъ въ одной плоскости, хотя бы дѣйствующія на тѣла силы побуждали ихъ къ одному центру, или всякимъ инымъ образомъ. Авторъ прилагаетъ оныя уравненія къ движенію, въ которомъ сила побуждаетъ тѣло къ одному центру, а мы приложимъ ихъ здѣсь къ частному случаю, въ которомъ сила побуждаетъ тѣло по параллельнымъ между собою направленіямъ, а именно къ брошенному тѣлу подъ какимъ нибудь относительно къ горизонту угломъ β, со скоростію c.

И такъ будетъ сила $P = 0$ и сила $Q = -mg$; откуда получимъ сіи два уравненія $\frac{m}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ и $\frac{m}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -mg$; первое даетъ $\partial(\frac{\partial x}{\partial t}) = 0$ и $\frac{\partial x}{\partial t} = a$, а другое $\partial(\frac{\partial y}{\partial t}) = -2g\partial t$ и $\frac{\partial y}{\partial t} = b - 2gt$, гдѣ a и b суть произвольныя постоянныя количества. И какъ $\frac{\partial x}{\partial t}$ означаетъ ско-

рость по горизонтальному направленію, а $\frac{\partial y}{\partial t}$ скорость по вертикальному, и когда $t = 0$, оныя скорости суть $c.\cos.\beta$ и $c\sin.\beta$; то будетъ $a(=\frac{\partial x}{\partial t}) = c.\cos.\beta$ и $b(=\frac{\partial y}{\partial t} + 2gt) = c\sin.\beta$; и такъ имѣемъ $\frac{\partial x}{\partial t} = c.\cos.\beta$ и $\frac{\partial y}{\partial t} = c\sin.\beta - 2gt$, $\partial x = c\partial t\cos.\beta$, $\partial y = c\partial t\sin.\beta - 2gt\partial t$, $x = ct\cos.\beta + i$ и $y = ct\sin.\beta - gt^2 + k$; но когда $t = 0$, тогда $x = 0$ и $y = 0$; слѣдовательно произвольныя постоянныя количества i и k равны нулю, и найденныя уравненія сдѣлаются $x = ct\cos.\beta$, $y = ct\sin.\beta - gt^2$, чрезъ кои во всякое мгновеніе мѣсто движущагося тѣла опредѣлить можно, и кои соединенныя даютъ уравненіе кривой линеи, брошеннымъ тѣломъ описуемой. Въ самомъ дѣлѣ изъ перваго уравненія сыскавъ $t = \frac{x}{c.\cos.\beta}$ и поставивъ во второе, получишь уравненіе $y = \frac{x\sin.\beta}{\cos.\beta} - \frac{gx^2}{c^2\cos.\beta^2}$, или $-\frac{c^2\cos.\beta^2}{g}.y = -\frac{c^2\sin.\beta.\cos.\beta}{g}x + x^2$, или $\frac{c^4\sin.\beta^2\cos.\beta^2}{4g^2} - \frac{c^2\cos.\beta^2}{g}.y = (\frac{c^2\sin.\beta\cos.\beta}{2g} - x)^2$ или наконецъ уравненіе $(\frac{c^2\sin.\beta\cos.\beta}{2g} - x)^2 = \frac{c^2\cos.\beta^2}{g}(\frac{c^2\sin.\beta^2}{4g} - y)$, которое изображаетъ свойство сей кривой линеи и показываетъ, что оная есть парабола, у коей параметеръ $\frac{c^2\cos.\beta^2}{g}$ и у коей ось отстоитъ отъ начала движенія по горизонту въ разстояніи $\frac{c^2\sin.\beta\cos.\beta}{2g}$, а вершина отъ горизонта въ разстояніи $\frac{c^2\sin.\beta^2}{4g}$.

Чтобы найти скорость во всякомъ мѣстѣ, возьми уравненіе $u = \frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}}$, которое, по постановленіи вмѣсто ∂x и ∂y ихъ величинъ, даетъ $\sqrt{\frac{c^2\partial t^2\cos.\beta^2 + (c\partial t\sin.\beta - 2gt\partial t)^2}{\partial t^2}} = \sqrt{c^2 - 4cgt\sin.\beta + 4g^2t^2} = \sqrt{c^2 - 4g(ct\sin.\beta - gt^2)} = \sqrt{c^2 - 4gy}$.

Наконецъ, дабы вывести отсюда обыкновенныя правила *Баллистики*; возми уравненіе $y = \frac{x\sin.\beta}{\cos.\beta} - \frac{gx^2}{c^2\sin.\beta^2}$, и положи сперва $y = 0$; выдетъ $x = \frac{c^2\sin.\beta.\cos.\beta}{g} = \frac{c^2\sin.2\beta}{2g}$, то есть разстоянія, на кои въ пустотѣ при разныхъ возвышеніяхъ мортиры брошенныя съ тою же силою бомбы упасть могутъ, содержатся какъ синусы удвоенныхъ угловъ возвышенія мортиры, и по сему самое дальнѣйшее разстояніе будетъ при возвышеніи въ 45°. Потомъ положивъ $\beta = 45°$, выдетъ $x = \frac{1}{2g}.c^2$, то есть квадратные корни разстояній содержатся какъ силы, которыми та же бомба брошена будетъ.

(201) Я возьму на PS часть PU для изъявленія средоточной силы, кою я означу чрезъ V; такъ же я означу PS чрезъ z, уголъ ASP чрезъ β, предѣл. содержанія $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ чрезъ $\frac{\partial z}{\partial t}$, предѣл. содержанія $\frac{\Delta^2 z}{\Delta t^2}$ чрезъ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, предѣл. содер. $\frac{\Delta \beta}{\Delta t}$ чрезъ $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, предѣл. содержанія $\frac{\Delta^2 \beta}{\Delta t^2}$ чрезъ $\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$, потомъ протяну UK параллельно SM, и получу сію пропорцію $V : PK : KU = PS : PM : MS = 1 : \sin. \beta : \cos. \beta$; откуда нахожу $PK = -Q = V \sin. \beta$, $KU = -P = V \cos. \beta$, и предъидущія два уравненія сдѣлаются $\frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - V \cos. \beta$, $\frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - V \sin. \beta$.

Умножъ первое уравненіе на $\cos. \beta$, а другое на $\sin. \beta$, и послѣ сложи ихъ; что дастъ $m\partial^2 x \cos. \beta + m\partial^2 y \sin. \beta = - 2 V \partial t^2$.

Потомъ умножъ первое на $\sin. \beta$, а другое на $\cos. \beta$, и послѣ другое отними отъ перваго, выдетъ $m\partial^2 x \sin. \beta - m\partial^2 y \cos. \beta = 0$.

(202) Прямоугольной треугольникъ SMP даетъ $x = z \cos. \beta$, $y = z \sin. \beta$, и сего ради

$\partial x = \partial z \cos. \beta - z\partial\beta \sin. \beta$, $\partial y = \partial z \sin. \beta + z\partial\beta \cos. \beta$,

$\partial^2 x = \partial^2 z \cos. \beta - 2\partial z\partial\beta \sin. \beta - z\partial\beta^2 \cos. \beta - z\partial^2 \beta \sin. \beta$,

$\partial^2 y = \partial^2 z \sin. \beta + 2\partial z \partial\beta \cos. \beta - z\partial\beta^2 \sin. \beta + z\partial^2 \beta \cos. \beta$.

Откуда найдется $m (\partial^2 x \cos. \beta + \partial^2 y \sin. \beta) = m (\partial^2 z - z \partial \beta^2)$

$m (\partial^2 x \sin. \beta - \partial^2 y \cos. \beta) = - m(2\partial z \partial\beta + z\partial^2 \beta)$.

Вставливая сіи величины въ послѣднія два уравненія найденныя въ предъидущемъ членѣ, оныя перемѣнятъ на сіи $\partial^2 z - z\partial\beta^2 = - \frac{2V.\partial t^2}{m}$, $2\partial z \partial\beta + z\partial^2 \beta = 0$.

Но первая часть втораго уравненія умноженная на z не иное что есть какъ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta(\frac{z^2 \partial\beta}{\partial t})}{\Delta t}$; чего ради будетъ $\frac{z^2 \partial\beta}{\partial t} = h$, гдѣ h произвольное постоянное количество. [Изъ сего уравненія слѣдуетъ сіе $\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{h}{z^2}$, которое показываетъ, что угольная скорость тѣла обратно пропорціональна квадрату разстоянія или квадрату радіуса вектора].

(203) Чтобы изъ сихъ двухъ уравненій $z^2 \partial\beta = h\partial t$ и $\partial^2 z - z\partial\beta^2 = - \frac{2V\partial t^2}{m}$ найти уравненіе траекторіи тѣломъ описуемой, надлежитъ исключить изъ нихъ ∂t, понеже оное дол-

жно заключать въ себѣ токмо z, β и предѣлы содержанїй между конечными сихъ количествъ разностями; и естьли въ семъ уравненїи мы сочтемъ за нужное принять одну изъ первыхъ разностей за постоянную, то надлежитъ Δt почитать перемѣнною, понеже въ одно и тоже время не можно принять двѣ разности за постоянныя. И какъ въ уравненїи $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial\beta^2}{\partial t^2} = -\frac{2V}{m}$, выраженїе $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ есть предѣлъ содержанїя $\frac{\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)}{\Delta t}$, приемля Δt за постоянную; то, дабы оный опредѣлить приемля Δt и Δz за перемѣнныя, изобразимъ чрезъ $\frac{\partial^2 t}{\partial t^2}$ предѣлъ содержанїя $\frac{\Delta^2 t}{\Delta t^2}$, и искомой предѣлъ будетъ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial^2 t}{\partial t^2}$. Поставивъ его въ предъидущее уравненїе, оное сдѣлается $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial^2 t}{\partial t^2} - z.\frac{\partial\beta^2}{\partial t^2} = -\frac{2V}{m}$, въ которое надлежитъ еще поставить вмѣсто ∂t, $\partial^2 t$ ихъ величины извлеченныя изъ уравненія $\partial t = \frac{z^2\partial\beta}{b}$, полагая $\Delta\beta$ постоянною. И понеже въ семъ положенїи $\partial^2 t = \frac{2z\partial z\partial\beta}{b}$, то уравненїе, о которомъ говоримъ; перемѣнится на сїе $\frac{\partial^2 z}{z^2\partial\beta^2} - \frac{2\partial z^2}{z^3\partial\beta^2} - \frac{1}{z} = -\frac{2V}{m}.\frac{z^2}{b^2}$.

(204) Положимъ $\frac{1}{z} = r$, изъ чего означивъ чрезъ $\frac{\partial r}{\partial\beta}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2}$ предѣлы содержанїй $\frac{\Delta r}{\Delta\beta}$, $\frac{\Delta^2 r}{\Delta\beta^2}$, получимъ $-\frac{\partial z}{z^2\partial\beta} = \frac{\partial r}{\partial\beta}$, $-\frac{\partial^2 z}{z^2\partial\beta^2} + \frac{2\partial z^2}{z^3\partial\beta^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2}$; и вставливая сїи величины въ найденное уравненїе траїекторїи, оное приметъ сей гораздо простѣйшiй видъ $\frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2} + r = \frac{2V}{mb^2 r^2}$ (*).

(*) Сего уже довольно, чтобы вывести открытый Нютономъ законъ, по коему перемѣняется средоточная сила удерживающая планеты въ ихъ орбитахъ, кои чувствительно суть еллипсисы.

Въ самомъ дѣлѣ, возмемъ уравненїе $z = \frac{2cb \mp b^2}{c \mp b + c.\cos.\beta}$, которое принадлежитъ къ еллипсису и къ гиперболѣ, и въ которомъ b самой меньшїй радїусъ векторъ или меньшее разстоянїе отъ вершины до фокуса, c ексцентрицитетъ и β уголъ составляемый радїусомъ векторомъ z съ осью; будетъ $r = \frac{1}{z} = \frac{c \pm b + c\cos.\beta}{2cb \pm b^2}$, $\frac{\partial r}{\partial\beta} = \frac{-c\sin.\beta}{2cb \pm b^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2} = \frac{-c\cos.\beta}{2cb \pm b^2}$;

(205) Я означу дугу AP чрезъ s, секторъ ASP чрезъ S, предѣлъ содержанія $\frac{\Delta s}{\Delta \beta}$ чрезъ $\frac{\partial s}{\partial \beta}$, и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta S}{\Delta \beta}$ чрезъ $\frac{\partial S}{\partial \beta}$, и протянувъ другой радіусъ векторъ Sp, хорду Pp и на сію хорду перпендикуляръ SO, я получу содержаніе $\frac{Pp}{2} \cdot \frac{SO}{\Delta \beta}$, которое имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и содержаніе $\frac{\Delta S}{\Delta \beta}$. Но предѣлъ перваго содержанія найдется, поставляя вмѣсто $\frac{Pp}{\Delta \beta}$, $\frac{\partial s}{\partial \beta}$ и вмѣсто SO перпендикуляръ на касательную изъ S опущенный; чего ради все дѣло обращается въ найденіе сего перпендикуляра.

И такъ приемля PO за касательную, которая съ осью абсциссъ да составляетъ уголъ ϑ, имѣемъ $1 : z = \sin. SPO : SO$ и $\sin. SPO = \sin. (\beta + \vartheta) = \sin. \beta \cos. \vartheta + \cos. \beta \sin. \vartheta$; сверьхъ того (по члену 146) $\sin. \vartheta = \frac{\partial y}{\partial s}$, $\cos. \vartheta = -\frac{\partial x}{\partial s}$, понеже по свойству чертежа когда y увеличивается, тогда x убываетъ; слѣдовательно $SO \left[= z \sin. (\beta + \vartheta) = z \left(\frac{\partial y}{\partial s} \cos. \beta - \frac{\partial x}{\partial s} \sin. \beta\right)\right] = \frac{z \partial y \cos. \beta - z \partial x \sin. \beta}{\partial s}$ и $\frac{\partial S}{\partial \beta} \left[= \frac{SO . \partial s}{2 \partial \beta}\right] = \frac{z \partial y \cos. \beta - z \partial x \sin. \beta}{2 \partial \beta}$, куда поставивъ вмѣсто ∂y и ∂x ихъ величины $[\partial z \sin. \beta + z \partial \beta \cos. \beta$, $\partial z \cos. \beta - z \partial \beta \sin. \beta]$ найденныя въ 202 членѣ, получимъ $\frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{z^2}{2}$ (*). И посему уравненіе $\frac{z^2 \partial \beta}{\partial t} = h$ сдѣлается $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2}$; откуда слѣдуетъ сіе весьма извѣстное астрономамъ предложеніе, что какая бы средоточная сила ни была, площади описуемыя радіусомъ векторомъ суть всегда пропорціональны времени.

что поставивъ въ найденное авторомъ уравненіе траекторіи, выдетъ $\frac{c \pm b}{2cb \pm b^2} = \frac{2V}{m b^2 r^2}$, и оттуда произойдетъ $V = \frac{m (c \pm b) b^2}{2cb \pm b^2} \cdot \frac{1}{z^2}$, то есть средоточная сила удерживающая одну и ту же планету m въ орбитѣ ея увеличивается или уменьшается въ обратномъ содержаніи квадратовъ разстояній планеты до фокуса или солнца.

Тоже самое и такъ же докажется въ случаѣ траекторіи параболической. И сіе составляетъ главнѣйшій предметъ первой книги маѳематическихъ Нютоновыхъ началъ Естественной философіи.

(*) Сіе найдено было инымъ образомъ въ примѣчаніи къ [illegible].

(206) Оное предложеніе можно доказать безъ сихъ изчисленій слѣдующимъ образомъ: Положимъ, что время раздѣлено на нѣкоторое число частей и что средоточная сила дѣйствуетъ не непрестанно, но отъ начала одной части времени до начала другой. Тогда, естьли тѣло двигаяся равномѣрно, перебѣжитъ въ первую изъ сихъ частей времени хорду Aa, въ слѣдующую часть времени перейдетъ $ab' = Aa$, когда ничто движенію тѣла препятствовать не будетъ. Но когда оное съ сего направленія совратится ударомъ средоточной силы, то принуждено будетъ перейти хорду aa', которая есть діагональ параллелограмма $aba'b'$. Потомъ по прибытіи его въ a'', въ третью часть времени перейдетъ $ac' = aa'$, естьли второй ударъ средоточной силы не совратитъ и не принудитъ его перейти хорду $a'a''$, которая есть діагональ параллелограмма $a'c'a''c$; и такъ далѣе. При чемъ замѣтить надлежитъ: вопервыхъ, что тѣло двигаяся такимъ образомъ, всегда находится въ одной плоскости; во вторыхъ, что многоугольникъ имъ описуемой со стороны центра S есть вогнутый; въ третьихъ, что треугольникъ aSa', какъ равный треугольнику aSb', равенъ такъ же и треугольнику ASa, что треугольникъ $a'Sa''$, какъ равный треугольнику $a'Sc'$, равенъ такъ же и треуголвнику aSa', и такъ далѣе. Изъ сего послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что двѣ какія инесть части ASP, ASQ многоугольника около центра S описаннаго, суть между собою какъ времена употребленныя тѣломъ на перейденіе отъ A къ P и отъ A къ Q; и поелику сіе всегда справедливо, какое бы ни было число сторонъ многоугольника, которое можетъ быть учинено столь велико, какъ хочешь, взявъ столь малую часть времени, каковая нужна для того будетъ; то за доказанное почитать надлежитъ, что секторы ASP, ASQ, которые суть предѣлы частей ASP, ASQ всѣхъ сихъ многоугольниковъ, суть между собою, какъ времена употребленныя тѣломъ на описаніе дугъ AP и AQ. Изъ двухъ первыхъ предложеній слѣдуетъ еще, что траекторія вся должна быть въ той же плоскости, и что

сверхъ того оная со стороны центра есть вогнутая.

(207) Начало площадей времени пропорціональныхъ соединенное съ одною изъ формулъ движенія ускореннаго, должно вести ко опредѣленію траекторіи. Чтобы къ сему достигнуть, мы оному началу дадимъ сей видъ $\frac{z^2 \partial\beta}{\partial t} = h$, и куда поставимъ вмѣсто ∂t равную величину $\frac{\partial s}{u}$, и потомъ вмѣсто u равную величину извлеченную изъ уравненія $u\partial u = -\frac{2V}{m}.\partial z$.

По причинѣ что $\partial s = \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial\beta^2}$ (член. 151), $z^2 \partial\beta = \frac{b\sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial\beta^2}}{u}$, откуда найдется $u^2 = \frac{b^2 \partial z^2}{z^4 \partial\beta^2} + \frac{b^2}{z^2}$ и $u\partial u = -\frac{2V}{m}\partial z = \frac{b^2 \partial z\, \partial^2 z}{z^4 \partial\beta^2} - \frac{2b^2 \partial z^3}{z^5 \partial\beta^2} - \frac{b^2 \partial z}{z^3}$. Сіе уравненіе есть тоже самое, что и слѣдующее $\frac{\partial^2 z}{z^2 \partial\beta^2} - \frac{2\partial z^2}{z^3 \partial\beta^2} + \frac{1}{z} = -\frac{2V}{m}.\frac{z^2}{b^2}$, къ которому мы достигли чрезъ первой способъ переложенія вопроса на уравненіе. (*)

(*) Весь сей членъ предназначенъ кажется для вящшаго убѣжденія въ справедливости формулы $u\partial u = -\frac{2V}{m}.\partial z$, потому что авторъ достигнувъ чрезъ посредство оной къ преднайденному инымъ образомъ дифференціальному уравненію траекторіи, въ приложеніи потомъ общей сей ѳеоріи къ частному случаю, которой мѣсто въ самой природѣ имѣетъ, онаго уравненія не употребляетъ, но ту формулу $u\partial u = -\frac{2V}{m}\partial z$, взятую послѣ формулы $\varphi = \frac{m}{2}.\frac{u\partial u}{\partial e}$, гдѣ e есть пространство, перейденное тѣломъ приобрѣтшимъ при концѣ онаго скорость u. Но сію самую формулу, весьма удобно можно произвести прямо изъ общихъ формулъ $P = \frac{m}{2}.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2}.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ и $u = \frac{\partial s}{\partial t}$, въ коихъ ускорительныя силы P и Q полагаются отъ начала по направленію координатъ x и y дѣйствующими.

Въ самомъ дѣлѣ замѣтивъ что послѣдняя изъ сихъ формулъ $u = \frac{\partial s}{\partial t}$ или $u^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}$ даетъ $u\partial u = \frac{\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y}{\partial t^2}$, поставимъ въ оную вмѣсто $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ ихъ величины извлеченныя изъ двухъ первыхъ, и мы будемъ имѣть $u\partial u = \frac{2(P\partial x + Q\partial y)}{m}$; сію найденную теперь нами формулу прилагая къ настоящему вопросу и разрѣшая средоточную силу V на двѣ V cos. β и V sin. β, параллельныя координатамъ x и y; коихъ начало полагается въ точкѣ A, мы получимъ $P = V \cos.\beta$, $Q = -V \sin.\beta$,

(208) Положимъ $V = \frac{K}{z^4}$, гдѣ K нѣкое постоянное количество, мы получимъ $u\partial u = -\frac{2K}{m}\cdot\frac{\partial z}{z^2}$, и оттуда найдется $u^2 = \frac{4K}{mz} + 2i$, гдѣ i произвольное постоянное количество. И такъ $\frac{4K}{mz} + 2i = \frac{h^2\partial z^2}{z^4\partial\beta^2} + \frac{h^2}{z^2}$, $\frac{h^2\partial z^2}{\partial\beta^2} = 2iz^4 + \frac{4K}{m}z^3 - h^2z^2$, и $\partial\beta = \frac{h\partial z}{z^2\sqrt{2i + \frac{4K}{mz} - \frac{h^2}{z^2}}}$.

Мы положимъ какъ и прежде (член. 204) $\frac{1}{z} = r$, и мы будемъ имѣть $\partial\beta = \frac{-h\partial r}{\sqrt{2i + \frac{4K}{m}r - h^2r^2}}$. Пусть $hr - \frac{2K}{mh} = p$ и предѣлъ содержанія $\frac{\Delta p}{\Delta\beta} = \frac{\partial p}{\partial\beta}$; тогда по причинѣ $-h^2r^2 + \frac{4K}{m}r = -p^2 + \frac{4K^2}{m^2h^2}$, предъидущее уравненіе перемѣнится на сіе $\partial\beta = \frac{-\partial p}{\sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2h^2} - p^2}}$, изъ котораго (по члену 148) найдется, что $\beta + n$, гдѣ n произвольная постоянная величина, равняется дугѣ имѣющей косинусъ $\frac{p}{\sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2h^2}}}$. И такъ $p, = hr - \frac{2K}{mh}, = \sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2h^2}}\cdot\text{cos}(\beta + n)$, и посему $\frac{1}{z} = \frac{2K}{m} + \sqrt{2i + \frac{4K}{m^2h^2}}\cdot\frac{\text{cos}(\beta + n)}{h}$.

(209) Означивъ чрезъ b радіусъ векторъ, которой проходитъ чрезъ вершину кривой линеи, и чрезъ g скорость тѣла въ сей точкѣ, найдешь изъ уравненія $u^2 = \frac{4K}{mz} + 2i$, $i = \frac{g^2}{2} - \frac{2K}{bm}$. Сверьхъ того, естьли положишь, что въ сей самой точкѣ касательная перпендикулярна къ радіусу вектору b, то по причинѣ $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial s}u = \frac{h}{2}$, будешь имѣть $h = bg$. (*)

потомъ, для 151 го члена, $P\partial x = -V\partial z\,\text{cos}.\beta^2 + Vz\partial\beta\,\text{sin}.\beta\,\text{cos}.\beta$, $Q\partial y = -V\partial z\,\text{sin}.\beta^2 - Vz\partial\beta\,\text{sin}.\beta\,\text{cos}.\beta$ и наконецъ $u\partial u = -\frac{2V\partial z\cdot\text{cos}.\beta^2 - \ldots\beta^2}{m} = -\frac{2V}{m}\cdot\partial z$.

(*) Ибо, когда $\partial S = \frac{SO\cdot\partial s}{2}$, то будетъ $SO\cdot u = h$, то есть въ сей точкѣ $h = bg$. Причемъ примѣтимъ, что изъ уравненія $SO\cdot u = h$ слѣдуетъ сіе предложеніе: скорость тѣла въ какомъ ниесть мѣстѣ траек-

И поставивъ сіи величины количествъ h и i въ выраженіе $2i + \frac{4K^2}{m^2b^2}$, оное сдѣлается

$$g^2 - \frac{4K}{bm} + \frac{4K^2}{b^2m^2g^2} = g^2\left(1 - \frac{4K}{bmg^2} + \frac{4K^2}{b^2m^2g^4}\right) = g^2\left(1 - \frac{2K}{bmg^2}\right)^2.$$

И посему опредѣливъ такимъ образомъ произвольныя постоянныя h и i, уравненіе кривой линеи перемѣнишь на сіе

$$\frac{1}{z} = \frac{2K}{mb^2g^2} + \left(\frac{1}{b} - \frac{2K}{mb^2g^2}\right)\text{cof.}\,(\beta + n).\ (*)$$

Но (въ членѣ 31 и 37) мы нашли, что полярное уравненіе коническихъ сѣченій есть $\frac{1}{z} = \frac{c \pm b + c.\text{cof.}(\beta + n)}{2bc \pm b^2}$, гдѣ c ексцентрицитетъ; слѣдовательно [по сходству онаго съ предъидущимъ, будетъ]

$\frac{2K}{mb^2g^2} = \frac{c \pm b}{2bc \pm b^2}$, $\frac{1}{b} - \frac{2K}{mbg^2} = \frac{c}{2bc \pm b^2}$, которыя уравненія суть тожественныя, и изъ которыхъ [изъ того и другаго] найдется $g^2 = \frac{2K}{mb}\cdot\frac{2c \pm b}{c \pm b}$. Изъ чего слѣдуетъ, что естьли мы чрезъ H означимъ высоту, съ которой тѣло постоянно силою $\frac{K}{mb^2}$ побуждаемое упасть должно, дабы приобрѣсти скорость g, то будетъ $g^2 = \frac{4KH}{mb^2}$ и $2H = \frac{2b^2c \pm b^2}{c \pm b}$. [Ибо, по свойству движенія равноускореннаго будетъ $\frac{K}{mb^2} : H = \frac{4K^2}{m^2b^4} : g^2$, и оттуда найдется преднаписанное выраженіе для g^2, потомъ по причинѣ что $g^2 = \frac{2K}{mb^2}\cdot\frac{2bc \pm b^2}{c \pm b}$, получится преднаписанное выраженіе для 2H].

торіи обратно пропорціональна перпендикуляру изъ центра на касательную опущенному.

Оное предложеніе, по нашему способу разсматривать кривыя линеи, коихъ ординаты выходятъ изъ одной точки, такъ докажется: въ 151мъ членѣ найдено, что синусъ угла составляемаго касательною съ радіусомъ векторомъ $= \frac{z\,\partial\beta}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}}$, то упомянутой перпендикуляръ SO $=$

$$z\frac{z\,\partial\beta}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta^2}} = 2\,.\,\frac{\frac{1}{2}z^2\,\partial\beta}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\beta}} = 2\,.\,\frac{\partial S}{\partial s};$$

почему будетъ $\partial S = \frac{SO\,.\,\partial s}{2}$ и по причинѣ $\frac{\partial S}{\partial s}u = \frac{b}{2}$, выдетъ SO $.\,u = h$.

(*) Сіе уравненіе показываетъ, что когда $z = b$, тогда $\text{cof.}(\beta + n) = 1$ или $\beta + n = 0$; и потому оное уравненіе есть уравненіе между радіусомъ векторомъ z и угломъ $\beta + n$ имъ составляемымъ съ тѣмъ радіусомъ векторомъ b, которой къ своей касательной перпендикуляренъ.

(210) Изъ предложеннаго предъ симъ мы заключимъ: 1) Что въ еллипсисѣ, означивъ чрезъ $2a$ большую ось $2c + 2b$, будетъ $2a = \frac{b^2}{b - H}$ [ибо, по причинѣ что $2a = 2c + 2b$, $2a - b = 2c + b$ и $2H = \frac{(2a - b)b}{a}$]; и какъ $2a$ должно быть количество положительное, то надобно что бы H было меньше b, дабы тѣло описало еллипсисъ.

2) Что въ гиперболѣ, означивъ такъ же чрезъ $2a$ большую ось, будетъ $2a = \frac{b^2}{H - b}$; откуда слѣдуетъ, что H должно быть больше b, дабы тѣло описало гиперболу.

3) Въ параболѣ H должно быть равно b [ибо въ уравненїи $2H = \frac{2bc \pm b^2}{c \pm b}$ положивъ $c = \frac{1}{0}$, выдетъ $2H = 2b$].

(211) Планеты главныя чувствительно описываютъ еллипсисы; почему будетъ $g = \sqrt{\frac{2K}{mb} \cdot \frac{2c + b}{c + b}}$, и [по причинѣ что $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{h}{2} = \frac{bg}{2}$, найдется] $\frac{2\partial s}{\partial t} = \sqrt{\frac{2K}{m} \cdot \frac{2bc + b^2}{c + b}}$. Откуда, означивъ чрезъ T время всего обращенїя и чрезъ A цѣлую площадь еллипсиса, выдетъ $T = 2A\sqrt{\frac{m}{2K} \cdot \frac{c + b}{2bc + b^2}}$. Но (по члену 132) $\pi(c + b)^2 : A = c + b : \sqrt{2bc + b^2}$, и $A = \pi(c + b)\sqrt{2bc + b^2}$; слѣдовательно $T = 2\pi(c + b)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{2K}}$.

Здѣсь K есть сумма составовъ солнца и планеты; почему естьли составы планетъ въ сравненїи состава солнца презрѣть можно, то изъ найденнаго уравненїя извлечется таковое заключенїе: Квадраты временъ обращенїя суть какъ кубы полуосей большихъ, или какъ кубы срединъ разстоянїй. Сїе заключенїе есть одинъ изъ законовъ Кеплеровыхъ; другїе же два стоятъ въ томъ, что планеты описываютъ еллипсисы, въ фокусѣ коихъ находится солнце, и что въ оныхъ еллипсисахъ площади описуемыя радїусами векторами пропорцїональны времени. (*)

(*) Къ сему заключенїю я нахожу за нужное присовокупить слѣдующее.
Вопервыхъ мнѣ кажется, что буква K здѣсь значитъ нѣчто иное,

нежели сумму составовъ, а именно: естьли составъ солнца означится буквою M, а составъ планеты буквою m, то $K = m(M + m)$. Въ самомъ дѣлѣ, когда чрезъ V разумѣлася доселѣ ускорительная совершенная сила на планету m дѣйствующая, а не простая, то означивъ чрезъ φ простую, будетъ и есть $V = m\varphi$; потомъ, поелику собственно простая ускорительная сила φ, отъ взаимнаго притяженія раждающаяся, а несовершенная V, пропорціональна сему выраженію $\frac{M + m}{z^2}$, выдетъ $V = m\varphi = m \cdot \frac{M + m}{z^2}$; почему изъ положенія $V = \frac{K}{z^2}$, и найдется $K = m(M + m)$. А такимъ образомъ формула $T = 2\pi (c + b)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{2K}}$ преобразится въ $T = 2\pi (c + b)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2(M + m)}} = \frac{\pi (c + b)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{M + m}}$, или еще, положивъ $c + b = a$, въ сію $T = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot \pi \sqrt{2}}{\sqrt{M + m}}$.

Вовторыхъ, поелику спутникъ какой нибудь планеты побуждается къ движенію и дѣйствительно движется около оной почти точно такъ какъ самая планета около солнца, то означивъ чрезъ τ время обращенія спутника около планеты m, чрезъ μ его составъ и чрезъ α большую полуось еллипсиса имъ описуемаго, будемъ имѣть равнымъ образомъ $\tau = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{2}}{\sqrt{m + \mu}}$.

Естьли въ первой изъ сихъ формулъ презрѣть составъ планеты m за малостію противу состава солнца M, и въ другой составъ спутника μ за малостію противу состава планеты m, то оныя формулы сдѣлаются $T = \frac{a^{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{2}}{\sqrt{M}}$, $\tau = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{2}}{\sqrt{m}}$, и мы будемъ имѣть пропорцію $T^2 : \tau^2 = \frac{a^3}{M} : \frac{\alpha^3}{m}$, или $M : m = \frac{a^3}{T^2} : \frac{\alpha^3}{\tau^2}$, чрезъ которую опредѣляется содержаніе состава солнца M къ составу планеты m.

Пусть плотность солнца $= D$, радіусъ его $= R$, плотность планеты $= d$ и радіусъ ея $= r$, будетъ $D : d = \frac{M}{R^3} : \frac{m}{r^3} = \frac{a^3}{R^3 T^2} : \frac{\alpha^3}{r^3 \cdot \tau^2}$; чрезъ что имѣемъ содержаніе плотности солнца къ плотности планеты.

Симъ образомъ найдены плотности всѣхъ тѣхъ планетъ, кои въ теченіи своемъ сопровождаются спутниками. Что же принадлежитъ до плотностей планетъ неимѣющихъ спутниковъ, какъ то меркурія, венеры

(212) Мы будемъ имѣть такъ же [по причинѣ что $\frac{z^2 \partial\beta}{\partial t} = h$] $\frac{\partial t}{\partial\beta} = z^2 \sqrt{\frac{m}{2K} \cdot \frac{c+b}{2bc+b^2}}$, или поставляя вмѣсто z^2 равную величину $\frac{(2bc+b^2)^2}{(c+b+c.\cos.(\beta+n))^2}$, $\frac{\partial t}{\partial\beta} =$ $\sqrt{\frac{m}{2K}(c+b)} \cdot \frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b+c.\cos.(\beta+n))^2}$. Естьли я учиню сїю пропорцїю $T : 360 = t : X$, то X будетъ *средняя аномалїя* планеты, а $\beta+n$ *истинная*, полагая что $\beta+n$ есть нуль, когда $z=b$; отсюда найдется $t = X\sqrt{\frac{m}{2K}(c+b)}$, и означивъ чрезъ $\frac{\partial X}{\partial\beta}$ предѣлъ содержанїя между разностями количествъ X и β, получится слѣдующее между истинною и среднею аномалїями уравненїе $\frac{\partial X}{\partial\beta} = \frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b+c.\cos.(\beta+n))^2}$. (*)

и марса, то не иначе ихъ найти можно, какъ чрезъ подобїе, или лучше чрезъ способъ, которой въ Физикѣ называется methodus per inductionem; и такъ астрономы видя, что плотности тѣхъ планетъ, въ коихъ оныя по показанному теперь способу сдѣлалися извѣстны, увеличиваются по мѣрѣ приближенїя планетъ къ солнцу, не безъ вѣроятїя положили, что сїе равно имѣетъ мѣсто и въ другихъ трехъ планетахъ. Разсматривая же законъ сего увеличиванїя извѣстныхъ плотностей, оказалось, что оныя плотности почти пропорцїональны квадратнымъ корнямъ среднихъ движенїй, сирѣчь квадратнымъ корнямъ среднихъ угольныхъ скоростей, кои суть въ обратномъ содержанїи среднихъ перїодическихъ временъ обращенїя; почему плотности всѣхъ планетъ стали быть извѣстны.

Зная содержанїе плотностей или, все тоже, составовъ, можно опредѣлить дѣйствїе тяжести на поверьхности каждой планеты. Пусть G дѣйствїе тяжести на поверхности солнца и g дѣйствїе тяжести на поверхности планеты; будетъ $G = \frac{M}{R^2}$, $g = \frac{m}{r^2}$ и $G : g = \frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2} = DR : dr$, или $G : g = \frac{a3}{R^2 T^2} : \frac{a3}{r^2 T^2}$.

(*) Чтобы изъ предписанной пропорцїи вышло $t = X\sqrt{\frac{m}{2K}(c+b)}$ и потомъ $\frac{\partial X}{\partial\beta} = \frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b+c.\cos.(\beta+n))^2}$, то вмѣсто 360° надлежитъ

употребить $2\pi(c+b)$, что есть окружность круга описаннаго половиною большей оси. Но справедливѣе учинить сїю пропорцїю $T : 2\pi = t : X$, и тогда будетъ $t = \frac{TX}{2\pi} = X(c+b)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{2K}}$ и уравненїе между истинною и среднею аномалїями $\beta + n\ (= \vartheta)$ и X выдетъ $\frac{\partial X}{\partial \vartheta} =$

$$\frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b)(c+b+c\,.\cos.\,\vartheta)^2}.$$

Здѣсь представляются два вопроса, изъ коихъ первой состоитъ во опредѣленїи средней аномалїи X по истинной ϑ, а другой во опредѣленїи истинной ϑ по средней X, и коимъ авторъ далъ рѣшенїе въ послѣдствїи, употребивъ къ тому начала вышшаго порядка, а наипаче при рѣшенїи втораго вопроса, которое онъ основалъ на *изчисленїи частныхъ дифференцїаловъ*. Мы въ слѣдующемъ предложимъ иное рѣшенїе, основанное на началахъ доселѣ нами и авторомъ изъясненныхъ.

Формула $\partial t = z^2\partial\beta\sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{c+b}{2bc+b^2}}$ даетъ $t = 2\sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{c+b}{2bc+b^2}}\cdot\int\frac{z^2\partial\vartheta}{2}$, полагая $\beta + n = \vartheta$; и, какъ интегралъ $\int\frac{z^2\partial\vartheta}{2}$ изображаетъ квадратуру кривой линеи, то для опредѣленїя онаго на большей оси еллипсиса опиши кругъ и продолживъ ординату $z\sin.\vartheta$ до пресѣченїя съ окружностїю сего круга, проведи отъ онаго въ центръ прямую, чтобы произошелъ круговой секторъ, и такъ же отъ пресѣченїя сей ординаты съ окружностїю еллипсиса въ тотъ же центръ другую прямую, чтобы произошелъ еллиптической секторъ; будетъ, означивъ уголъ круговаго сектора чрезъ φ, площадь онаго $= \frac{(c+b)^2}{2}\varphi$, и по причинѣ извѣстнаго его содержанїя $c+b : \sqrt{2bc+b^2}$ къ еллиптическому, площадь сего послѣдняго $= \frac{(c+b)\sqrt{2bc+b^2}}{2}\cdot\varphi$; потомъ, поелику площадь треугольника, на которую еллиптической секторъ превосходитъ квадратуру изображаемую интеграломъ $\int\frac{z^2\partial\vartheta}{2}$, $= \frac{cz\sin.\vartheta}{2}$ или по причинѣ что $z\sin.\vartheta : (c+b)\sin\varphi = \sqrt{2bc+b^2} : c+b$, оная площадь $= \frac{c\sqrt{2bc+b^2}}{2}\sin\varphi$, выдетъ $\int\frac{z^2\partial\vartheta}{2} = \frac{((c+b)\Phi - c\sin.\Phi)\sqrt{2bc+b^2}}{2}$, $t = ((c+b)\varphi - c\sin.\varphi)(c+b)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{2K}}$, и по причинѣ что $t = X(c+b)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{2K}}$, $X = \frac{(c+b)\Phi - c\sin.\Phi}{c+b}$. И такъ поелику $\sin.\varphi = \frac{z\sin.\vartheta}{\sqrt{2bc+b^2}} = \frac{(2bc+b^2)\sin.\vartheta}{(c+b+c\,.\cos.\,\vartheta)\sqrt{2bc+b^2}} = \frac{\sqrt{2bc+b^2}}{c+b+c\,.\cos.\,\vartheta}\sin.\vartheta$, средняя аномалїя X чрезъ посредство уравненїя $X = \frac{(c+b)\Phi - c\sin.\Phi}{c+b}$ по истинной ϑ удобно опредѣлена быть можетъ.

Если мы положимъ $c+b=a$ и $c=ae$, то будетъ $2bc+b^2 = a^2-c^2 = a^2(1-e^2)$, $c+b+c\cos\vartheta = a(1+e\cos\vartheta)$ и найденныя уравненія сдѣлаются $\sin\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\vartheta}.\sin\vartheta$, $X = \varphi - e\sin\varphi$.

Теперь чтобы опредѣлить истинную аномалію ϑ по средней, или разрѣшить другой обратный тому сей, извѣстный подъ именемъ Кеплеровой задачи, возмемъ уравненіе $\varphi = X + e\sin\varphi$ и давъ оному сей видъ $\sin\varphi = \sin(X+e\sin\varphi)$, замѣтимъ, что въ случаѣ планетъ членъ $e\sin\varphi$ есть весьма малъ; и мы будемъ имѣть чрезъ посредство Тейлоровой теоремы $Y = y + q.\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q^3}{2.3}.\frac{d^3y}{dx^3} +$ и проч., положивъ $x = X$, $q = e\sin\varphi$, $y = \sin X$, и $Y = \sin(X+e\sin\varphi) = \sin\varphi$, $\sin\varphi = \sin X + e\sin\varphi\cos X - \frac{e^2}{2}\sin\varphi^2\sin X - \frac{e^3}{2.3}\sin\varphi^3\cos X +$ и проч. $= \sin X + e\sin\varphi\cos X - \frac{e^2}{2}\sin\varphi\sin X(\sin X + e\sin\varphi\cos X -$ и проч.$) - \frac{e^3}{2.3}\sin\varphi\cos X(\sin X^2 +$ и проч.$) +$ и проч. $= \sin X + e\sin\varphi\cos X - \frac{e^2}{2}\sin\varphi\sin X^2 - \frac{e^3}{2}\sin\varphi^2\sin X\cos X +$ и проч. $- \frac{e^3}{2.3}\sin\varphi\sin X^2\cos X -$ и проч. $+$ и проч. $= \sin X + e\sin\varphi\cos X - \frac{e^2}{2}\sin\varphi\sin X^2 - \frac{e^3}{2}\sin\varphi\sin X\cos X(\sin X +$ и проч.$) - \frac{e^3}{2.3}\sin\varphi\sin X^2\cos X -$ и проч. $+$ и проч. $= \sin X + e\sin\varphi\cos X - \frac{1}{2}e^2\sin\varphi\sin X^2 - \frac{2}{3}e^3\sin\varphi\sin X^2\cos X +$ и проч. И какъ $\sin\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\vartheta}.\sin\vartheta$, то получимъ $(1 - e\cos X + \frac{1}{2}e^2\sin X^2 + \frac{2}{3}e^3\sin X^2\cos X +$ и проч.$)\sin\vartheta\sqrt{1-e^2} = (1+e\cos\vartheta)\sin X$, $\sin\vartheta =$

$$\frac{\sin X + e\sin X\cos\vartheta}{(1 - e\cos X + \frac{1}{2}e^2\sin X^2 + \frac{2}{3}e^3\sin X^2\cos X + \text{и проч.})\sqrt{1-e^2}},$$

и означивъ $\frac{e\sin X}{(1 - e\cos X + \frac{1}{2}e^2\sin X^2 + \frac{2}{3}e^3\sin X^2\cos X + \text{и проч.})\sqrt{1-e^2}}$ чрезъ $\tan\gamma$, $\sin\vartheta = \frac{\sin\gamma}{e\cos\gamma} + \frac{\sin\gamma\cos\vartheta}{\cos\gamma}$ или $e\sin\vartheta\cos\gamma - e\cos\vartheta\sin\gamma = \sin\gamma$, или еще $\sin(\vartheta - \gamma) = \frac{\sin\gamma}{e}$, то есть $\vartheta - \gamma = A.\frac{\sin\gamma}{e}$. И такъ Кеплерова задача разрѣшена.

Въ эллиптическомъ движеніи планетъ разность аномалій $X - \vartheta$ есть то, что называется *уравненіемъ орбиты*. Оное будетъ наибольшее когда содержаніе $\frac{\partial X}{\partial\vartheta} = 1$, почему чтобы опредѣлить мѣсто, гдѣ сіе быть имѣетъ, возьми найденное выше выраженіе сего содержанія $\frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b)(c+b+c\cos\vartheta)^2}$

$= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos.\vartheta)^2}$ и уравняй его единицѣ; чрезъ что получишь $1+e\cos\vartheta = (1-e^2)^{\frac{3}{4}}$, и по причинѣ уравненія еллипсиса $z = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\vartheta}$, $z = a(1-e^2)^{\frac{1}{4}} = a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{4}} = a\left(\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{\frac{k}{a}} = \sqrt{ak}$, полагая $a^2-c^2=k^2$. И такъ уравненіе орбиты бываетъ наибольшее въ томъ мѣстѣ ея, гдѣ радіусъ векторъ или истинное разстояніе планеты до солнца равняется средней пропорціональной между двухъ полуосей орбиты.

Наконецъ что бы взаимное отношеніе между истинною и среднею аномаліями, или все тоже, взаимное отношеніе между временемъ и истинною аномаліею найти въ параболическомъ движеніи кометъ, уравненія $\partial t = z^2\partial\vartheta\sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{c+b}{2bc+b^2}}$, $z=\frac{2bc+b^2}{c+b+c\cos.\vartheta}$, для $c=\frac{1}{0}$, преобрази въ сіи $\partial t = z^2\partial\vartheta\sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{\frac{1}{0}+b}{2\cdot\frac{1}{0}b+b^2}} = z^2\partial\vartheta\sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{1}{2b}}$, $z = \frac{2b\cdot\frac{1}{0}+b^2}{\frac{1}{0}+b+\frac{1}{0}\cos.\vartheta} = \frac{2b}{1+\cos.\vartheta}$, и возьми послѣдняго, представленнаго въ семъ видѣ $z(1+\cos.\vartheta)=2b$, дифференціалъ $(1+\cos\vartheta)\partial z - z\partial\vartheta\sin.\vartheta = 0$, и сыскавъ $1+\cos.\vartheta=\frac{2b}{z}$ и $z\sin.\vartheta = 2b^{\frac{1}{2}}\sqrt{z-b}$, поставь въ сей дифференціалъ равныя величины; получишь $2b\partial z - z^2\partial\vartheta\sin.\vartheta=0$, $2bz\partial z - z^2\partial\vartheta\, 2b^{\frac{1}{2}}\sqrt{z-b}=0$, $z^2\partial\vartheta = \frac{b^{\frac{1}{2}}z\partial z}{\sqrt{z-b}}$ и $t=\sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{1}{2b}}\int z^2\partial\vartheta = \sqrt{\frac{m}{2K}\cdot\frac{1}{2b}}\int\frac{b^{\frac{1}{2}}z\partial z}{\sqrt{z-b}} = \frac{(z+2b)\sqrt{z-b}}{3\sqrt{M+m}}$.

Сему уравненію можно дать еще оной видъ, такъ чтобы время t изображено было чрезъ аномалію ϑ. Въ самомъ дѣлѣ, когда $z+2b=z-b+3b$, то $t=\frac{(z-b)^{\frac{3}{2}}+3b(z-b)^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{M+m}}$, и когда по причинѣ уравненія кривой $z=\frac{2b}{1+\cos.\vartheta}$, $z-b = b\frac{1-\cos.\vartheta}{1+\cos.\vartheta} = b\frac{\sin.\frac{1}{2}\vartheta^2}{\cos.\frac{1}{2}\vartheta^2} = b\,\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\vartheta^2$, то будетъ наконецъ $t = \frac{b^{\frac{3}{2}}(\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\vartheta^3+3\,\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\vartheta)}{3\sqrt{M+m}}$.

(213) Пусть тѣло описываетъ окружность круга (черт. LI) коего радіусъ r. Естьли по прибытіи его въ А на сей окружности возмется другая точка М и протянется перпендикуляръ Mn къ касательной АГ и хорда АМ; то содержаніе $\frac{Mn}{\Delta t^2} = \frac{\overline{AM}^2}{2r\Delta t^2}$ будетъ имѣть предѣломъ *средоточнобѣжную силу* въ точкѣ А; и поелику въ сей точкѣ дуга и хорда сливаются, и скорость есть предѣлъ содержанія $\frac{AM}{\Delta t}$, гдѣ АМ дуга, то слѣдуетъ, что выраженіе средоточнобѣжной силы есть квадратъ скорости раздѣленный на двойный радіусъ, или просто квадратъ скорости раздѣленный на радіусъ, когда изчисленіе учинится въ предположеніи кривой линеи периметромъ многоугольника (член. 198). Откуда мы заключить можемъ вообще, что тѣло, коего составъ m и кое описываетъ какую нибудь кривую линею, имѣетъ въ каждой точкѣ средоточнобѣжную силу чрезъ $\frac{m\,u^2}{2r}$ изображенную, гдѣ r радіусъ кривизны и u скорость въ той точкѣ (*).

При чемъ помнить надлежитъ, что въ кривой со стороны оси вогнутой линеи (по члену 177) $\frac{1}{r} =$ предѣл. содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\Delta y}$, гдѣ $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$; и сего ради взявъ за предѣлъ содержанія $\frac{\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x}$ сіе количество $\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial x^3}$ (член. 159), получишь $\frac{1}{r} = -\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial s^3}$.

(214) Я возьму уравненія $P = \frac{m}{2}.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2}.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $u = \frac{\partial s}{\partial t}$, изъ которыхъ по причинѣ $u^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}$, я найду $u\,\partial u = \frac{\partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2(P\partial x + Q\partial y)}{m}$. Такъ же будетъ $\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x =$

(*) Сію формулу мы выведемъ ниже сего изъ общихъ началъ, гораздо яснѣйшимъ образомъ, нежели какъ то здѣсь здѣлалъ авторъ.

$\frac{2\partial t^2(Q\partial x - P\partial y)}{m}$ и $\frac{mu^2}{2r} = \frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, [ибо выше найдено было, что $\partial x\, \partial^2 y - \partial y\, \partial^2 x = -\frac{\partial s^3}{r}$, и притомъ извѣстно, что $\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = u^2$].

Мы замѣтимъ, что $\frac{P\partial x + Q\partial y}{\partial s}$ и $\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$ суть выраженія *силы касательной и силы нормальной.* Въ самомъ дѣлѣ, протянувъ касательную МТ (черт. LII., нормаль МК, перпендикулярную ординату МР и параллельную къ оси АР прямую МО, возьми на МР и МО части Мn и Мm для изображенія силъ — Q и Р, и сострой потомъ параллелограммы Мhni, Мemf; будетъ Мi + Мe сила нормальная и Мf — Мh сила касательная. Но подобные треугольники Мin, Мem, МРК даютъ МК : МР : РК = Мn : Мi : in = Мm : me : Мe, или (по члену 146) $\partial s : \partial x : \partial y$ = — Q : Мi : Мh = Р : Мf : Мe, и отсюда выдетъ М$i = -\frac{Q\partial x}{\partial s}$, М$h = -\frac{Q\partial y}{\partial s}$, М$f = \frac{P\partial x}{\partial s}$, М$e = \frac{P\partial y}{\partial s}$; слѣдовательно М$i$ + Мe = $\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, М$f$ — Мh = $\frac{P\partial x + Q\partial y}{\partial s}$ (*).

(*) Авторъ при доказательствѣ, что формулы $\frac{P\partial x + Q\partial y}{\partial s}$, $\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$ изображаютъ касательную и нормальную силы, придалъ силѣ Q знакъ —, для того, что взятая имъ кривая линея есть со стороны оси вогнутая, и что въ первыхъ формулахъ $P = \frac{m}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ сего въ разсужденіе принято не было. Естьли же напротивъ того сіе въ оныхъ первыхъ формулахъ примется въ разсужденіе, то есть оныя формулы напишутся такъ $P = +\frac{m}{2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = -\frac{m}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, тогда въ упомянутомъ доказательствѣ уже нѣтъ надобности силѣ Q придавать знакъ —; и такимъ образомъ чрезъ разрѣшеніе силъ выведенныя формулы $\frac{P\partial x - Q\partial y}{\partial s}$, $\frac{P\partial y + Q\partial x}{\partial s}$, изображающія касательную и нормальную силы, будутъ паки сходственны съ выведенными изъ первыхъ формулъ $P = \frac{m}{2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = -\frac{m}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, то есть съ сими $u\partial u = \frac{2(P\partial x - Q\partial y)}{m}$, $\frac{m}{2r} = \frac{P\partial y + Q\partial x}{\partial s}$. Такъ же оныя формулы, изображающія касательную и нормальную силы будутъ сходственны, безъ придаванія силѣ Q знака —, съ выведенными изъ первыхъ непоправленныхъ $P = \frac{m}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, когда въ разрѣшеніи силы Q поступлено будетъ сходственно съ предположеніемъ сихъ первыхъ формулъ, то есть когда сдѣлается параллелограммъ Мhni не на ординатѣ РМ, но на продолженіи оной въ противную сторону. Оныя не поправлен-

(215) Естьли тѣло состава m побуждаемое токмо своею тяжестію, принуждено будетъ двигаться по криволинейному жолобу BME (черт. LIII), то означивъ чрезъ g тяжесть, будешь имѣть $Q = 0$ и $P = \pm mg$, поелику сила будетъ ускорительная, когда тѣло низходитъ, и укоснительная когда возходитъ; сверьхъ того будешь имѣть $u\partial u = \pm 2g\, \partial x$, откуда выдетъ $u^2 = h^2 \pm 4gx$, гдѣ h^2 произвольное постоянное количество. Потомъ употребивъ надлежащее вниманіе на приложенной чертежъ, увидишь, что когда ∂x возмется за положительную величину, ∂y должна быть отрицательная; откуда удобно будетъ заключить, что $\frac{mu^2}{2r} \pm \frac{mg\,\partial y}{\partial s}$ есть сила давленія, тѣломъ на жолобѣ производимаго, [ибо въ общемъ чертежѣ выраженіе $\frac{mu^2}{2r}$ есть средоточнобѣжная сила дѣйствующая по перпендикулярному къ кривой линеи направленію, а выраженіе $\mp \frac{mg\,\partial y}{\partial s}$ нормальная сила $\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, дѣйствующая

ныя формулы $P = \frac{m}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ собственно причадлежатъ къ выпуклой кривой линеи, и естьли мы принаровимъ ихъ къ оной, то пристойнымъ образомъ разрѣшая силы P и Q на касательныя A и B, и нормальныя C и D, получимъ $A = \frac{P\partial x}{\partial s}$, $B = \frac{Q\partial y}{\partial s}$, $C = \frac{P\partial y}{\partial s}$, $D = \frac{Q\partial x}{\partial s}$, и цѣлыя касательная и нормальная силы T и N будутъ, первая $T = A + B = \frac{P\partial x + Q\partial y}{\partial s}$, и другая $N = D - C = -\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, то есть формулы изображающія касательную и нормальную силы паки сходственны съ формулами $u\partial u = \frac{2(P\partial x + Q\partial y)}{m}$, $\frac{mu^2}{2r} = \frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, выведенными изъ $P = \frac{m}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $Q = \frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, ибо послѣдняя въ случаѣ выпуклой кривой линеи приметъ сей видъ $\frac{mu^2}{2r} = -\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$.

И такъ вогнутая ли или выпуклая со стороны оси кривая линея будетъ, въ формулахъ $u\partial u = \frac{2(P\partial x + Q\partial y)}{m}$, $\frac{mu^2}{2r} = \frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, выведенныхъ непосредственно изъ $P = \frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ и $Q = \frac{m}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, выраженія $\frac{P\partial x + Q\partial y}{\partial s}$ и $\frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$ изображаютъ касательную и нормальную силы, такимъ образомъ, что когда въ первомъ случаѣ послѣднее выраженіе примется за положительное, въ другомъ оное должно быть взято отрицательно.

ствующая по тому же направленію въ противную сторону.] И хотя въ выражени $\frac{1}{r}$ [$= \frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{-\partial y}$] $= \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^3}$ всѣ первыя разности приемлются за перемѣнныя, однако [по причинѣ что въ формулу $\frac{mg^2}{2r} \pm \frac{y\,\partial y}{\partial s}$ время t, коего разность была взята за постоянную, не входитъ] можно тутъ положить Δs постоянною, и по причинѣ, что изъ сего положенія выходитъ, для $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, $\partial x\, \partial^2 x + \partial y\, \partial^2 y = 0$ или $\partial^2 x = -\frac{\partial y\, \partial^2 y}{\partial x}$, будешь имѣть $\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial s}$. И такъ упомянутая сила давленія имѣетъ таковое выраженіе $\frac{m}{2}(h^2 \pm 4gx)\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial s} \pm mg.\frac{\partial y}{\partial s}$, которое надлежитъ уравнять постоянному количеству, когда вопросъ будетъ состоять въ сысканіи жолоба, на которой бы производимое тѣломъ давленіе было одинаково, по всему его протяженію.

Естьли жолобъ сдѣланъ будетъ дугою круга, то по причинѣ $y = \sqrt{2rx - x^2}$, будешь имѣть $-\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - x}{\sqrt{2rx - x^2}}$, $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{r}$, и слѣдственно $-\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{r - x}{r}$; чрезъ что величина $\frac{mu^2}{2r} \pm mg.\frac{\partial y}{\partial s}$, сдѣлается $\frac{m}{2r}(h^2 \pm 4gx) \pm mg.\frac{r - x}{r} = \frac{m^2 h^2}{2r} \pm \frac{3mgx}{r} \pm mg.$ (*)

(*) Мы здѣсь находимъ за нужное придать сему члену большую всеобщность и ясность.

Положимъ, что тѣло m побуждаемое ускорительными силами P и Q по направленію координатъ x, y криволинейнаго жолоба, принуждено будетъ двигаться по оному; я говорю, что жолобъ замѣняетъ здѣсь нѣкоторую силу Z дѣйствующую перпендикулярно къ кривой линеи имъ составляемой. Въ самомъ дѣлѣ, когда бы жолоба не было и тѣло бы двигалося свободно, то бы оное отъ силъ P и Q описало нѣкую кривую линею различную отъ той, которую жолобъ составляетъ; но поелику жолобъ есть и по положенію тѣло описываетъ кривую линею имъ составляемую, то явно, что оный жолобъ замѣняетъ нѣкую силу, могущую совратить тѣло съ того пути, которой бы оное отъ силъ P и Q описало, двигаяся свободно. Потомъ поелику жолобъ не иначе можетъ дѣйствовать на тѣло, какъ страдательно, преодолѣвая производимое на него давленіе, произходящее отъ стремленія тѣла дабы совратиться съ криволинейнаго пути

жолобомъ составляемаго, то по причинѣ что направленіе всякаго давленія всегда есть перпендикулярно къ противополагающейся препонѣ, слѣдуетъ что жолобъ дѣйствительно замѣняетъ силу Z равную производимому на него тѣломъ давленію, и дѣйствующую перпендикулярно къ кривой имъ составляемой.

И такъ вмѣсто жолоба да будетъ взята сила Z; разрѣши ее на двѣ по направленію координатъ x и y, и будетъ первая $Z\frac{\partial y}{\partial s}$, а другая $Z\frac{\partial x}{\partial s}$; посему теперь вмѣсто силъ P и Q дѣйствующихъ по направленію координатъ x, y будутъ дѣйствовать силы $P+Z\frac{\partial y}{\partial s}$ и $Q-Z\frac{\partial x}{\partial s}$. Возьми найденныя выше формулы $\frac{mu\partial u}{2}=P\partial x+Q\partial y$ и $\frac{mu^2.\partial s}{2r}=P\partial y-Q\partial x$, и поставъ въ нихъ вмѣсто P и Q, $P+Z\frac{\partial y}{\partial s}$ и $Q-Z\frac{\partial x}{\partial s}$; будешь имѣть $\frac{m.u\partial u}{2}=(P+Z\frac{\partial y}{\partial s})\partial x+(Q-Z\frac{\partial x}{\partial s})\partial y$ и $\frac{mu^2\partial s}{2r}=(P+Z\frac{\partial y}{\partial s})\partial y-(Q-Z\frac{\partial x}{\partial s})\partial x$; откуда выдетъ $u\partial u=\frac{2(P\partial x+Q\partial y)}{m}$ и $Z=\frac{mu^2}{2r}-\frac{P\partial y-Q\partial x}{\partial s}$. Изъ сихъ уравненій выходятъ слѣдующія заключенія:

Изъ перваго слѣдуетъ, что кривая линея жолобомъ составляемая отнюдъ скорости тѣла не перемѣняетъ, и что когда силы P и Q перестанутъ на тѣло дѣйствовать, или будетъ $P=0$ и $Q=0$, тогда выдетъ $\partial u=0$, то есть скорость u пребудетъ постоянна.

Изъ другаго же слѣдуетъ, что когда $P=0$, и $Q=0$, то и тогда на жолобъ будетъ производится давленіе $=\frac{mu^2}{2r}$. Сіе то давленіе собственно средоточнобѣжною силою называется.

Чтобы сравнить средоточнобѣжную силу f тѣла m, описывающаго радіусомъ r кругъ, съ тяжестію g; то означивъ чрезъ h высоту соотвѣтственную скорости u, найдешь $u^2=4gh$, $f\left(=\frac{u^2}{2r}\right)=\frac{2gh}{r}$ и $f:g=h:\frac{r}{2}$. Посему оказалось, что средоточнобѣжная сила на екваторѣ содержится къ тяжести въ томъ мѣстѣ какъ 1 : 289,49, и что когда бы земля обращалася въ 17 разъ скорѣе, тогда бы тѣла на екваторѣ находящіяся никакой почти тяжести не имѣли.

Изъ той же формулы средоточнобѣжной силы $f=\frac{mu^2}{2r}$ слѣдуетъ, что оная сила на поверьхности земли нашей уменьшается какъ косинусъ широты, и что уменьшеніе тяжести въ какой нибудь широтѣ отъ обращенія земли происходящее, равно средоточнобѣжной силѣ на екваторѣ умноженной на квадратъ косинуса оной широты. И такъ означивъ содержаніе 1 : 289,49 чрезъ $\frac{1}{n}$, широту мѣста чрезъ β и тяжесть на екваторѣ чрезъ g; будетъ тяжесть въ широтѣ $\beta=\frac{g(n+1-\cos.\beta^2)}{n}=g(1+\frac{1}{n}\sin.\beta^2)$, или естьли хочешь, $=g(1+\frac{1}{2n}\sin.\mathrm{v}.2\beta)$.

Пусть тѣло силою тяжести своей низходитъ по какому ниесть криволинейному жолобу, коего вертикальныя и горизонтальныя координаты x и y; будетъ въ формулѣ $u\partial u = \frac{2(P\partial x + Q\partial y)}{m}$, $Q = 0$, $P = mg$, $u\partial u = 2g\partial x$, и откуда выдетъ $u^2 = 4gx + k$; положимъ, что $u = 0$, когда $x = 0$, сїе даетъ $k = 0$, и $u^2 = 4gx$. И такъ скорость приобрѣтенная катящимся тѣломъ по кривой поверьхности равна скорости приобрѣтенной свободно падающимъ тѣломъ съ высоты сея поверьхности.

Чтоже принадлежитъ до времени, то оное надлежитъ искать изъ сей формулы $\partial t = \frac{\partial s}{u} = \frac{\partial s}{2\sqrt{gx}}$.

Наконецъ давленїе на поверьхность жолоба тѣломъ производимое найдется изъ сей формулы $Z = \frac{mu^2}{2r} - \frac{mg\partial y}{\partial s}$. При чемъ примѣтить должно, что сїя формула разнится въ знакѣ отъ найденной авторомъ для того, что мы полагаемъ горизонтальныя ординаты y прибавляющимися, когда вертикальныя абсциссы x прибавляются.

Пусть взята будетъ наклонная плоскость, которой высота h, основанїе b и длина l; найдется скорость при концѣ наклонной плоскости $= 2\sqrt{gh}$; потомъ по причинѣ что $x : h = y : b$, выдетъ $y = \frac{bx}{h}$, $\partial y = \frac{b\partial x}{h}$, $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x\sqrt{\frac{h^2+b^2}{h}} = \frac{l\partial x}{h}$, $\partial t \left(= \frac{\partial s}{2\sqrt{gx}}\right) = \frac{l}{2h\sqrt{g}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\partial x$, и наконецъ $t = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{x}{g}}$, гдѣ произвольное постоянное количество есть нуль. Положи $x = h$, будетъ $t = \frac{l}{\sqrt{hg}} = \sqrt{\frac{l^2}{h} : g}$. И такъ время употребленное тѣломъ на перейденїе всей длины наклонной плоскости равно времени, которое тяжелое тѣло употребитъ, падая съ высоты $\frac{l^2}{h}$. Откуда слѣдуетъ *исохронизьмъ* въ кругѣ Галилеемъ примѣченный.

Наконецъ производимое тѣломъ на наклонную плоскость давленїе $Z \left(= \frac{mu^2}{2r} - \frac{mg\partial y}{\partial s}\right)$, по причинѣ что $r = \frac{1}{0}$, будетъ $= -\frac{mg\partial y}{\partial s} = -mg\frac{b\partial x}{h} : \frac{l\partial x}{h} = -\frac{b}{l} \cdot mg$. Знакъ $-$ показываетъ, что давленїе производится не отъ оси абсциссъ x къ плоскости, но отъ плоскости къ оной оси.

Пусть тѣло восходитъ по жолобу сдѣланному дугою круга, коего радїусъ b, имѣя въ началѣ своего восхожденїя скорость $= c$, и положимъ, что касательная, сему началу соотвѣтствующая, параллельна горизонту; мы возмемъ ее за ось абсциссъ и перпендикуляры, на ней до пресѣченїя съ жолобомъ поставленные, за ординаты; будетъ въ формулахъ $u\partial u = \frac{2(P\partial x + Q\partial y)}{m}$ и $Z = \frac{mu^2}{2r} - \frac{P\partial y - Q\partial x}{\partial s}$, $P = 0$, $Q = -mg$, $r = -b$, и чрезъ то оныя формулы сдѣлаются $u\partial u = -2g\partial y$, $Z = -\frac{mu^2}{2b} - \frac{mg\partial x}{\partial s}$. Изъ перваго уравненїя найдется $u^2 = k - 4gy$, гдѣ k произвольное

постоянное количество, и по причинѣ что когда $x = o$, тогда $y = o$ и $u = c$, $u = \sqrt{c^2 - 4gy}$. ПотомЪ, поелику $x^2 + (b-y)^2 = b^2$, выдетЪ $x = \sqrt{2by-y^2}$, $\partial x = \frac{b\partial y - y\partial y}{\sqrt{2by-y^2}}$ и $\partial s = \frac{b\partial y}{\sqrt{2by-y^2}}$, и второе уравненіе сдѣлается $Z = -\frac{m(c^2-4gy)}{2b} - \frac{mg(b-y)}{b} = -\frac{mc^2}{2b} + \frac{3mgy}{b} - mg$, и какЪ вЪ семЪ случаѣ давленіе есть отрицательное, вЪ противную сторону предположенному вЪ общихЪ формулахЪ дѣйствующее, то оное будетЪ $= mg(1 + \frac{c^2}{2bg} - \frac{3y}{b})$.

Теперь, чтобы опредѣлить время t, возмемЪ формулу $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, которая по учиненіи вставливанія сдѣлается $\partial t = \frac{b\partial y}{\sqrt{c^2-4gy}.\sqrt{2by-y^2}}$. Естьли дуга, на которую тѣло возходитЪ, будетЪ весьма мала, такЪ что безЪ чувствительной погрѣшности y^2 противу $2by$ презрѣть можно будетЪ, то сдѣлается $\partial t = \frac{b\partial y}{\sqrt{2bc^2y - 8bgy^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{\frac{c^2}{4g}.y - y^2}}$,

и будетЪ $t = k + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}.\text{A}\sin.v.\frac{y}{\frac{1}{2}.\frac{c^2}{4g}}$, или по причинѣ что $t = o$,

когда $y = o$, $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}.\text{A}\sin.v.\frac{y}{\frac{1}{2}.\frac{c^2}{4g}}$. СдѣлавЪ же $y = \frac{c^2}{4g}$, найдется

полная величина $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}$, потому что когда $y = \frac{c^2}{4g}$, тогда скорость $u = o$, то есть тѣло восходить перестаетЪ.

Отсюда непосредственно слѣдуетЪ вся теорія отвѣсовЪ; но чтобы изложить оную прямѣйшимЪ путемЪ, то мы разрѣшимЪ сей вопросЪ: опредѣлить время которое тѣло употребить должно на нисхожденіе по данной дугѣ круга BME(черт. LIII), отЪ начала ея B до самой нижней точки E, вЪ которой касательная параллельна горизонту? Пусть радіусЪ сея дуги $= b$, высота AE $= h$, абсцисса EP $= x$, ордината PM $= y$ и дуга BM $= s$; будетЪ $y = \sqrt{2bx - x^2}$, $\partial y = \frac{(b-x)\partial x}{\sqrt{2bx-x^2}}$, $\partial s = \frac{-b\partial x}{\sqrt{2bx-x^2}}$, потому что когда s прибавляется, x убываетЪ; потомЪ $\partial t = \frac{\partial s}{u} = \frac{-b\partial x}{2\sqrt{g(b-x)}\sqrt{2bx-x^2}}$

и $t = \int \frac{-b\partial x}{2\sqrt{g(b-x)}\sqrt{2bx-x^2}} = -\frac{b}{2\sqrt{g}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{bx-x^2}}(2b-x)^{-\frac{1}{2}} =$
$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{bx-x^2}}(1 + \frac{x}{4b} + \frac{3x^2}{32b^2} + \frac{5x^3}{128b^3} +$ и проч.$)$. И такЪ все дѣло состоитЪ вЪ опредѣленіи интеграловЪ $\int\frac{\partial x}{\sqrt{bx-x^2}}$, $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{bx-x^2}}$,

$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{hx - x^2}}$, и проч.; которые по 4й статьѣ нашихъ присовокупленій къ обратному способу предѣловъ удобно найдутся; и выдетъ
$t = k - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}(A\,\text{sin}.\,v.\,\frac{2x}{h} + \frac{1}{4b}\frac{h}{2}\,A\,\text{sin}.\,v.\,\frac{2x}{h} + \frac{3}{32b^2}.\frac{3}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 A\,\text{sin}.\,v.\,\frac{2x}{h}$
$+ \frac{5}{128\,b^3}.\frac{3.5}{2.3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 A\,\text{sin}.\,v\,\frac{2x}{h} +$ и проч. $- \frac{1}{4b}\sqrt{hx - x^2}$
$- \frac{3}{32\,b^2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.\frac{h}{2}\right)\sqrt{hx - x^2} - \frac{5}{128\,b^3}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2.3}.\frac{hx}{2} + \frac{3.5}{2.3}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\sqrt{hx - x^2}$
— и проч.). Когда $x = h$, то $t = 0$, и будетъ $k =$
$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}\left(\pi + \frac{\pi h}{8b} + \frac{9\pi h^2}{256\,b^2} + \frac{25\pi h^3}{2048} +\right.$ и проч.). Теперь положивъ $x = 0$, выдетъ полная величина времени $t = k = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}(1 + \frac{1}{8}.\frac{h}{b} + \frac{9}{256}.\frac{h^2}{b^2}$
$+ \frac{25}{2048}.\frac{h^3}{b^3} +$ и проч.), которая величина тѣмъ болѣе приближается къ $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}$, чѣмъ содержаніе $\frac{h}{b}$ будетъ меньше. И такъ положивъ оное весьма малымъ, найдется употребленное тѣломъ на низхожденіе и возхожденіе малѣйшей дуги круга время $T = \pi\sqrt{\frac{b}{g}}$.

И какъ отвѣсъ качающійся на ниткѣ, коея длина b, точно въ томъ же состояніи находится, въ каковомъ и тѣло низходящее и потомъ восходящее по круговому жолобу, то найденная формула $T = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$ въ случаѣ отвѣса, совершающаго весьма малыя размахи, равно имѣетъ мѣсто. И положивъ сіе, изъ той формулы излечешь многія весьма достопримѣчательныя заключенія.

Вопервыхъ естьли означится чрезъ λ число размаховъ совершившихся во время T, то будетъ $\frac{T}{\lambda} = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$ и $b = \frac{2g\,.\,T^2}{\lambda^2\,\pi^2}$; откуда слѣдуетъ, что въ одномъ какомъ нибудь мѣстѣ длины двухъ отвѣсовъ суть въ обратномъ содержаніи квадратовъ взятыхъ изъ чиселъ размаховъ въ то же время совершившихся. Чрезъ сіе свойство найдется длина секундоваго и всякаго другаго отвѣса, а потомъ, въ формулѣ $T = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$ уравнявъ $T = 1''$ или иному какому нибудь опредѣленному времени, получится тяжесть или высота, которую тѣло въ первую единицу времени отъ сея силы переходитъ, $g = \frac{\pi^2 b}{2}$ или вообще $g = \frac{\pi^2 b}{2\,T^2}$.

И какъ длина секундоваго отвѣса b или сія высота g уже найдены и въ книги внесены, то явствуетъ, что чрезъ упомянутое выше свойство отвѣсовъ наши линейныя мѣры никогда утрачены быть не могутъ, какъ то случилося съ мѣрами древнихъ.

Во вторыхъ, поелику перемѣна тяжести отъ экватора къ полюсамъ выше была показана, и именно, естьли g означаетъ тяжесть на экваторѣ, то $g\left(1 + \frac{1}{2n}\,\text{sin}.\,v.\,2\beta\right)$ будетъ тяжесть въ широтѣ β; того ради длина

секундоваго отвѣса въ широтѣ β будетъ $b = \frac{2g(1 + \frac{1}{2n}\,\text{sin}.\,v.\,2\beta)}{\pi^2}$.

И такъ длина секундоваго отвѣса по мѣрѣ прибавленія въ широтѣ мѣста увеличивается; что и самыя наблюденія подтверждаютъ, а такимъ образомъ чрезъ сіе имѣемъ непреоборимое доказательство движенію земли около оси ея.

Въ третьихъ, посредствомъ формулы $\tau = \pi \sqrt{\frac{b}{2g}}$ соединенной съ формулою $T = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{M}}$, взятою относительно къ землѣ, можно найти содержаніе состава m сея планеты къ составу M солнца. Въ самомъ дѣлѣ, когда $g = \frac{m}{r^2}$ и $\phi = \frac{M}{R^2}$, гдѣ g и ϕ тяжести, а r, R радіусы земли и солнца, то преобразивъ преднаписанныя формулы въ сіи $g = \frac{\pi^2 b}{2\tau^2}$; $\phi = \frac{2\pi^2 a^3}{R^2 T^2}$ и умноживъ оныя на r^2 и R^2, мы получимъ $m : M = \frac{\pi^2 b r^2}{2\tau^2} : \frac{2\pi^2 a^3}{T^2} = 1 : \frac{4a^3\tau^2}{br^2T^2}$, или положивъ $\tau = 1$, $= 1 : \frac{4a^3}{br^2T^2}$.

Наконецъ по тяжести g вышепоказаннымъ образомъ опредѣленной, можно найти лунной параллаксисъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть r радіусъ земнаго екватора въ футы приведенный, x содержаніе между симъ радіусомъ и среднимъ разстояніемъ луны, которое почти равно 60, g сила тяжести земли, равняющаяся 15 Французскимъ или 16 Аглинскимъ футамъ, и z синусъ версусъ дуги описанной луною въ секунду времени; будетъ разстояніе луны $= rx$, и то количество, на кое луна въ секунду времени къ намъ подвигается, по причинѣ пропорціи $1 : z = rx : rzx$, $= rzx$; потомъ, поелику $g : rzx = x^2 : 1$, выдетъ $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{rz}{g}}$, что, по причинѣ $\frac{1}{x} = \frac{r}{rx}$, изображаетъ синусъ горизонтальнаго луннаго параллаксиса подъ екваторомъ, и потому оный параллаксисъ извѣстенъ.

Послѣ сего отступленія, мы паки обращаемся къ движенію тѣла по криволинейному жолобу, и того для замѣтимъ, что при семъ движеніи три вопроса представляются, кои наипаче достойны нашего вниманія: вопервыхъ, вопросъ о сысканіи кривой равнаго давленія, о которой въ началѣ сего члена авторъ упомянулъ; во вторыхъ, вопросъ о сысканіи кривой равновременнаго ската, которой извѣстенъ у Геометровъ подъ именемъ *таутохронизъма*, и наконецъ въ третьихъ, вопросъ о сысканіи кривой наискорѣйшаго ската, которой у Геометровъ извѣстенъ подъ именемъ *брахистохронизъма*.

Первой вопросЪ можно нѣкоторымЪ образомЪ разрѣшить и послѣ предложенныхЪ доселѣ началЪ; но другіе два, а наипаче послѣдній, для прямаго и строгаго рѣшенія требуютЪ совсѣмЪ особыхЪ началЪ. Правда Безу и Боссю вЪ своихЪ механикахЪ сему послѣднему вопросу дали весьма простое рѣшеніе, но основанное на ѳеоріи безконечныхЪ количествЪ, такЪ что оныхЪ вЪ ихЪ рѣшеніи кажется совсѣмЪ избѣгнуть не можно, или по крайней мѣрѣ весьма трудно оное рѣшеніе перевести на способЪ предѣловЪ. Почему мы здѣсь удовольствуемся токмо изложеніемЪ рѣшенія для перваго вопроса, и показаніемЪ, что обыкновенная циклоида есть кривая равновременнаго ската; что составитЪ непрямое рѣшеніе втораго вопроса.

И такЪ взявЪ выраженіе $\frac{m}{2}(h^2 \pm 4gx)\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial s} \pm mg\frac{\partial y}{\partial s}$, найденное авторомЪ вЪ семЪ членѣ для давленія производимаго тѣломЪ на жолобЪ, уравнимЪ оное постоянному количеству $\frac{mi}{2}$; изЪ чего получится уравненіе $(h^2 \pm 4gx)\partial^2 y \pm 2g\partial x\partial y = i\partial x\partial s$, гдѣ помнить надлежитЪ что разность Δs есть постоянна. ПотомЪ, что бы найти интегралЪ онаго, замѣтимЪ, что $\partial(\partial y\sqrt{h^2 \pm 4gx}) = \partial^2 y\sqrt{h^2 \pm 4gx} \pm \frac{2g\partial x\partial y}{\sqrt{h^2 \pm 4gx}}$; что явно есть первая часть нашего уравненія умноженная на $\frac{1}{\sqrt{h^2 \pm 4gx}}$; почему оное умножимЪ на сей множитель, и мы будемЪ имѣть $\partial^2 y\sqrt{h^2 \pm 4gx} \pm \frac{2g\partial x\partial y}{\sqrt{h^2 \pm 4gx}} = \frac{i\partial x\partial s}{\sqrt{h^2 \pm 4gx}}$, котораго уравненія интегралЪ, какЪ то явно, есть $\partial y\sqrt{h^2 \pm 4gx} + n\partial s = \pm\frac{i\partial s}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx}$, гдѣ n произвольное постоянное количество. ПоставимЪ $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ вмѣсто ∂s и мы получимЪ,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\pm\frac{i}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n}{\sqrt{(h^2 \pm 4gx - (\pm\frac{i}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n)^2)}}.$$ ПоложимЪ $i = 2g$, сирѣчь постоянное давленіе $\frac{mi}{2}$ = вѣсу mg тѣла m, будетЪ $\partial y = \frac{(\pm\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n)\partial x}{\sqrt{(h^2 \pm 4gx - (\pm\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n)^2)}} = \frac{(\pm\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n)\partial x}{\sqrt{\pm 2n\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(\pm\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n)\partial x}{\sqrt{\pm 2\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n}}$. Теперь, чтобы найти интегралЪ сей формулы, положи $\pm 2\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n = X$, выдетЪ $\partial x = \frac{\partial X\sqrt{h^2 \pm 4gx}}{4g} = \pm\frac{\partial X(X + n)}{8g}$, $\partial y = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pm\partial X(X + n)(X - n)}{16g \cdot X^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{1}{16g\sqrt{n}} \cdot (X^{\frac{3}{2}}\partial X - n^2 X^{\frac{1}{2}}\partial X)$, и $y = \pm\frac{1}{8g\sqrt{n}}(\frac{X^{\frac{5}{2}}}{5} - n^2 X^{\frac{1}{2}}) + k = \pm\frac{1}{2g}\frac{(h^2 \pm 4gx \mp n\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n^2)}{5}\sqrt{\pm 2\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n} + k$.

Во всякомЪ другомЪ случаѣ кривая линея есть трансцендентная.

Послѣ сего остается изслѣдовать движеніе тѣла по циклоидѣ. Пусть ВМЕ (Черт. LIII) обыкновенная циклоида, произведенная кругомъ, котораго радїусъ a, и пусть по ней катится тѣло, начиная отъ точки В, которая соотвѣтствуетъ высотѣ $AE = h$; будетъ означивъ координаты EP, PM чрезъ x, y и дугу ВМ чрезъ s, $y = a\,A\,\text{ſin.}\,v.\frac{x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}$, $\partial y = \frac{a\,\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{(a - x)\,\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{(2a - x)\,\partial x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\partial s = -\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = -\partial x\sqrt{\frac{2a}{x}}$, потому что когда s прибываетъ, тогда x убываетъ; потомъ $\partial t = \frac{\partial s}{2\sqrt{g.(b - x)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}.\frac{\partial x}{\sqrt{bx - x^2}}$ и $t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{bx - x^2}} = c - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}.A\,\text{ſin.}\,v.\frac{2x}{b}$.

Чтобы опредѣлить произвольное постоянное количество c, положи $x = h$, когда $t = o$, и будетъ $c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}.A\,\text{ſin.}\,v.2 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, и $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2a}{g}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}.A\,\text{ſin.}\,v.\frac{2x}{b}$; полная же величина сего времени найдется положивъ $x = o$, и выдетъ $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$. И какъ въ сію величину времени t высота h, съ которой тѣло по циклоидѣ катиться начинаетъ, совсѣмъ не входитъ, то слѣдуетъ изъ того, что всякая дуга циклоиды переходима бываетъ въ равное время и что циклоида есть кривая равновременнаго ската. Замѣтимъ, что положивъ $4a = b$, формула наша сдѣлается $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}$, которая есть совершенно таже, что и найденная выше для отвѣсовъ. Почему отсюда ѳеорія отвѣсовъ паки произведена быть можетъ.

О нѣкоторыхъ кривыхъ, коихъ свойство изъ равновѣсія познается.

(216) Цѣпь или веревка, коея концы прикрѣплены къ неподвижнымъ точкамъ, неминуемо долженствуетъ принять нѣкую кривизну. Чтобы найти оную, или лучше, чтобы найти свойство кривой называемой *цѣпною линеею*, изъ непремѣнныхъ точекъ B и D (черт. LIV) и изъ взятой по произволенію точки M опустимъ на горизонтальную линею AC перпендикуляры BA, DC и MP, кои да будутъ ординаты искомой кривой линеи; и протянувъ въ точкахъ B и M касательныя BT, MT, опустимъ еще изъ точки ихъ пресѣченія T на ту же ось AC перпендикуляръ TO; потомъ означимъ AP чрезъ x, PM чрезъ y, дугу BM чрезъ s, вѣсъ сея дуги чрезъ Π, напряженіе цѣпи по линеи BT чрезъ f, уголъ составляемый направленіемъ сего напряженія съ вертикаломъ чрезъ m. Мы можемъ положить, что вся цѣпь находится въ равновѣсіи, и въ семъ случаѣ доказывается въ елементахъ Статики, что $\Pi : f =$ sin. BTM : sin. OTM Но (10 члену 139) уголъ TMP имѣетъ тангенсомъ предѣл. содержанія $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, которой мы означимъ чрезъ $\frac{\partial x}{\partial y}$, и будетъ sin. TMP $= \frac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}$ и cos. TMP $= \frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}$; сверьхъ того уголъ OTM, какъ дополненіе угла TMP, имѣетъ синусомъ $\frac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}$ и косинусомъ $- \frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}$, и выдетъ sin. BTM $=$ sin. (BTO $+$ OTM) $= \frac{-\partial y \sin. m + \partial x \cos. m}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}$. Чего ради $\Pi : f = \partial x \cos. m - \partial y \sin. m : \partial x = \cos. m - \frac{\partial y}{\partial x} \sin. m : 1$, и отсюда произойдетъ общее уравненіе цѣпной линеи $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{f \cos. m - \Pi}{f \sin. m}$.

Естьли цѣпь по всей длинѣ своей имѣетъ одинаковую толщину, то можно положить $\Pi = s$, и будешь имѣть $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{f \cos. m - s}{f \sin. m}$; откуда, означивъ чрезъ $\frac{\partial s}{\partial x}$ предѣлъ содержанія $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, и положивъ Δx постоянною, найдется $\frac{\partial^2 y}{\partial x} = \frac{-\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}{f \sin. m}$, или $\frac{\partial y \, \partial^2 y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} = \frac{-\partial x \, \partial y}{f \sin. m}$.

Теперь поступая отъ предѣла къ количеству самому, выдетъ $\frac{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}{\partial x} = \frac{h - y}{f \sin. m}$, гдѣ h произвольное постоянное количество; потомъ найдется $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{(h - y)^2 - f^2 \sin. m^2}{f^2 \sin. m^2}$ и $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{f \sin. m}{\sqrt{(h - y)^2 - f^2 \sin. m^2}}$. Наконецъ (по члену 144) когда $z = \log. (h - y + \sqrt{(h - y)^2 - f^2 \sin. m^2})$, тогда $\partial z = \frac{-\partial y}{\sqrt{(h - y)^2 - f^2 \sin. m^2}}$; слѣдовательно здѣсь $x = i - f \sin. m. \log. (h - y + \sqrt{(h - y)^2 - f^2 \sin. m^2})$; гдѣ i произвольное постоянное количество.

(217) И такъ цѣпная кривая линея есть трансцендентная, коея геометрическое строеніе основано на логариѳмикѣ. (*).

(*) Чтобы показать оное строеніе самымъ дѣломъ, котораго изобрѣтатель славный Лейбницъ, то сыщемъ уравненіе цѣпной линеи, взявъ за начало координатъ самую нижшую точку цѣпи, въ которой касательная параллельна горизонту. На сей конецъ означимъ абсциссу взятую на вертикалѣ, чрезъ сію точку проходящемъ, чрезъ x, соотвѣтствующую горизонтальную ординату чрезъ y, дугу цѣпной линеи усѣченную оною ординатою чрезъ s, уголъ составляемый касательною, въ точкѣ сѣченія протянутою, съ вертикаломъ, чрезъ m, вѣсъ цѣпи чрезъ Π и напряженіе ея въ точкѣ, за начало координатъ взятой, чрезъ f; будетъ по доказанному въ Статикѣ $\Pi : f = \sin. (90° + m) : \sin. m = \cos. m : \sin. m = \frac{\partial x}{\partial s} : \frac{\partial y}{\partial s} = \partial x : \partial y$, и оттуда выдетъ $\Pi \partial y = f \partial x$; положимъ, что цѣпь по всей длинѣ своей одинакова и что $\Pi = as$ и $f = ab$, найденное уравненіе сдѣлается $s \partial y = b \partial x$ или $s = bp$, положивъ $\frac{\partial x}{\partial y} = p$; возьми уравненія $s = bp$ дифференціалъ $\partial s = b \partial p$ и поставь $\partial y \sqrt{1 + p^2}$ вмѣсто ∂s, получишь $\partial y = \frac{b \partial p}{\sqrt{1 + p^2}}$,

или умноживъ на p, $p \partial y = \partial x = \frac{b p \partial p}{\sqrt{1 + p^2}}$, котораго уравненія интегралъ есть $x = b\sqrt{1 + p^2} + c$, гдѣ когда $x = 0$, тогда $p, = \frac{\partial x}{\partial y}, = \cot. 0 = 0$, почему $c = -b$ и $x + b = b\sqrt{1 + p^2}$, или $x^2 + 2bx = b^2 p^2$; поставь вмѣсто p равную величину, и будешь имѣть послѣднее уравненіе $\partial y = \frac{b \partial x}{\sqrt{2bx + x^2}}$, котораго интегралъ найти надлежитъ. Положи для сего $\sqrt{2bx + x^2} = vx$, будетъ $x = \frac{2b}{v^2 - 1}$, $\partial x = \frac{-4bv\partial v}{(v^2 - 1)^2}$, $\sqrt{2bx + x^2} = \frac{2bv}{v^2 - 1}$ и $\partial y = \frac{b\partial x}{\sqrt{2bx + x^2}} = -\frac{2b\partial v}{v^2 - 1} = \frac{b\partial v}{v + 1} - \frac{b\partial v}{v - 1}$, и наконецъ $y = b\log.(v + 1) - b\log.(v - 1) + c = b\log.\frac{\sqrt{2bx + x^2} + x}{\sqrt{2bx + x^2} - x} + c = b\log.\frac{b + x + \sqrt{2bx + x^2}}{b} + c$, гдѣ по причинѣ что когда $x = 0$, тогда и $y = 0$, $c = 0$. И такъ урaвненіе цѣпной линеи въ самомъ простѣйшемъ видѣ есть сіе $y = b\log.\frac{b + x + \sqrt{2bx + x^2}}{b}$.

Теперь чтобы учинить сему уравненію геометрическое строеніе, опиши логариѳмику, взявъ b за подкасательную оной; проведи въ ней ординату равную b; возьми точку пресѣченія сей ординаты съ логариѳмикою за начало абсциссъ цѣпной линеи, а продолженное направленіе сей ординаты за самую ось абсциссъ; проведи двѣ другія ординаты логариѳмики Z и z въ равномъ разстояніи отъ ординаты b отстоящія; возми на направленіи ординаты b отъ точки взятой за начало кривой абсциссу равную $\frac{Z + z}{2} - b$, которая пусть будетъ x, и отъ конца ея проведи прямую параллельную оси логариѳмики до пресѣченія съ ординатами Z и z; оныя точки пресѣченія будутъ въ кривой, цѣпью составляемой. Въ самомъ дѣлѣ означивъ разстояніе ординатъ Z, z до ординаты b, чрезъ y, которое равняется такъ же и ординатѣ строимой кривой линеи, будешь имѣть $y = b\log. Z - b\log. b = b\log.\frac{Z}{b}$, по причинѣ что логариѳмической модуль равняется подкасательной логариѳмики; по томъ, по причинѣ $\frac{Z + z}{2} - b = x$, получишь $\frac{Z + z}{2} = b + x$, и по причинѣ что $Z : b = b : z$, или что $z = \frac{b^2}{Z}$, $\frac{Z}{2} + \frac{b^2}{2Z} = \frac{b^2 + Z^2}{2Z} = b + x$, и $Z = b + x + \sqrt{2bx + x^2}$; и такъ будетъ $y = b\log.\frac{b + x + \sqrt{2bx + x^2}}{b}$, которое уравненіе, какъ то явно, принадлежитъ къ цѣпной линеи.

Авторъ сей членъ наполнилъ, не весьма къ стати, нахожденіемъ уравненія логариѳмической спирали, до которой онъ коснулся въ членѣ 151мъ. Мы въ различныхъ мѣстахъ нашихъ примѣчаній говоря столько объ оной

кривой, нашли за нужное выпустить толь чуждый для сея главы предметЂ, и вмѣсто того помѣстить весьма пристойнѣйшій, то есть геометрическое строеніе цѣпной линеи, о которой лишь только вЂ предЂидущемЂ членѣ предложено было.

(218) Я заключу сіи приложенія изслѣдованіемъ другой трансцендентной кривой линеи, коей Яковъ Бернуллій далъ наименованіе *линеи упругости*. Я вображу себѣ упругой клинокъ AMB (черт. LV), которой утвержденъ въ непоколебимую препону B, и негибкій прутъ CA, которой приемлемый въ точкѣ A за нормаль, заставляетъ упругой клинокъ принять нѣкоторую кривизну AMB и удерживаетъ его въ семъ состояніи силою φ, въ точкѣ C приложенною, [которая дѣйствуетъ перпендикулярно къ пруту CA, твердо съ клинкомъ AMB соединенному, и не иное что дѣлаетъ какъ преодолѣваетъ токмо упругость клинка въ каждой точкѣ M, дабы оный принялъ соотвѣтственную напряженію ея кривизну]. Я возьму продолженную CA за ось абсциссъ, и означу CA чрезъ c, AP чрезъ x, PM чрезъ y; будетъ моментъ силы $\varphi = \varphi(c+x)$, и сей моментъ долженъ быть соравновѣсенъ съ упругостію клинка въ точкѣ M. Оная же упругость зависитъ отъ свойства клинка, которой мы полагаемъ одинаковымъ по всему его протяженію, и отъ кривизны его въ точкѣ M; такимъ образомъ, что мы можемъ положить упругость въ точкѣ M обратно пропорціональною радіусу кривизны въ сей точкѣ, или пропорціональною количеству $-\frac{\partial x \partial^2 y}{\partial s^3}$, взятому въ предположеніи разности Δx постоянною. И такъ, означивъ чрезъ be^2 особенную упругость клинка, сирѣчь ту, которая зависитъ отъ свойства составляющихъ его частей, будешь имѣть уравненіе

$$\varphi(c+x) = -\frac{be^2 \partial x \partial^2 y}{\partial s^3}, \text{ или } \varphi(c+x) = -be^2 \cdot -\frac{\partial x \partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но предѣл. содержанія $\frac{\Delta \frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} - \frac{\partial y^2 \partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}}}}{\partial x} =$

$\frac{\partial x \partial^2 y}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$; слѣдовательно $\varphi(c + x) = - be^2 \times$ предѣл. содержанія $\frac{\Delta \frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}}{\Delta x}$; откуда найдется, означивъ чрезъ h произвольное постоянное количество, $\varphi\left(h + cx + \frac{x^2}{2}\right) = - be^2 . \frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}$.

И такъ уравненіе линеи упрутости есть таково $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varphi\left(h + cx + \frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{b^2 e^4 - \varphi^2\left(h + cx + \frac{x^2}{2}\right)^2}}$, изъ котораго алгебраическаго отношенія между y и x найти не возможно, какъ то мы увидимъ въ послѣдствіи.

КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ КНИГИ.

За которою послѣдуютъ прибавленія, въ разныхъ мѣстахъ сея книги упоминаемыя.

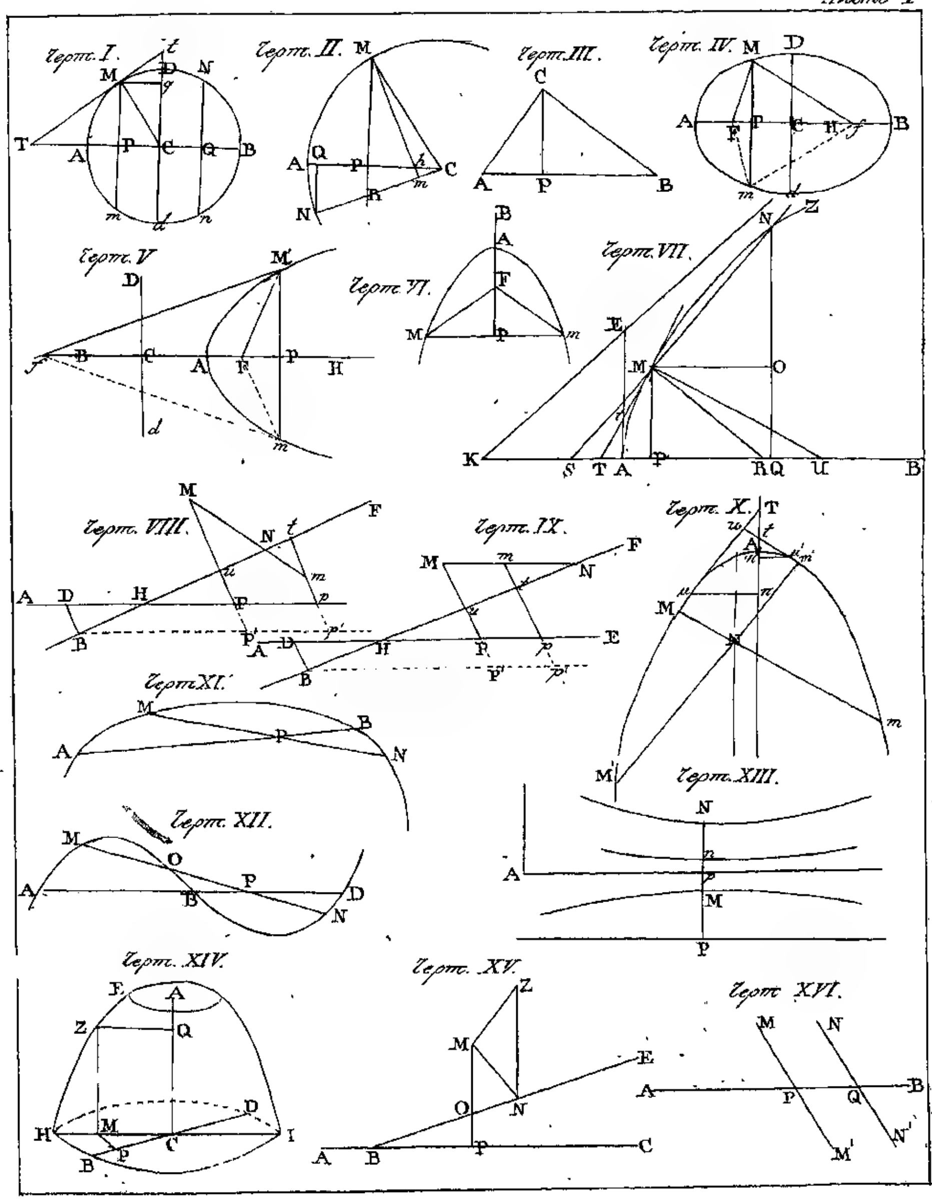
стран.	строк.	Напечатано	читай.
[illegible]	18	$\frac{\text{ſin.}\ \alpha + \text{ſin.}\ \beta}{\text{coſ.}\ \alpha + \text{co.}\ \beta}$	$\frac{\text{ſin.}\ \alpha + \text{ſin.}\ \beta}{\text{coſ.}\ \alpha + \text{coſ.}\ \beta}$
8	13	$c\ \text{ſin.}\ \beta$	$b\ \text{ſin.}\ \beta$
—	21	$= \frac{4ps}{\text{ſin.}\ \beta}$	$= \frac{4ps}{\text{ſin.}\ \beta}$
9	8	(4)	(14)
12	14	прошяпи	прошяни
13	17	$x = 0$	$y = 0$
16	14	извелеченное	извлеченное
18	18	и попону	и потому
19	16	. Слѣдовательно	и слѣдовательно
20	—	$X + x$	$X - x$
21	14	$2aT\ \text{ſin.}\ m\ \text{ſin.}\ (q - m)$	$2aTV\ \text{ſin.}\ m\ \text{ſin.}\ (q - m)$
—	15	$bVy\ \text{coſ.}\ (y - m)$	$bVy\ \text{coſ.}\ (q - m)$
33	3	$- H,$	$- H],$
—	33	$ab^2 - bxy +$	$ay^2 - bxy +$
23	8	$cV^2\ \text{coſ.}\ (q - m^2) -$	$cV^2\ \text{coſ.}\ (q - m)^2 -$
—	9	$- eVx\ \text{coſ.}\ (q - m) +$	$- eV\ \text{coſ.}\ (q - m) +$
—	33	$+ ex$	$+ eX$
24	30	$+ \frac{c}{e} X)$	$+ \frac{e}{c} X)$
—	33	^2X	X^2
25	15	$\pm \frac{T}{E} \sqrt{F^2 - 4GE},$	$\pm \frac{T}{2E} \sqrt{F^2 - 4GE},$
—	16	$- \frac{T}{E} \sqrt{F^2 - 4GE}$	$- \frac{T}{2E} \sqrt{F^2 - 4GE}$
—	—	$+ \frac{T}{E} \sqrt{F^2 - 4GE}$	$+ \frac{T}{2E} \sqrt{F^2 - 4GE}$
—	21	$+ \frac{FTV}{2E} +$	$+ \frac{FTV}{E}$
26	25	$- (2aT\ \text{coſ.}\ m +$	$- (2cT\ \text{coſ.}\ m +$
27	—	$+ (2c + e)\ \text{coſ.}\ (q - m),$	$+ (2c + e)\ \text{coſ}\ (q - m) = 0;$
30	13	$= \pm \frac{h^2}{g'^2} \pm \frac{h^2}{g^2}$	$= \pm \frac{h^2}{g'^2} \mp \frac{h^2}{g^2}$
—	24	$\frac{(X \mp g)Y}{\mp (2g \mp X)X}$	$\frac{(X \mp g)Y}{\pm (2g \mp X)X}$
31	9	$g^2 \mp h^2 =$	$g^2 \pm h^2 =$
32	17	$\lambda'\ \text{ſin.}\ (q - m)$	$\lambda\ \text{ſin.}\ (q - m)$

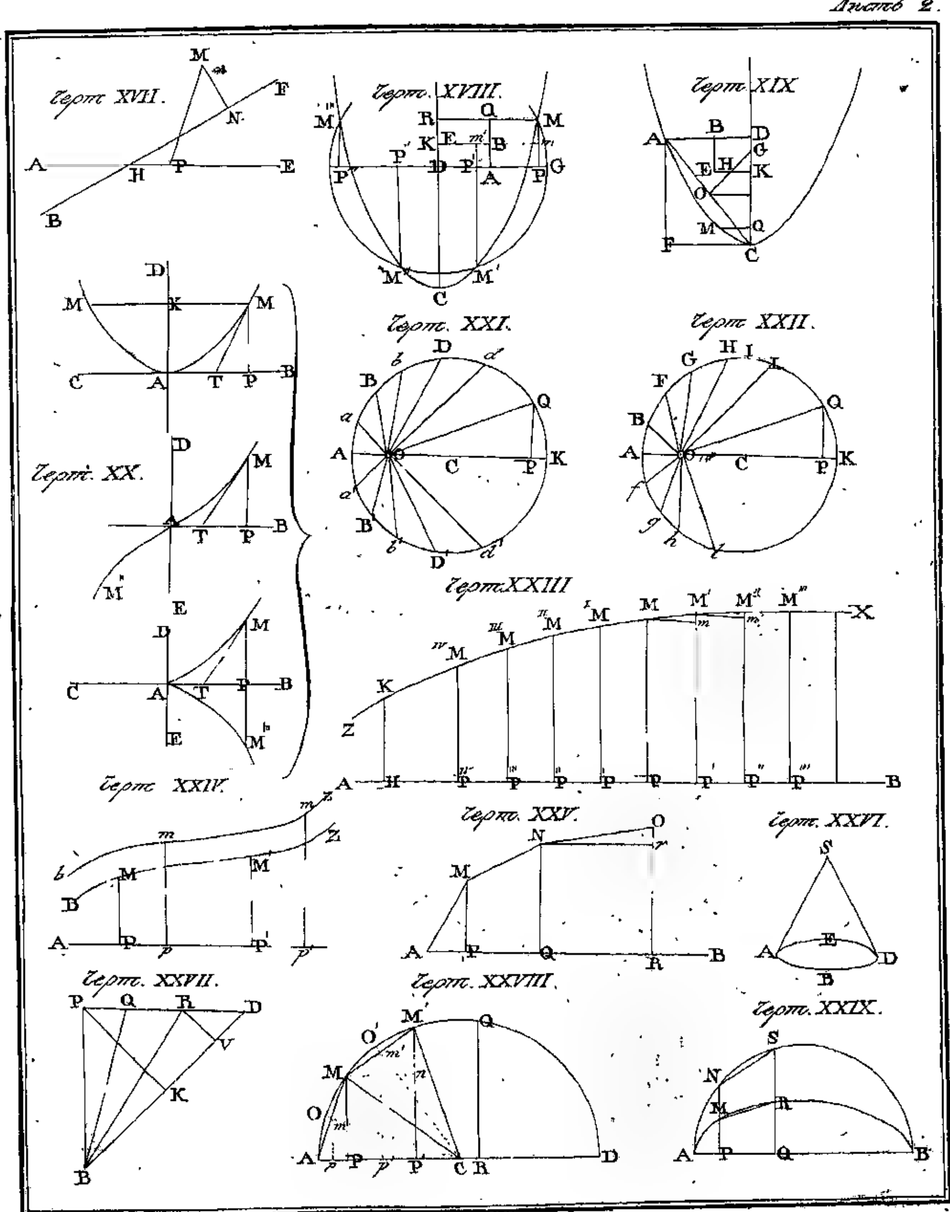
)(

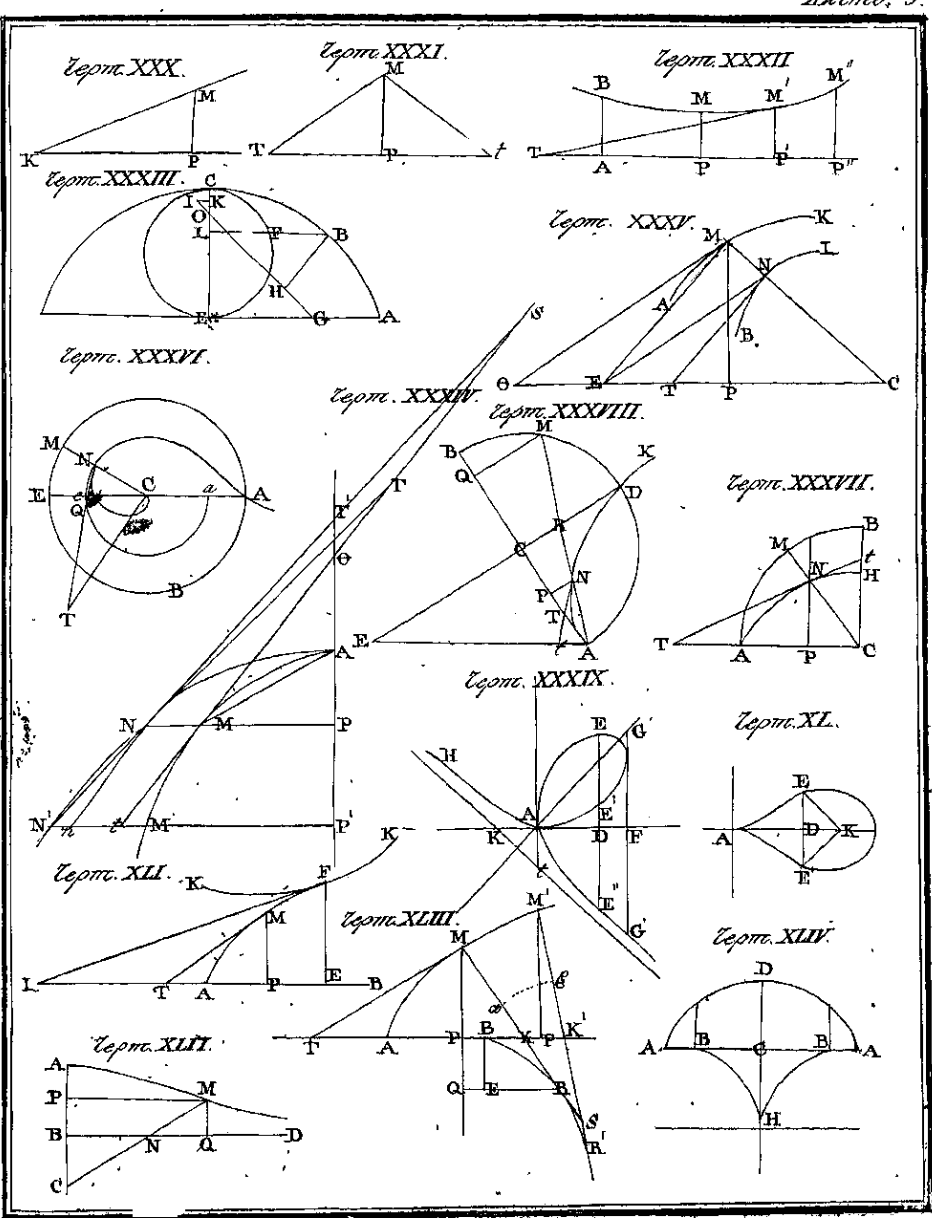
стр.	строк.	напечатано	читай.
33	15	въ мѣсто	вмѣсто
35	7	$= h^2$	$= \mp h^2$
40	12	$\frac{e\,\Gamma}{a\,\sin\,q^2}$	$\frac{E\,\Gamma}{a\,\sin\,l^2}$
51	2	$EV^{\cdot} +$	$EV^3 +$
52	8	$+ b\cos. m,$	$+ b\cos. m);$
59	6	шретей	третьей
—	11	$+ \sin. \cos. m$	$+ \sin. m \cos. m$
—	13	$- b\sin. \mu\ (\sin. m\cos. \mu -$	$- b\sin. m(\sin. m\cos. \mu -$
60	5	$+ 2\ (x\sin. m -$	$+ e\,(x\sin. m -$
—	6	$- 2xy\sin. m) =$	$- 2xy\cos. m) =$
66	19	отрывокъ	отрывковъ
—	—	кукую	какую
68	24	$= (y\cos. n -$	$= (y\cos. m -$
74	28	$- H^2\sin. \mu\cos. \mu^2 +$	$- H^3\sin. \mu\cos. \mu^2 +$
77	1	$+ x(-\ h)\cos. m,$	$(x - h)\cos. m,$
79	27	цгопольнаго	ціальнаго
80	4	крывыхъ	кривыхъ
89	16	$+ \frac{2b}{2a}$	$+ \frac{b^2}{2a}$
90	25	$+ d^4$	$+ d^2$
91	25	о трехчастномъ	о тричастномъ
92	3	трешей	трешьей
—	6	третей	третьей
—	10	трешей	третьей
—	24	точшо	точно
93	11	о трехчастномъ	о тричастномъ
98	23	о трех-	о три-
99	10	въ уравненіе	уравненіе
—	13	$\mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{2}} =$	$\mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} =$
104	31	опое	оное
106	2	$- \sin. \beta\cos. \mu\ ]$	$\sin. \beta\sin. \mu\,]$
109	20	$a^3 + x^2$	$a^3 + x^3$
112	2	Муавръ	Моавръ

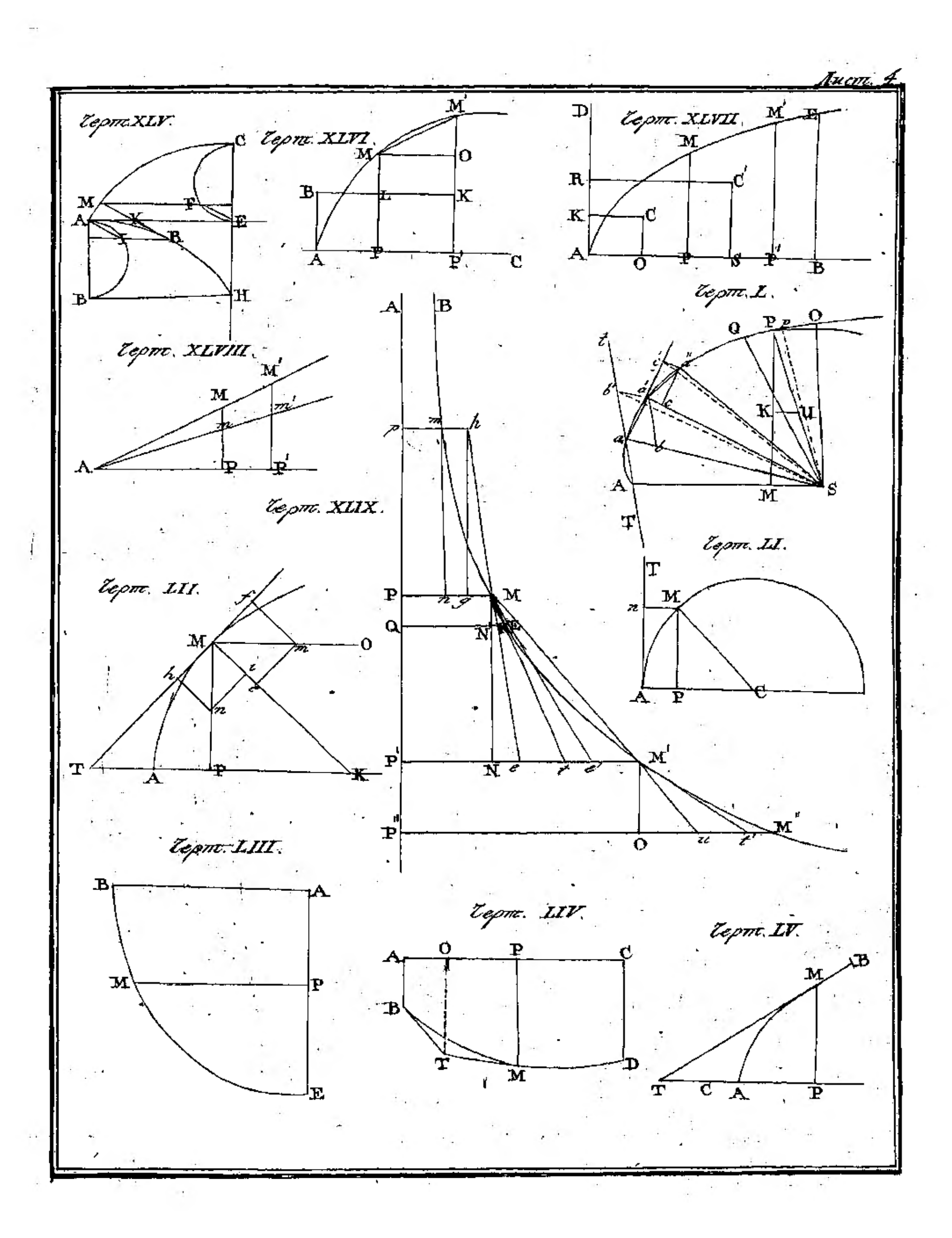
стран.	стр., ок.	напечатано.	читай.
119	3	(96)	(86)
129	15	$+ m.\frac{m-1}{2}\left(\frac{t}{+t}\right)^2 -$	$+ m.\frac{m-1}{2}\left(\frac{t}{p+t}\right)^2 -$
—	25	и читателя	читателя
132	1	$= \mu + 3$	$= \lambda + 3$
150	15	— и проч.	+ и проч.
—	19	+ и проч.	— и проч.
180	12	X. и — Y	X — Y
187	18	$(PN + QS)$	$(PN + QS)^2$
198*	6	$a^2 \partial x (\sqrt{a^2 + x^2} - x)^2$	$a^2 \partial x (\sqrt{a^2 + x^2} - x)^3$
200	7	$\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{}{m+n}} x^{-\frac{m}{m+m}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{}{m+n}} . x^{-\frac{m}{m+n}}$
201	29	то	по
207	21	нетїи	нетїе
214	28	$(\sqrt{a^2 + x^2} + x)(\sqrt{a^2 + x^2} + x)$	$(\sqrt{a^2 + x^2} + x)(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$
225	1	Здѣсь же	Здѣсь еще
—	17	cof. TTU	cof. TMU
237	22	для сего	для проведенїя касательной
255	20	(163)	(164)
259	32	$= \log - 1,$	$\log. 1,$
260	26	возставимъ	поставимъ
263	1	$\mp i\pi$	$\pm i\pi$
265	28	$= \frac{a}{} + \frac{a}{(z+1)}$	$= \frac{a}{z} + \frac{a}{-z+}$
273	1	$B = \frac{m}{},$	$B = \frac{m}{2},$
299	19	Ни сжитая	ни сжатая
302	20	$\frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 p^2}{a - z)^2},$	$\frac{1}{4} \frac{a^2 p^2}{(a - z)^2},$
315	32	меджу	между,
322	16	К такъ	И такъ
323	14	$u \partial t + t \partial u,$	$u \partial t + t \partial u,$

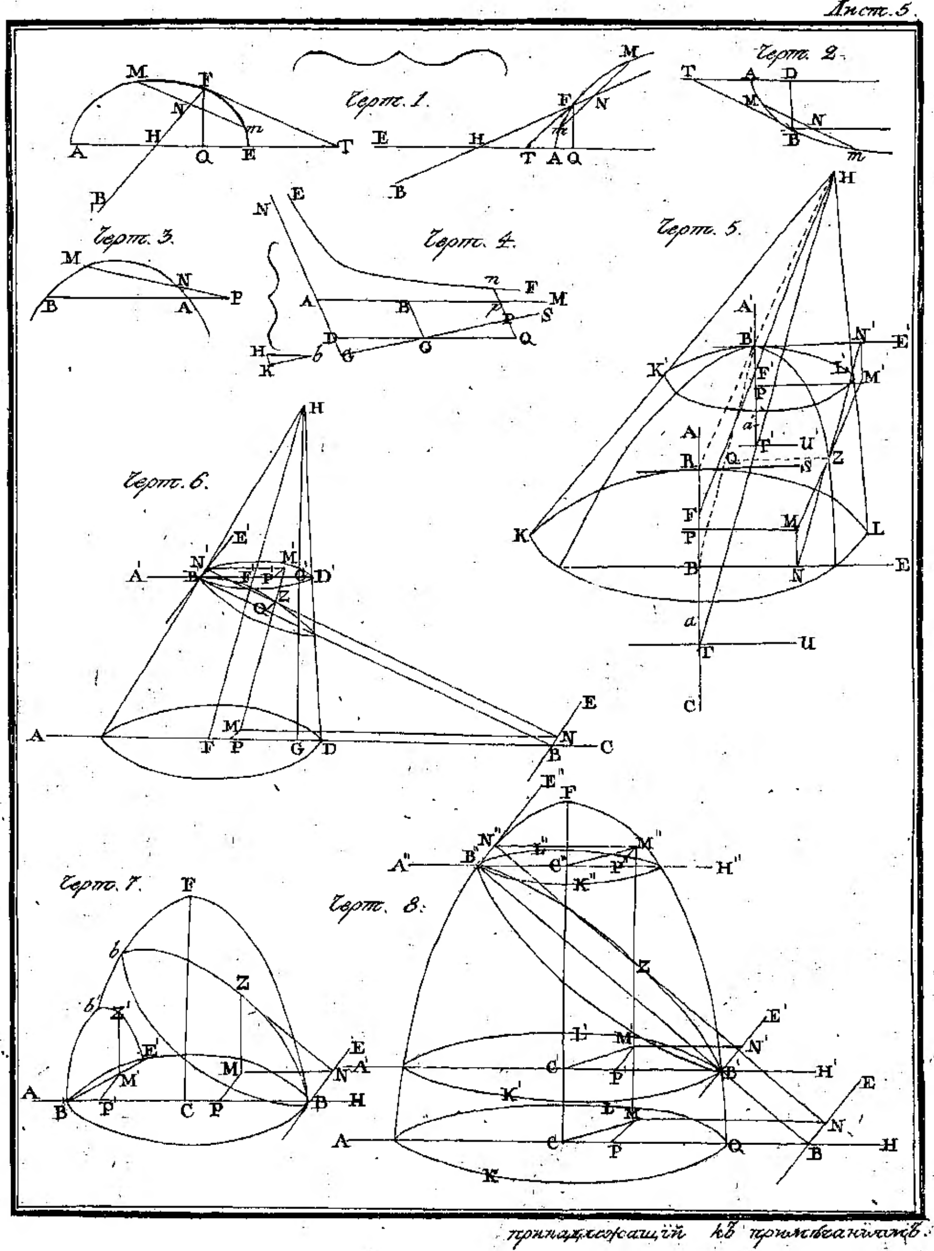
стран.	строк	напечатано.	читай.
326	15	$\int \frac{\partial \Phi}{\cos \Phi} =$	$\int \frac{\partial \Phi}{\cos \Phi^2} =$
338	3	поставлая	поставляя
340	15	$\frac{b;}{2g} \int \frac{2ez\partial}{e - ..}$	$\frac{b}{2g} \int \frac{2g\partial z}{e - ..}$
345	13	рядъ	разъ
349	9	оно	оное
358	25	поремѣнится	перемѣнится
360	11		(184)
361	23	$n = 1$ и $n = 1$	и $n = 1$
362	7	координатами	ординатами
363	22	во торой	во второй
381	8	дуга	дуги
383	16	$\int \frac{t\partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + t}} =$	$\int \frac{t\partial t}{\sqrt{t^2 - 2bt + 1}} =$
396	18	обрмзомъ	образомъ
408	21	(163)	(193)


Черт. I.
Черт. II.
Черт. III.
Черт. IV.
Черт. V
Черт. VI.
Черт. VII.
Черт. VIII.
Черт. IX.
Черт. X.
Черт. XI.
Черт. XII.
Черт. XIII.
Черт. XIV.
Черт. XV.
Черт. XVI.

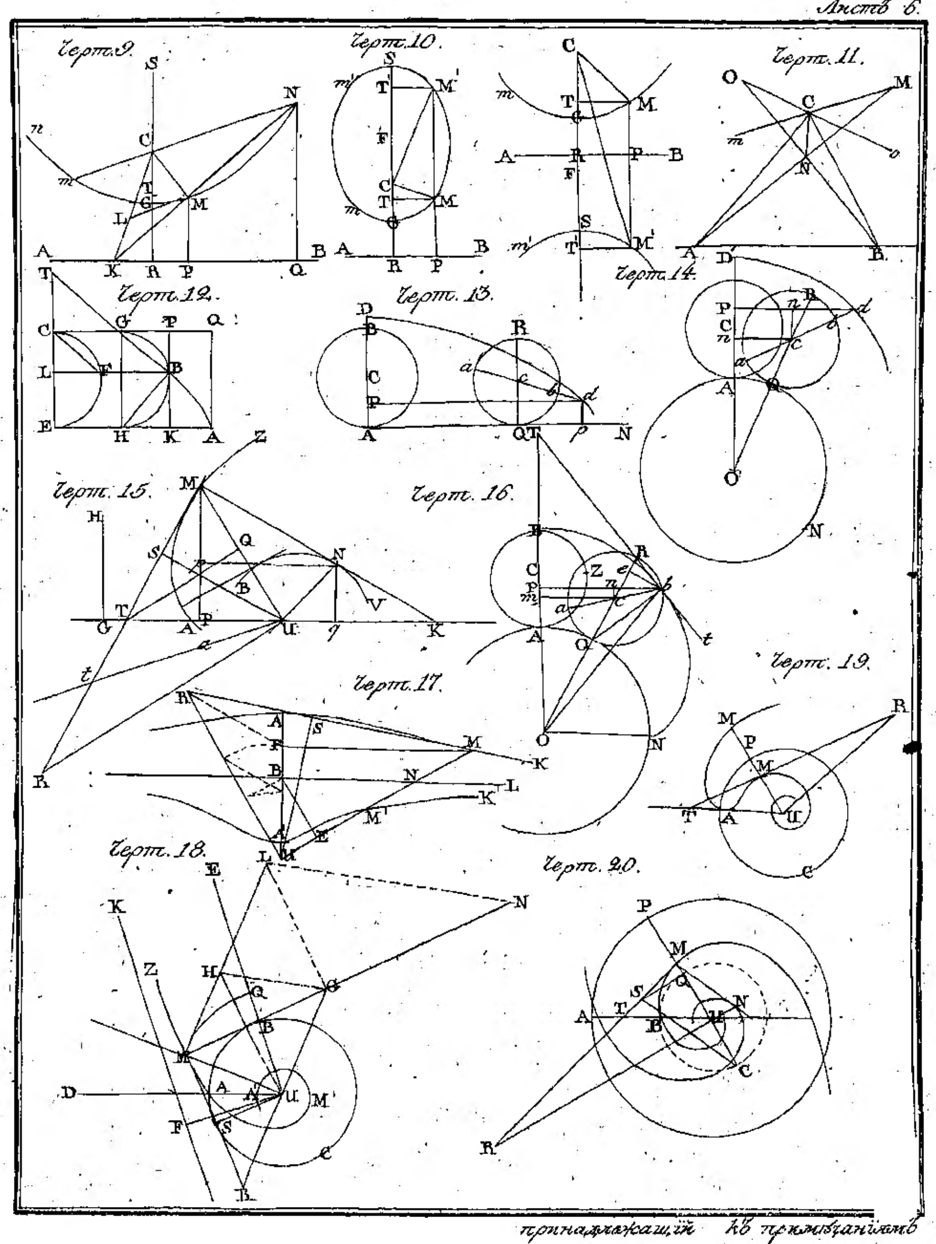

Черт. XVII.
Черт. XVIII.
Черт. XIX.
Черт. XX.
Черт. XXI.
Черт. XXII.
Черт. XXIII.
Черт. XXIV.
Черт. XXV.
Черт. XXVI.
Черт. XXVII.
Черт. XXVIII.
Черт. XXIX.


Черт. XXX.
Черт. XXXI.
Черт. XXXII.
Черт. XXXIII.
Черт. XXXV.
Черт. XXXVI.
Черт. XXXIV.
Черт. XXXVIII.
Черт. XXXVII.
Черт. XXXIX.
Черт. XL.
Черт. XLI.
Черт. XLIII.
Черт. XLIV.
Черт. XLII.


Лист. 4
Черт. XLV.
Черт. XLVI.
Черт. XLVII.
Черт. XLVIII.
Черт. XLIX.
Черт. L.
Черт. LI.
Черт. LII.
Черт. LIII.
Черт. LIV.
Черт. LV.

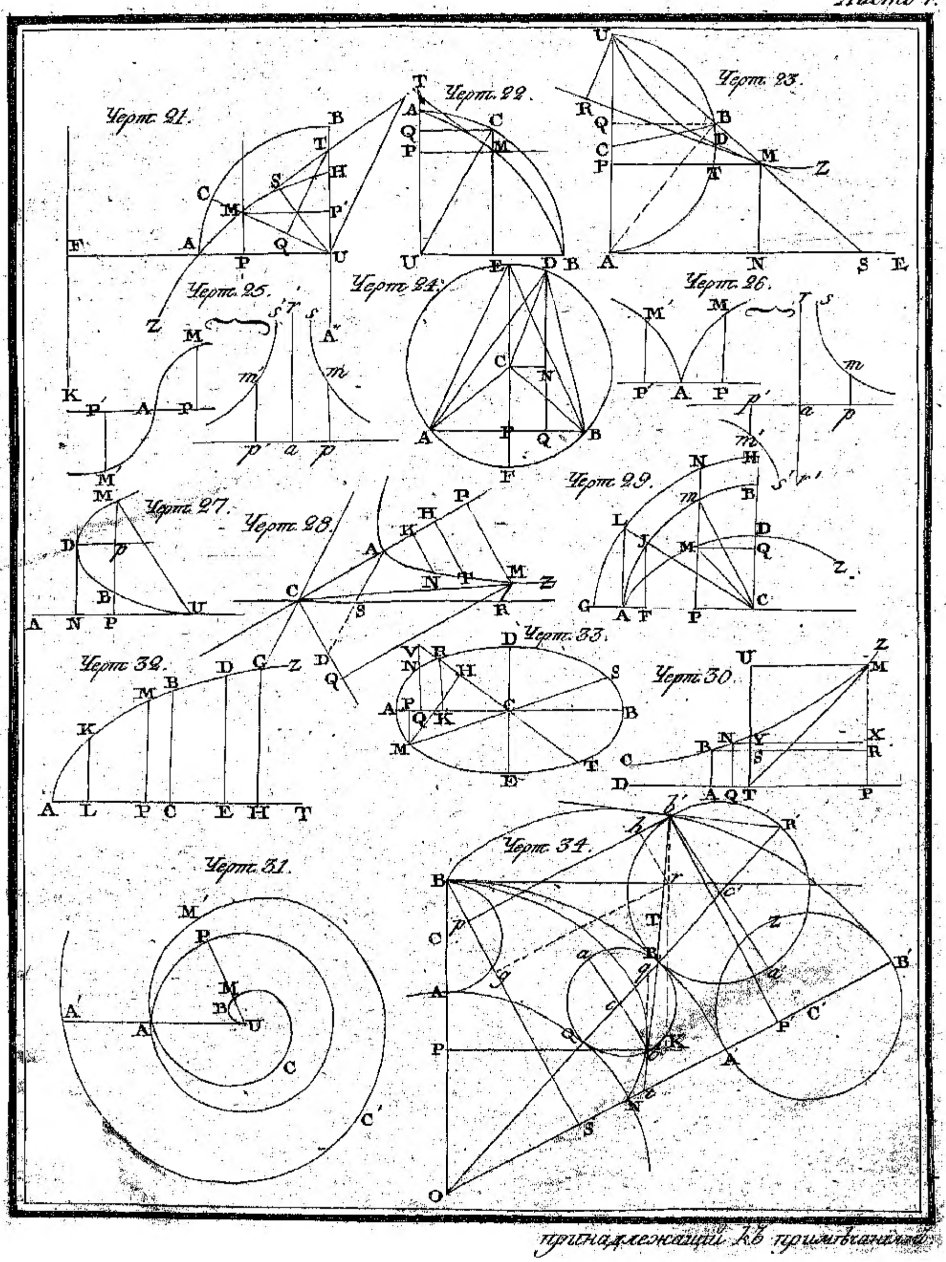


принадлежащій къ примѣчаніямъ.



принадлежащій къ примѣчаніямъ

Листъ 7.



принадлежащій къ примѣчаніямъ.